УДК (531.36, 681.037):62–50

© 1998 г. В.И. Матюхин

МЕТОД МЕДЛЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА

Решается задача синтеза управления манипулятором с деформируемыми звеньями [1–5][1]. Для описания движения системы используются уравнения Рауса [6, 7]. Переменными служат обобщенные координаты, скорости и импульсы рассматриваемой механической системы. Строится закон управления, который зависит только от обобщенных координат и импульсов системы (и не зависит от обобщенных скоростей). Его особенность состоит в том, что переменные, от которых он зависит, являются медленными. Это будет иметь место и в случае, когда жесткость звеньев манипулятора достаточно высока и обобщенные скорости содержат высокочастотные составляющие.

Обычно закон управления манипуляционным роботом имеет форму обратной связи, содержащей обобщенные координаты и скорости рассматриваемой механической системы [1–5]. При высокой жесткости звеньев обобщенные скорости манипулятора оказываются быстрыми переменными (содержат высокочастотные составляющие). В процессе измерения таких сигналов и реализации соответствующего управляющего сигнала возникают затруднения, связанные с инерционностью и другими неидеальностями устройств системы управления манипулятором [8–10].

Идея решения проблемы связана с учетом того факта, что напряжения в сечениях деформируемых звеньев являются внутренними силами механической системы, поэтому существуют переменные ее состояния, которые не будут быстрыми, даже если внутренние силы будут достаточно велики. Такой переменной служит, например, скорость центра масс звена манипулятора. Медленными переменными будут также импульсы механической системы. Именно в связи с этим в работе для описания динамики манипулятора используются уравнения Рауса [6, 7].

Особенность работы также в том, что необходимо построить универсальный закон управления манипулятором, т.е. такой единый закон управления, который обеспечит устойчивость не одного заданного режима движения манипулятора, а целого класса режимов. Речь идет по существу о стабилизации практически всех возможных (реализуемых) режимов движения, которые отвечают динамике рассматриваемого объекта управления [8–10].

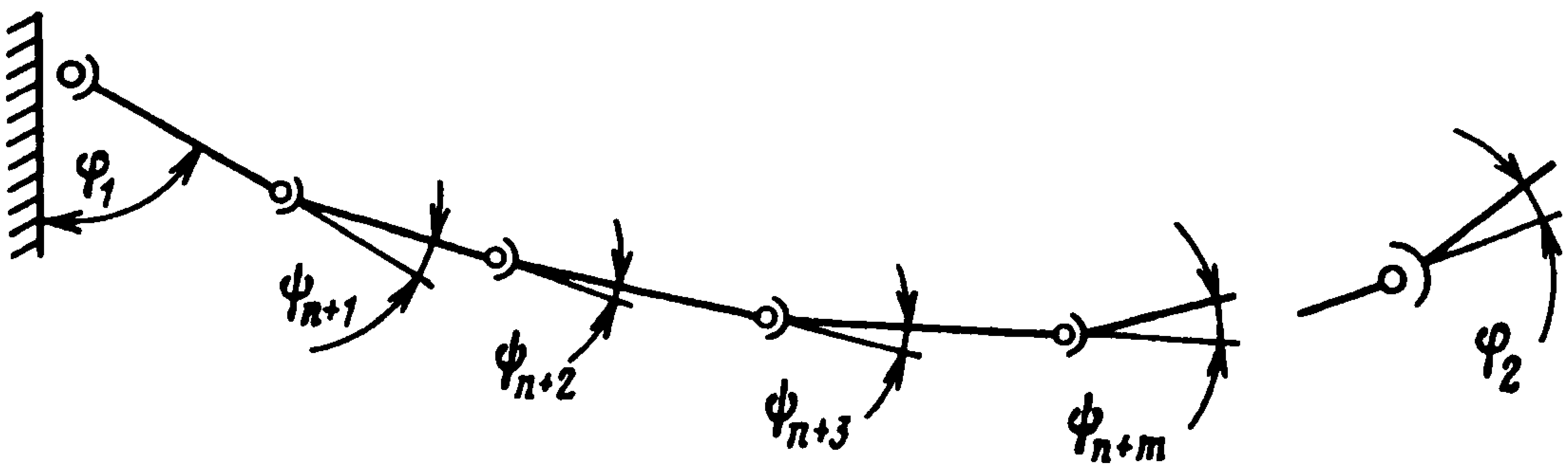
1. Динамика объекта управления. Каждое деформируемое звено манипулятора рассматривается как система (цепь) из m ($m \geqslant 1$) абсолютно твердых тел, связанных $m-1$ шарнирами (фигура) [2, 3, 5]. Считается, что деформации сосредоточены в шарнирах цепи. Шарниры цепи имеют общий вид и могут описывать изгиб, растяжение, кручение и другие виды деформаций звена манипулятора. Число $m-1$ разбиений звена, а также выбор места и формы сечений произвольны, поэтому такая конечномерная динамическая модель позволяет достаточно полно учесть основные динамические свойства упругого манипулятора. Было дано [5] сопоставление конечномерных динамических моделей механических систем типа введенной и распределенных моделей.

