УДК 532.5

© 1998 г. В.П. Маслов, А.И. Шафаревич

# ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА И ЛАМИНАРНЫЕ СЛЕДЫ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Выводятся уравнения, описывающие дальний ламинарный след при установившемся обтекании тела несжимаемой жидкостью в случае произвольного распределения скоростей внешнего (невозмущенного) потока. Анализ этих уравнений позволяет для некоторых классов внешних потоков описать ряд процессов, происходящих в узких следах или струях (взаимодействие продольной и поперечной компонент скорости в струе, приводящее к ее ускорению или замедлению; поддержание энергии следа за счет искривления его траектории, несмотря на вязкую диссипацию). В частности, для винтовых потоков получены условия роста следа, аналогичные условиям Релея, гарантирующим неустойчивость двумерных радиально-симметричных течений относительно трехмерных коротковолновых возмущений.

С математической точки зрения рассматриваемые гидродинамические задачи характеризуются наличием малого параметра $\varepsilon$ – отношения характерного поперечного масштаба к продольному. Уравнения, которые выводятся и исследуются ниже, определяют главный член асимптотики решения уравнений Навье–Стокса по этому малому параметру, причем также предполагаются малыми отношение поперечных компонент скорости к продольным (порядка $\varepsilon$) и коэффициент вязкости (порядка $\varepsilon^2$ – если вязкость существенно больше, она мгновенно разрушает след).

Схема построения таких асимптотических разложений была предложена в [1] на основе анализа резонансных свойств уравнений Навье–Стокса (ср. с [1–5]). Эта схема была реализована для уравнений магнитной гидродинамики [6–9], причем выведенные уравнения описывают асимптотику локализованных полей в плазме; для случая цилиндрически-симметричного пинча они были получены ранее [10]. Некоторые из изучаемых ниже явлений в ламинарных следах имеют аналогии в физике плазмы; например, взаимодействие продольной и поперечной компонент скорости в следе аналогично эффекту Шафранова–Пустовитова (взаимодействие продольной и поперечной компонент магнитного поля в плазменном шнуре, см. [9, 11]).

**1. Вывод уравнений, описывающих ламинарный след.** Рассмотрим установившееся течение несжимаемой жидкости. После скоростей $\mathbf{v}(x)$ удовлетворяет стационарным уравнениям Навье–Стокса

$$(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} + \nabla p = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v}, \quad (\nabla, \mathbf{v}) = 0 \tag{1.1}$$

где $p(\mathbf{x})$ – давление в жидкости, Re – число Рейнольдса. Пусть задан внешний стационарный поток $\mathbf{V}(\mathbf{x})$; будем изучать возмущения этого потока, обладающие следующими свойствами:

1) возмущения малы, т.е. поле скоростей $\mathbf{v}$ мало отличается от внешнего поля $\mathbf{V}$;

2) возмущения локализованы в малой окрестности некоторой кривой $\gamma$ в трехмерном пространстве.

Введем малый параметр $\varepsilon$, характеризующий отношение ширины указанной окрестности к характерному масштабу изменения внешнего поля $\mathbf{V}(\mathbf{x})$. Условия 1 и 2 означают, что изучаются решения уравнений (1.1), обладающие следующими свойствами:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbf{v}-\mathbf{V})=0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbf{v}-\mathbf{V}}{\varepsilon}=0$$

при всех $\mathbf{x}$, находящихся от $\gamma$ на конечном (не зависящем от $\varepsilon$) расстоянии $\rho > 0$.

Такие решения удовлетворяют специально выбранным краевым условиям для уравнений (1.1). Рассмотрим произвольную поверхность $\Gamma$, трансверсальную полю $\mathbf{V}$. Пусть она задана в $R_x^3$ уравнениями $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ – координаты на $\Gamma$, $\mathbf{r}(\alpha)$ – гладкие функции, причем векторы $\partial\mathbf{r}/\partial\alpha_1$, $\partial\mathbf{r}/\partial\alpha_2$, $\mathbf{V}$ линейно независимы во всех точках $\Gamma$. Выберем на поверхности $\Gamma$ гладкие функции $S_j^0(\alpha)$ ($j = 1, 2$) и зададим на ней граничные условия в виде малого возмущения внешнего потока, локализованного вблизи точки $\alpha_0$, в которой указанные функции обращаются в нуль:

$$\mathbf{v}|_\Gamma=\mathbf{V}+\varepsilon\mathbf{U}_0\left(\frac{S_1^0(\alpha)}{\varepsilon},\frac{S_2^0(\alpha)}{\varepsilon},\alpha\right) \qquad \mathbf{v}\,|_\Gamma=\mathbf{V}+\varepsilon\mathbf{U}_0\left(\frac{S_1^0(\alpha)}{\varepsilon},\frac{S_2^0(\alpha)}{\varepsilon},\alpha\right) \tag{1.2}$$

где $\mathbf{U}_0(y_1, y_2, \alpha)$ – гладкая вектор-функция, быстро убывающая при $|\mathbf{y}| \to \infty$ ($y_j = S_j^0/\varepsilon$).

Отметим, что задание условий (1.2) имеет следующий смысл: считаем, что в жидкости образовался узкий след, причем после скоростей возмущения известно на некоторой поперечной к внешнему потоку площадке; задача состоит в описании изменения следа под действием потока при удалении от этой площадки. Таким образом, ищем решение задачи (1.1), (1.2) в полупространстве, ограниченном поверхностью $\Gamma$.

Решение задачи (1.1), (1.2) будем искать в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{x},\varepsilon)&=\mathbf{V}^0(\mathbf{x},\varepsilon)+\varepsilon\mathbf{U}\left(\frac{S_1(\mathbf{x})}{\varepsilon},\frac{S_2(\mathbf{x})}{\varepsilon},\mathbf{x}\right)+\ldots\\ p(\mathbf{x},\varepsilon)&=p_0+\varepsilon\pi_0\left(\frac{S_1(\mathbf{x})}{\varepsilon},\frac{S_2(\mathbf{x})}{\varepsilon},\mathbf{x}\right)+\varepsilon^2\pi\left(\frac{S_1(\mathbf{x})}{\varepsilon},\frac{S_2(\mathbf{x})}{\varepsilon},\mathbf{x}\right)+\ldots\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{V}^0$ – гладкое векторное поле (неубывающая часть решения), $p_0$ – давление, отвечающее полю $\mathbf{V}^0$, функции $\mathbf{U}(y_1, y_2, \mathbf{x})$, $\pi(y_1, y_2, \mathbf{x})$, $\pi_0(y_1, y_2, \mathbf{x})$ убывают при $|\mathbf{y}| \to \infty$ быстрее, чем $|\mathbf{y}|^{-1}$, а функции $S_j(\mathbf{x})$ обращаются в нуль на кривой $\gamma$ (заранее неизвестной), причем векторы $\nabla S_1$ и $\nabla S_2$ линейно независимы. Здесь и далее $\mathbf{y}$ – двумерный вектор "растянутых" переменных, $y_j = S_j/\varepsilon$. Как уже отмечалось (см. выше), след может существовать только при достаточно малой вязкости; поэтому положим в (1.1) $\mathrm{Re}^{-1} = \varepsilon^2\nu$, $\nu = O(1)$.

Подставим (1.3) в (1.1). Рассматривая это уравнение вне произвольной не зависящей от $\varepsilon$ окрестности кривой $\gamma$, получим, что $\mathbf{V}^0 = \mathbf{V} + o(\varepsilon)$ (поскольку в дальнейшем рассматривается асимптотика с такой же точностью, далее всюду полагаем $\mathbf{V}^0 = \mathbf{V}$). Теперь в оставшихся слагаемых приравняем к нулю коэффициенты при каждой степени $\varepsilon$.

При $\varepsilon^0$ получим

$$\sum_{j=1}^{2}(\mathbf{V},\nabla S_j)\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial y_j}+\nabla S_j\frac{\partial\pi_0}{\partial y_j}=0, \quad \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial y_j}(\mathbf{U},\nabla S_j)=0 \tag{1.4}$$

Умножая первое (векторное) уравнение в (1.4) на $\nabla S_1$ и $\nabla S_2$, имеем

$$\sum_{j=1}^{2}(\mathbf{V},\nabla S_j)\frac{\partial u_k}{\partial y_j}+(\nabla S_k,\nabla S_j)\frac{\partial\pi_0}{\partial y_j}=0, \quad k=1,2; \quad \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial u_j}{\partial y_j}=0 \tag{1.5}$$

где $u_j = (\mathbf{U}, \nabla S_j)$. Дифференцируя первое (при $k = 1$) уравнение в (1.5) по $y_1$, второе по $y_2$, складывая их и учитывая третье уравнение, получим

$$D^2\pi_0 \equiv \sum_{j,k=1}^{2} (\nabla S_j, \nabla S_k) \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} \pi_0 = 0$$

Из эллиптичности этого уравнения и требования убывания $\pi_0$ на бесконечности находим, что $\pi_0 = 0$ и из (1.5) получаем, что

$$(\mathbf{V}, \nabla S_j) = 0 \tag{1.6}$$

Из (1.6), в частности, следует, что кривая $\gamma$ (на которой $S_1 = S_2 = 0$) является линией тока поля $\mathbf{V}$.

Рассмотрим теперь уравнения, получаемые приравниванием к нулю коэффициента при $\varepsilon^1$. С учетом (1.6) и равенства нулю функции $\pi_0$, из первого (векторного) уравнения (1.1) получаем

$$(\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{V} + \sum_{j=1}^{2} \left( (\mathbf{U}, \nabla S_j) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_j} + \nabla S_j \frac{\partial \pi}{\partial y_j} \right) = \nu D^2 \mathbf{U} \tag{1.7}$$