[1] См. также: *Матюхин В.И.* Движение упругого звена манипулятора как абсолютно твердого тела // Тезисы докл. на VI Международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". М.: Институт проблем управления, 1996. С. 123.

В качестве обобщенных координат манипулятора выберем состояния $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ его межзвенных шарниров, а также состояния $\psi_{n+1}, \ldots, \psi_N$ формальных шарниров, введенных для описания сосредоточенных деформаций звеньев манипулятора

$$q=(q_1,\ldots,q_N)=(\varphi,\psi),\quad \varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n),\quad \psi=(\psi_{n+1},\ldots,\psi_N) \tag{1.1}$$

$N = nm$, деформации отсутствуют при $\psi_{n+1} = \psi_{n+2} = \ldots = \psi_N = 0$ (фигура). В дальнейшем примем, что индексы α, β пробегают значения $1, 2, \ldots, n$, i, j, k – значения $n + 1$, $n + 2, \ldots, N$, r, s – значения $1, 2, \ldots, N$.



Через T обозначим кинетическую энергию манипулятора

$$T=\tfrac{1}{2}\sum_{r,s} a_{rs}(q)\dot{q}_r\dot{q}_s \tag{1.2}$$

$(Q_r + M_r)$ – обобщенные силы, соответствующие (1.1). Компоненты $Q_r = Q_r(q,\dot{q},t)$ могут описывать, в частности, силы веса звеньев манипулятора. Для простоты изложения будем полагать, что $Q_r(q,\dot{q},t)$, $a_{rs}(q)$ и $a_{rs}^{-1}(q)$ ограничены вместе с производными

$$|Q_s(q,\dot{q},t)|\le C,\quad |a_{rs}(q)|\le C,\ldots,\quad C=\mathrm{const},\quad 0<C<\infty \tag{1.3}$$

Это предположение представляется нестеснительным в динамике механических систем [1–10].

Через M_α обозначим управляющие силы; M_i – силы, обусловленные напряжениями в деформируемых звеньях манипулятора, причем

$$|M_\alpha|\le H_\alpha,\qquad H_\alpha=\mathrm{const}>0 \tag{1.4}$$

$$|M_i|\le H_i,\qquad H_i=\mathrm{const}>0 \tag{1.5}$$

M_α имеют смысл управляющих сил (управлений), которые в каждом межзвенном шарнире создаются приводами манипулятора. Для описания физических ограничений на величины возможных интенсивностей управляющих сил введены неравенства (1.4). Напряжения M_i соответствуют деформациям ψ_i звеньев манипулятора. Неравенства (1.5) введены для описания физических ограничений на величины допустимых напряжений, например, для обеспечения деформаций звеньев манипулятора в упругом диапазоне.

Обобщенные силы M_i, описывающие напряжения в системе, зададим в форме [11–13]

$$M_i = M_i^1(\psi,\dot{\psi})=-k_i\dot{\psi}_i-k_i\lambda_i\psi_i,\quad k_i,\lambda_i=\mathrm{const}>0 \tag{1.6}$$

Слагаемые $-k_i\lambda_i\psi_i$ в (1.6) могут иметь физический смысл изгибающего момента упругих сил; слагаемые $-k_i\dot{\psi}_i$ позволяют учесть свойство вязкости процесса деформирования и описывают соответствующие силы внутреннего трения [11–13].

Динамику введенной механической системы можно описать уравнениями Лагранжа второго рода [1–10]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r}=Q_r(q,\dot{q},t)+M_r \tag{1.7}$$

При высокой жесткости звеньев манипулятора ($k_i \gg 1$ в (1.6)) обобщенные силы M_i в системе (1.7) и ускорения $\ddot{q}_r$ могут быть велики, и обобщенные скорости $\dot{q}_r$ будут быстрыми переменными. Это следует из системы (1.7), записанной в развернутом виде [1–10].

Поэтому далее от обобщенных скоростей $\dot{q}_\alpha = \varphi_\alpha$ перейдем к новым переменным – обобщенным импульсам рассматриваемой механической системы (1.7) [9, 10]

$$p_\alpha=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}=\sum_\beta a_{\alpha\beta}\varphi_\beta+\sum_i a_{\alpha i}\dot{\psi}_i \tag{1.8}$$

и будем использовать эквивалентные уравнения Рауса [6, 7]

$$\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial R}{\partial \varphi_\alpha}+Q_\alpha+M_\alpha,\quad \dot{\varphi}_\alpha=\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \tag{1.9}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\psi}_i}-\frac{\partial R}{\partial \psi_i}=-Q_i-M_i,\quad R=\sum_\alpha p_\alpha\dot{q}_\alpha-T$$

(R – функция Рауса). Напряжения M_i не входят в первую группу уравнений (1.9). Это означает, что p_α – медленные переменные (не являются быстрыми переменными).