где $\nabla$ – градиент по "медленным" переменным $\mathbf{x}$ при постоянных $\mathbf{y}$. Спроектируем последнее уравнение на три линейно независимых вектора $\nabla S_1$, $\nabla S_2$, $\mathbf{V}$. Обозначая $w = (\mathbf{U}, \mathbf{V})$, учитывая (1.5) и тождества

$$(\nabla S_j, (\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{U}) = (\mathbf{V}, \nabla) u_j - (\mathbf{U}, (\mathbf{V}, \nabla) \nabla S_j)$$

$$(\mathbf{V}, \nabla) \nabla S_j = \nabla (\mathbf{V}, \nabla S_j) - \frac{\partial V^*}{\partial x} \nabla S_j = -\frac{\partial V^*}{\partial x} \nabla S_j \tag{1.8}$$

$$(\mathbf{V}, (\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{U}) = (\mathbf{V}, \nabla) w - (\mathbf{U}, (\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{V}) = (\mathbf{V}, \nabla) w - \left( \mathbf{U}, \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{V} \right)$$

$$\mathbf{U} = \sum_{i,j=1}^{2} (T^{-1})_{ij} u_i \nabla S_j + \frac{w\mathbf{V}}{|V|^2}$$

где $\partial V/\partial x$ – $(3 \times 3)$-матрица с элементами $\partial V_i/\partial x_j$ ($\partial V^*/\partial x$ – транспонированная матрица), а $T$ – $(2 \times 2)$-матрица с элементами $(\nabla S_i, \nabla S_j)$, получим из (1.7) и (1.5) уравнения, определяющие возмущение $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $w$:

$$\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{u}, \nabla_y)\mathbf{u} = -T\nabla_y \pi + \nu D^2 \mathbf{u} - AT^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{a}w, \quad (\nabla_y, \mathbf{u}) = 0 \tag{1.9}$$

$$\dot{w} + (\mathbf{u}, \nabla_y) w = \nu D^2 w - (T^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{u})$$

Здесь $\nabla_y$ – градиент по переменным $\mathbf{y}, \dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{u}$ ($\dot{w} = (\mathbf{V}, \nabla) w$), а элементы $(2 \times 2)$-матрицы $A$ и двумерных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяются по формулам

$$A_{ij} = 2\left( \nabla S_i, \frac{\partial V}{\partial x} \nabla S_j \right)$$

$$a_j = \frac{2}{\mathbf{V}^2} \left( \nabla S_j, \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{V} \right), \quad b_j = \left( \mathbf{V}, \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V^*}{\partial x} \right) \nabla S_j \right)$$

Таким образом, доказана

*Теорема.* Пусть векторное поле $\mathbf{V}$, кривая $\gamma$ и функции $S_j$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ – гладкая вектор-функция от $(\mathbf{x}, \varepsilon)$, стремящаяся при $|\mathbf{x}| \to \infty$ к некоторому вектору $\mathbf{V}_0(\varepsilon)$, причем все производные $\mathbf{V}$ по $x_j$ стремятся к нулю, и удовлетворяющая уравнениям (1.1) в $R^3 \mathrm{mod}\, o(\varepsilon)$;

2) $\gamma$ – гладкая несамопересекающаяся траектория поля $\mathbf{V}$, уходящая на бесконечность, причем $|\mathbf{V}|_\gamma \geqslant \delta > 0$;

3) $S_j(\mathbf{x})$ – гладкие функции, $\nabla S_1$, $\nabla S_2$ линейно независимы в $R^3$, $\nabla S_j \to k_j = \mathrm{const}$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$, все производные высших порядков от $S_j$ стремятся к нулю, $S_j|_\gamma = 0$, и в некоторой не зависящей от $\varepsilon$ окрестности $\Omega$ кривой $\gamma$ выполнены равенства (1.6).

Пусть далее $\mathbf{u}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $w(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\pi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ – гладкое решение системы (1.9) при $\mathbf{y} \in R^2$, $\mathbf{x} \in \Omega$, удовлетворяющее условиям $\lim_{|\mathbf{y}|\to\infty}|\mathbf{u}| = \lim_{|\mathbf{y}|\to\infty}|w| = 0$, г ладко п родолженное в $R^2_\mathbf{y} \times R^3_\mathbf{x}$ так, что $w \equiv 0$ в окрестности особых точек поля $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, а $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ – гладкая двумерная вектор-функция, убывающая при $|\mathbf{y}| \to \infty$ и удовлетворяющая в $\Omega$ равенству

$$(\nabla_\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{u}}) = -(\nabla, \mathbf{U}) \tag{1.10}$$

(функция $\mathbf{U}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ определена формулой (1.8)). Тогда вектор-функция

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, \varepsilon) + \varepsilon \mathbf{U}\left(\frac{S_1(\mathbf{x})}{\varepsilon}, \frac{S_2(\mathbf{x})}{\varepsilon}, \mathbf{x}\right) + \varepsilon^2 \tilde{\mathbf{u}}\left(\frac{S_1(\mathbf{x})}{\varepsilon}, \frac{S_2(\mathbf{x})}{\varepsilon}, \mathbf{x}\right)$$

удовлетворяет уравнениям (1.1) в $R^3 \mathrm{mod}\, o(\varepsilon)$.

*Замечания.* 1°. Из теоремы следует, что построение асимптотического решения задачи (1.1), (1.2) сводится к решению задачи Коши для системы (1.9). Действительно, пусть $\gamma$ – траектория поля $\mathbf{V}$, выпущенная из точки $\alpha_0$ поверхности $\Gamma$. Решение уравнений (1.6), удовлетворяющее условию $S_j|_\Gamma = S_j^0$, имеет вид $S_j(\mathbf{x}) = S_j^0(\alpha(\mathbf{x}))$, где $\alpha(\mathbf{x})$ – точка пересечения линии тока поля $\mathbf{V}$, проходящей через точку $\mathbf{x}$, с поверхностью $\Gamma$. Другими словами, если $\mathbf{X}(\alpha, t)$ – решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{V}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{r}(\alpha)$$

то $\alpha(\mathbf{x})$ находится из уравнений

$$X(\alpha, t) = \mathbf{x} \tag{1.11}$$

Далее пусть $\mathbf{u}(\mathbf{y}, \alpha, t)$, $w(\mathbf{y}, \alpha, t)$ – решение задачи Коши для системы (1.9) с начальными условиями

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0(\mathbf{y}, \alpha), \quad \mathrm{w}|_{t=0} = w^0(\mathbf{y}, \alpha) \tag{1.12}$$

Тогда, очевидно, построенный по функциям $\mathbf{u}(\mathbf{y}, \alpha(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}))$, $w(\mathbf{y}, \alpha(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}))$ вектор $\mathbf{U}$ (см. (1.8)) определяет возмущение поля $\mathbf{V}$, удовлетворяющее условиям (1.2). Через $\alpha(\mathbf{x})$, $t(\mathbf{x})$ здесь обозначено решение системы (1.11) ($t(\mathbf{x})$ – время, за которое траектория поля $\mathbf{V}$, выпущенная из точки $\alpha(\mathbf{x})$ поверхности $\Gamma$, достигает точки $\mathbf{x}$).

2°. Первые уравнения системы (1.9) похожи на двумерные нестационарные уравнения Навье–Стокса с дополнительными "силами", линейно зависящими от скоростей, а последнее – на уравнение теплопроводности.

3°. Будем говорить, что функция $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ удовлетворяет системе (1.1) $\mathrm{mod}\, o(\varepsilon^k)$, если существует такая функция $\tilde{p}(\mathbf{x}, \varepsilon)$, что $|(\tilde{\mathbf{u}}, \nabla)\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{p} - \mathrm{Re}^{-1}\Delta\tilde{\mathbf{u}}| = o(\varepsilon^k)$, $|(\nabla, \tilde{\mathbf{u}})| = o(\varepsilon^k)$.

4°. Поскольку вне области $\Omega$ $|\mathbf{U}| = o(1)$, достаточно требовать выполнения уравнений (1.9) в $R^2 \times \Omega$, а не во всем $R^5$.

5°. Равенство (1.10) гарантирует равенство нулю коэффициента при $\varepsilon^1$ в выра жении $(\nabla, \mathbf{v})$ в (1.1).

6°. Для определения асимптотики решения задачи (1.1)–(1.2) с точностью $o(\varepsilon)$ достаточно рассматривать в качестве потока **V** векторное поле, удовлетворяющее уравнениям (1.1) с той же точностью. В частности, поскольку коэффициент вязкости в (1.1) есть $O(\varepsilon^2)$ и **V** гладко зависит от $\varepsilon$, в качестве **V** всюду можно выбирать гладкое решение уравнений Эйлера. Ниже в качестве примеров рассматриваются именно такие течения.

**2. Исследование уравнений ламинарного следа. Приближение Озеена**. Исследуем теперь поведение решений системы (1.9) в линейном приближении. Отбрасывая в (1.9) нелинейные слагаемые (т.е. считая возмущение малым по сравнению с $\varepsilon$), получим

$$\dot{\mathbf{u}} + AT^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{a}w + T\nabla_y\pi = \nu D^2\mathbf{u}, \quad (\nabla_y, \mathbf{u}) = 0 \tag{2.1}$$

$$\dot{w} + (T^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{u}) = \nu D^2 w$$

Эволюция по $t$ (т.е. вдоль линии тока $\gamma$) решений этой системы зависит от структуры матриц $A$, $T$ и векторов **a** и **b**, которая может быть различной для различных типов внешнего потока $V$.

В простейшем случае постоянного потока $\mathbf{V} = (0, 0, V_0)$, $V_0 = \text{const}$ система (2.1) сводится к параболическим уравнениям

$$\dot{\mathbf{u}} = \nu\Delta_y\mathbf{u}, \quad \dot{w} = \nu\Delta_y w \quad (\nabla_y, \mathbf{u}) = 0 \tag{2.2}$$

решения которых с начальными условиями (1.12) имеют вид (всюду далее, если не оговорено противное, интегрирование ведется по пространству $R^2$)

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}, \alpha, t) = \frac{1}{4\pi\nu t}\int \mathbf{u}^0(\mathbf{y}', \alpha)\exp\left[\frac{-(\mathbf{y}-\mathbf{y}')^2}{4\nu t}\right]d^2\mathbf{y}'$$

$$w(\mathbf{y}, \alpha, t) = \frac{1}{4\pi\nu t}\int w^0(\mathbf{y}', \alpha)\exp\left[\frac{-(\mathbf{y}-\mathbf{y}')^2}{4\nu t}\right]d^2\mathbf{y}'$$

Пусть поверхность $\Gamma$ – плоскость $x_3 = 0$, а $S_j|_\Gamma = x_j$ ($j$ = 1, 2). Тогда, очевидно, $S_j(\mathbf{x}) = x_j$, $t(\mathbf{x}) = x_3/V_0$. Возмущение (след), таким образом, имеет вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, x_3\right) \equiv \mathbf{U}(\mathbf{y}, x_3) = \frac{V_0}{4\pi\nu x_3}\int \mathbf{U}(\mathbf{y}', 0)\exp\left[\frac{-(\mathbf{y}-\mathbf{y}')^2}{4\nu x_3}\right]d^2\mathbf{y}' \tag{2.3}$$

Уравнения (2.2) и формула (2.3) хорошо известны в теории ламинарного следа (приближение Озеена). Из (2.3) следует, в частности, что амплитуда возмущения **U** убывает с ростом $x_3$ (за счет вязкости).

Следующие два раздела посвящены исследованию эволюции возмущения **U** в линейном приближении (т.е. поведения решений системы (2.1) при $t \to \infty$) для более сложных течений и обсуждению физических следствий. Аналогичный анализ в нестационарной задаче, описывающей эволюцию узкого "пика", сосредоточенного в окрестности одной точки, проведен ранее [12–14].

Для дальнейших вычислений удобно переписать (2.1) в виде системы уравнений относительно двух неизвестных функций – $w$ и функции $\psi(\mathbf{y}, \alpha, t)$, связанной с $u$ соотношениями $u_1 = -i\partial\psi/\partial y_2$; $u_2 = i\partial\psi/\partial y_1$ ($i\psi$ – функция тока двумерного течения **u**). Подставляя последние формулы в (2.1), делая в этих уравнениях преобразование Фурье по **y** и скалярно умножая первое уравнение на вектор $T^{-1}\mathbf{n}'$ ($\mathbf{n} = (k_2, -k_1)$, $k_j$ – двойственные переменные к $y_j$, штрих означает транспонирование), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dt} + \frac{(T^{-1}\mathbf{n}, AT^{-1}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, T^{-1}\mathbf{n})}\tilde{\psi} + \frac{(\mathbf{a}, T^{-1}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, T^{-1}\mathbf{n})}\tilde{w} = -\nu(\mathbf{k}, T\mathbf{k})\tilde{\psi} \tag{2.4}$$

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dt} + (\mathbf{b}, T^{-1}\mathbf{n})\tilde{\psi} = -\nu(\mathbf{k}, T\mathbf{k})\tilde{w}, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2)$$

Здесь $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$ и $\tilde{w}(\mathbf{k})$ – преобразования Фурье функций $\psi(\mathbf{y})$ и $w(\mathbf{y})$ соответственно. Пусть $\tilde{\psi}(\mathbf{k},\ \alpha,\ t)$, $\tilde{w}(\mathbf{k},\ \alpha,\ t)$ – решение системы (2.4) с начальными условиями

$$\tilde{w}|_{t=0} = \tilde{w}_0(\mathbf{k},\alpha); \quad \tilde{\psi}|_{t=0} = \tilde{\psi}_0(\mathbf{k},\alpha) \quad (\tilde{\mathbf{u}}_0 = \tilde{\psi}_0\mathbf{n}) \tag{2.5}$$

Тогда решение системы (2.1) с начальными условиями (1.12) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{y},\alpha,t) &= -i \left\| \begin{matrix} \partial/\partial y_2 \\ -\partial/\partial y_1 \end{matrix} \right\| \frac{1}{2\pi}\int e^{i(\mathbf{k},\mathbf{y})}\tilde{\psi}(\mathbf{k},\alpha,t)d^2\mathbf{k} \\ w(\mathbf{y},\alpha,t) &= \frac{1}{2\pi}\int e^{i(\mathbf{k},\mathbf{y})}\tilde{w}(\mathbf{k},\alpha,t)d^2\mathbf{k} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Таким образом, определение эволюции возмущения $\mathbf{U}$ сводится к решению системы (2.4) и последующему вычислению интегралов (2.6).

**3. Течения с прямолинейными линиями тока. Взаимодействие продольной и поперечной компонент скорости в следе.** *Потоки с постоянным направлением.* Рассмотрим внешний поток вида $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (0, 0, V_0(x_1, x_2))$. Его линии тока – прямые, параллельные оси $x_3$, причем скорость движения жидких частиц меняется от линии к линии. В качестве кривой $\gamma$ выберем линию тока $x_1 = x_2 = 0$, в качестве плоскости $\Gamma$ – плоскость $x_3 = 0$. Пусть $S_j^0 = x_j$; тогда, очевидно, $S_j(\mathbf{x}) = x_j$. Элементарные вычисления дают

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{y},\mathbf{x}) &= \frac{V_0(\mathbf{x}_\perp)}{4\pi\nu x_3}\int \mathbf{u}_0(\mathbf{y}')\exp\left[-\frac{V_0}{4\nu x_3}(\mathbf{y}-\mathbf{y}')^2\right]d^2\mathbf{y}' \\ w(\mathbf{y},\mathbf{x}) &= \frac{V_0(\mathbf{x}_\perp)}{4\pi\nu x_3}\int w_0(\mathbf{y}')\exp\left[-\frac{V_0}{4\nu x_3}(\mathbf{y}-\mathbf{y}')^2\right]d^2\mathbf{y}' - \\ &-\frac{1}{2}\int_0^{x_3} dz \int_{R^2} d^2\mathbf{y}' \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{y}',\mathbf{x}_\perp,z),\nabla(V_0^2))}{4\pi\nu(x_3-z)}\exp\left[-\frac{V_0(\mathbf{y}-\mathbf{y}')^2}{4\nu(x_3-z)}\right] \quad \mathbf{x}_\perp = (x_1,x_2) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Последнее слагаемое описывает влияние поперечных компонент скорости ($\mathbf{u}$) в следе на продольную ($w$). Это влияние – ускорение или замедление струи – связано с тем, что на различных линиях тока внешнего потока $\mathbf{V}$ скорость движения жидких частиц различна. Именно из (3.1) видно, что поперечные циркуляции в направлении увеличения скорости движения жидких частиц $((\mathbf{u}, \nabla)V_0^2 > 0)$ замедляют струю, а циркуляции в направлении уменьшения этой скорости $((\mathbf{u}, \nabla)V_0^2 < 0)$ ее ускоряют. Отметим, что все возмущение затухает при $x_3 \to \infty$ за счет вязкости, причем, поскольку $(\nabla_y, \mathbf{u}_0) = 0$, поперечная составляющая $u$ скорости убывает как $1/x_3^2$.

*Плоско-параллельные течения с переменным направлением.* Пусть внешний поток имеет вид $\mathbf{V} = (V_1(x_3), V_2(x_3), 0)$. Линии тока – прямые в горизонтальных плоскостях $x_3 = \mathrm{const}$; направление течения меняется от плоскости к плоскости. Пусть $\Gamma$ – плоскость, проходящая через ось $x_3$ и пересекающая плоскость $x_3 = 0$ по прямой, ортогональной вектору $\mathbf{V}(0)$. Уравнения этой плоскости имеют вид $x_3 = \alpha_1$, $\mathbf{x}_\parallel = \mathbf{W}(\alpha_1)\alpha_2$, где $\mathbf{x}_\parallel = (x_1, x_2)$, $\mathbf{W}(x_3) = (V_2(x_3), -V_1(x_3))$. В качестве линии тока $\gamma$ выберем прямую $\mathbf{x} = \mathbf{V}(0)t$, а в качестве $S_j^0$ – функции $S_1^0 = \mathbf{V}^2(\alpha_1)\alpha_2$; $S_2^0 = \alpha_1$. Траектории поля $V$, выпущенные из плоскости $\Gamma$, имеют вид $\mathbf{x}_\parallel = \mathbf{V}_\parallel(\alpha_1)t + \mathbf{W}(\alpha_1)\alpha_2$, $x_3 = \alpha_1$. Вычисления приводят к следующему виду решения первого уравнения из (2.4):

$$\tilde{\psi}(k,\alpha,t) = \tilde{\psi}_0(k,\alpha)\frac{[k_1(\mathbf{V}_\parallel,\mathbf{W}')t + k_2 + \alpha_2 k_1(\mathbf{V},\mathbf{V}')]^2 + \mathbf{V}^2k_1^2}{[k_2 + \alpha_2 k_1(\mathbf{V},\mathbf{V}')]^2 + \mathbf{V}^2k_1^2}\times$$

$$\times\exp\left(-\nu\left\{\mathbf{V}^2k_1^2t+\frac{1}{3k_1(\mathbf{V}_{\|},\mathbf{W}')}((k_1\alpha_2(\mathbf{V},\mathbf{V}')+k_2+k_1(\mathbf{V}_{\|},\mathbf{W}')t)^3-(k_1\alpha_2(\mathbf{V},\mathbf{V}')+k_2)^3)\right\}\right)$$

Путем несложных, но громоздких оценок интегралов (2.6) можно показать, что поперечные составляющие возмущения

$$\mathbf{U}_{\perp}=\sum_{i,j=1}^{2}(T^{-1})_{ij}u_i(\nabla S_j)=O\frac{1}{\sqrt{t}}\quad\text{при}\quad t\to\infty$$

Итак, возмущение убывает при $t\to\infty$ медленнее, чем для течений с постоянным направлением, т.е. изменение направления течения препятствует вязкому затуханию.

Наконец, рассмотрим взаимодействие продольной и поперечной компонент скорости для таких течений. Уравнение для $w$ имеет вид

$$\dot{w}-\nu D^2w=-(\mathbf{u},T^{-1}\mathbf{b})=-\frac{(\mathbf{V},\mathbf{V}')}{\mathbf{V}^2}u_2=-U_3\frac{\partial}{\partial x_3}\ln|\mathbf{V}|$$

Таким образом, если поперечные циркуляции в струе направлены в сторону увеличения $|\mathbf{V}|$, то струя замедляется, а если в сторону уменьшения – ускоряется, точно так же, как и в случае внешних потоков с постоянным направлением.

**4. Винтовой поток. Накачка энергии в след. Аналог условия неустойчивости Релея.** Рассмотрим эволюцию ламинарного следа во внешнем потоке вида

$$\mathbf{V}=\omega(r)\left(\mathbf{e}_z+\frac{r}{r_0}\mathbf{e}_{\varphi}\right)=\left(-\frac{\omega}{r_0}x_2,\frac{\omega}{r_0}x_1,\omega\right),\quad r_0=\text{const}$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_{\varphi}$, $\mathbf{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат. Линии тока такого поля – винтовые линии

$$x_1=r\cos\omega(t-t_0),\quad x_2=r\sin\omega(t-t_0),\quad z=\omega t+z_0$$

($r=\text{const}$ на траекториях). Уравнение (1.6) в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial S_j}{\partial z}+\frac{1}{r_0}\frac{\partial S_j}{\partial\varphi}=0$$

имеет общее решение $S_j=\Phi_j(r,\varphi-z/r_0)$, где $\Phi_j(r,\varphi)$ – произвольные функции. Выберем эти функции зависящими только от одной переменной, так что $S_1=\Phi_1(r)$, $S_2=\Phi_2(\varphi-z/r_0)$; $\Phi_j$ – гладкие функции, $\Phi_j'\neq 0$ в $\Omega$. Вычисляя коэффициенты в уравнениях (2.4), получим

$$\frac{d}{dt}\tilde{\psi}-\frac{2k_2\omega^2r\Phi_1'}{r_0^2k^2\zeta^2}\tilde{w}=-\mathbf{k}^2\sigma\tilde{\psi},\quad\frac{d}{dt}\tilde{w}+\frac{2k_2\xi\Phi_1'}{r_0^2}\tilde{\psi}=-\mathbf{k}^2\sigma\tilde{w}\tag{4.1}$$

где

$$\xi=r\omega^2+\frac{1}{2}\omega\omega'(r_0^2+r^2),\quad\mathbf{k}^2\zeta^2=\frac{k_2^2}{\Phi_1'^2}+\frac{k_1^2}{\Phi_2'^2(r^{-2}+r_0^{-2})}$$

$$\sigma=\nu|\mathbf{k}|^{-2}(k_1^2(\Phi_1')^2+k_2^2(\Phi_2')^2(r^{-2}+r_0^{-2}))$$

Решения этой системы зависят от времени как $e^{(\pm i\lambda-\nu\mathbf{k}^2\sigma)t}$, если

$$\xi=\frac{1}{4(r^2+r_0^2)}\frac{\partial}{\partial r}(\omega^2(r^2+r_0^2)^2)>0\quad\left(\lambda=\left|\frac{4k_2^2\omega^2r(\Phi_1')^2\xi}{k^2\zeta^2r_0^4}\right|^{1/2}\right)$$

и как $e^{(\pm\lambda-\nu k^2\sigma)t}$, если

$$\frac{\partial}{\partial r}(\omega^2(r^2+r_0^2)^2)<0 \tag{4.2}$$

Пусть выполнено неравенство (4.2). Исследуем поведение при $t\to\infty$ возмущения $\mathbf{u}(\mathbf{y},\alpha,t)$. Решая систему (4.1) и отбрасывая слагаемые, содержащие $e^{-(\lambda+\nu k^2\sigma)t}$, получим

$$\mathbf{u}=\frac{1}{4\pi}\int\begin{pmatrix}k_2\\-k_1\end{pmatrix}e^{\lambda t-\nu k^2\sigma t}\left(\tilde{\psi}_0(\mathbf{k})+\frac{\beta\tilde{w}_0}{|\mathbf{k}|}(\mathbf{k})\right)e^{i(\mathbf{k},\mathbf{y})}d^2\mathbf{k},\quad \beta=\sqrt{\frac{r\omega^2}{\zeta^2|\xi|}}$$

Рассмотрим для простоты поведение возмущения на оси следа, т.е. при $\mathbf{y}=0$. Переходя в последнем интеграле к полярным координатам $\rho$, $\theta$, заменяя $\rho\to z=\rho\sqrt{\nu\sigma t}$, разлагая $\tilde{\psi}_0(z/\sqrt{\nu\sigma t})$, $\tilde{w}_0(z\sqrt{\nu\sigma t})$ по формуле Тейлора и вычисляя в старших слагаемых интеграл по $dz$, получим

$$\mathbf{u}(0)=\frac{1}{8\pi\nu t}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\sin\theta\\-\cos\theta\end{pmatrix}\frac{\beta(\theta)}{\sigma(\theta)}e^{t\lambda(\theta)}\Bigg(\tilde{w}_0(0)+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\nu\sigma t}}\left(\frac{\partial\tilde{w}_0}{\partial k_1}(0)\cos\theta+\frac{\partial\tilde{w}_0}{\partial k_2}(0)\sin\theta\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\nu\sigma t}}\frac{\tilde{\psi}_0(0)}{\beta(\theta)}+O\left(\frac{1}{t}\right)\Bigg)\,d\theta$$

Функция $\lambda(\theta)$ имеет невырожденный максимум при $\theta=\pi/2$ и $\theta=3\pi/2$. Применяя метод Лапласа, получаем

$$\mathbf{u}(0)=\frac{C}{t^2}\frac{\partial\tilde{w}_0}{\partial k_2}(0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{\lambda_0 t}+O(t^{-5/2}e^{\lambda_0 t}),\quad t\to\infty;\quad C=\frac{\sqrt{2}\beta_0}{8\nu^{3/2}\sigma_0^{3/2}\lambda_2^{1/2}} \tag{4.3}$$

где нулевой индекс означает, что в соответствующую функцию подставлено значение $\theta=\pi/2$, $\lambda_2=\lambda_{\theta\theta}$ при $\theta=\pi/2$.

Из формулы (4.3) следует, что при выполнении условия (4.2) возмущение $U$ не только не затухает, но экспоненциально нарастает при $t\to\infty$, несмотря на наличие вязкости (отметим, что $|\nabla S_j|$ и элементы матрицы $T^{-1}$ постоянны на траекториях внешнего потока). Этот эффект – накачка энергии в струю – связан с кривизной линий тока внешнего течения; именно кривизна траекторий позволяет возмущению "черпать" энергию из внешнего потока (как уже отмечалось в разд. 3, для потоков с прямолинейными траекториями след затухает). Отметим, что при $r_0=0$ условие (4.2) в точности совпадает с критерием неустойчивости Релея (см., например, [13–16]) – условием, гарантирующим экспоненциальный рост трехмерного коротковолнового возмущения в двумерном радиально-симметричном потоке $\mathbf{V}=r\omega e_\varphi$. Конечно, здесь речь идет не об обычной устойчивости (по Ляпунову или в линейном приближении), так как рассматриваемая задача стационарна. В то же время эффект роста следа вдоль траектории похож на неустойчивость; возможно, он указывает на "нерегулярное" устройство множества стационарных точек в фазовом пространстве динамической системы Навье–Стокса.

Формула (4.3) указывает еще на одно явление в криволинейных следах: продольные компоненты скорости порождают поперечные (в прямолинейных потоках наблюдался только обратный эффект, см. разд. 3). При этом в винтовом потоке сильнее всего растет компонента $u_1$ – проекция возмущения на радиальное направление. Таким образом, при удалении от обтекаемого тела след вытягивается вдоль оси цилиндра, на котором лежит винтовая траектория внешнего потока.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Маслов В.П.* Когерентные структуры, резонансы и асимптотическая неединственность для уравнений Навье – Стокса при больших числах Рейнольдса // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41. № 6. С. 19–35.
2. *Маслов В.П.* Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987. 408 с.
3. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966. 424 с.
4. *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* Проблемы нелинейной оптики. М.: ВИНИТИ, 1964. 295 с.
5. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Взаимодействие трех волн с учетом эффектов удвоения частот // Изв. вузов. Физика. 1986. Т. 29. № 3. С. 3–23.
6. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Об уравнениях типа Кадомцева – Погуце для токамака и областей с произвольной симметрией // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 1. С. 83–90.
7. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Быстроосциллирующие асимптотические решения уравнений магнитной гидродинамики в приближении токамака // Теорет. и мат. физика. 1992. Т. 92. № 2. С. 879–895.
8. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Трехмасштабное разложение решений уравнений магнитной гидродинамики и уравнения Рейнольдса для токамака // Теорет. и мат. физика. 1994. Т. 98. № 2. С. 297–311.
9. *Maslov V.P., Omel'yanov G.A.* Fluctuation-generated tokamak pinch instabilities // Russ. J. Math. Physics. 1994. V. 2. N 4. P. 463–485.
10. *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* Нелинейные винтовые возмущения плазмы в токамаке // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 2. С. 575–589.
11. *Пустоватов В.Д., Шафранов В.Д.* Равновесие плазмы и устойчивость плазмы в стеллараторах // Вопросы теории плазмы. Энергоатомиздат. 1987. № 15. С. 146–291.
12. *Доброхотов С.Ю., Шафаревич А.И.* Параметрикс и асимптотика локализованных решений уравнений Навье – Стокса в $R^3$, линеаризованных на гладком течении // Мат. заметки. 1992. Т. 51. № 1. С. 72–82.
13. *Доброхотов С.Ю., Шафаревич А.И.* Некоторые асимптотические решения линеаризованных уравнений Навье – Стокса // Мат. заметки. 1993. Т. 53. № 1. С. 25–35.
14. *Шафаревич А.И.* Поведение при $t \to \infty$ быстро убывающих асимптотических решений линеаризованных уравнений Навье – Стокса // Мат. заметки. 1994. Т. 55. № 6. С. 124–145.
15. *Rayleigh J.W.S.* On the dynamics of revolving fluids // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1917. V. 93, P. 148–154.
16. *Bayly B.J.* Three-dimensional centrifugal-type instabilities in inviscid two-dimensional flows // Physics of Fluids. 1988. V. 31. N 1. P. 56–64.



Москва

Поступила в редакцию
8.I.1997