2. Постановка задачи. Цель управления системой (1.9) состоит в том, чтобы каждая ее координата q_r изменялась в соответствии с некоторой заданной программой $q_r^*(t)$, т.е. [1–5, 8–10]

$$q_r=q_r^*(t) \tag{2.1}$$

Цель управления манипулятором должна отвечать его динамике, т.е. функции (2.1) должны удовлетворять уравнениям движения (1.9) и ограничениям (1.4), (1.5), т.е. [8–10]

$$\dot{p}_\alpha^*\equiv-\frac{\partial R^*}{\partial \varphi_\alpha}+Q_\alpha^*+M_\alpha^*,\quad \dot{\varphi}_\alpha^*\equiv\frac{\partial R^*}{\partial p_\alpha} \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R^*}{\partial \dot{\psi}_i}-\frac{\partial R^*}{\partial \psi_i}\equiv-Q_i^*-M_i^*;\quad |M_r^*(t)|\leqslant H_r$$

Функции $M_r^*=M_r^*(t)$ в соотношениях (2.2) рассматриваются как некоторые непрерывные управления, соответствующие $q=q^*(t), M_i^*(t)=-k_i(\dot{\psi}_i^*(t)+\lambda_i\psi_i^*(t))$. Множество всех таких функций $q = q^*(t)$ обозначим через Ф. Введем также

$$\Phi_\eta^c=(q^*(t)\in\Phi\colon\ |M_r^*(t)|\leqslant H_r-\eta,\ |q_r^*(t)|\leqslant c,\ |\dot{q}_r^*(t)|\leqslant c) \tag{2.3}$$

где η, c – некоторые постоянные, $0<\eta\leqslant H_r$, $0<c<\infty$ (далее для простоты $c = C$).

Заметим, что введение Φ_η^c связано с упрощением приводимых ниже доказательств утверждений. Постоянная η в (2.3) может быть выбрана малой, а c – большой. В этом случае множество Φ_η^c содержит по существу все возможные движения манипулятора, при которых скорости принципиально ограниченны, а силы M_r не выходят на ограничения (1.4), (1.5). В этом смысле множества Ф и Φ_η^c оказываются достаточно близкими.

Таким образом, речь далее будет идти о достаточно широком подмножестве Φ_η^c множества Φ, которое можно рассматривать в качестве множества всех возможных движений манипулятора как динамической системы (1.9), (1.4), (1.5) [8–10].

Задача синтеза законов управления системой (1.9) понимается как задача построения функциональной обратной связи вида

$$M_\alpha = M_\alpha^1(\varphi, p, \varphi^*, p^*, t) \tag{2.4}$$

которая не содержит быстрых переменных системы (1.9). Обратная связь (2.4) должна быть такова, чтобы при замене $q^* \to \overline{q}^*$ была обеспечена стабилизация нового движения $\overline{q}^* = \overline{q}^*(t)$ замкнутой системы (1.9), (2.4), если $\overline{q}^*(t) \in \Phi_\eta^c$. Такой закон управления (2.4) будем далее называть универсальным [6–8]. Задача в том, чтобы построить такой универсальный закон управления вида (2.4), который обеспечит устойчивость практически всех возможных движений $q^*(t) \in \Phi_\eta^c$ системы (1.9).

3. Синтез закона управления. С учетом известной схемы [8–10] для управления механической системы (1.9) будем использовать закон управления (2.4), например, вида (общий случай – в (3.4))

$$M_\alpha = -H_\alpha \operatorname{sign}[p_\alpha - p_\alpha^*(t) + \lambda_\alpha(\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^*(t))] \tag{3.1}$$

Звездочкой помечены значения переменных Рауса p_α, φ_α на заданном движении (2.1) $q = q^*(t)$ системы (1.9). При учете соотношений (1.6), (3.1) систему (1.9) запишем в виде

$$\dot p_\alpha = -\frac{\partial R}{\partial \varphi_\alpha} + Q_\alpha - H_\alpha \operatorname{sign}(p_\alpha - p_\alpha^* + \lambda_\alpha(\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^*)), \quad \dot\varphi_\alpha = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot\psi_i} - \frac{\partial R}{\partial \psi_i} = -Q_i + k_i(\dot\psi_i + \lambda_i \psi_i) \tag{3.2}$$

Теорема. Пусть в системе (3.2) выполнены неравенства

$$\lambda \leqslant \lambda_\alpha \leqslant \Lambda, \quad \overline{\lambda} \leqslant \lambda_i \leqslant \overline{\Lambda}, \quad k_i \geqslant K \tag{3.3}$$

где $K, \lambda, \Lambda, \overline{\lambda}, \overline{\Lambda}$ – некоторые положительные постоянные. Тогда любое движение $q^*(t)$ из Φ_η^c будет экспоненциально устойчивым движением системы (3.2).

Доказательство теоремы дано в разд. 4–6.

В теореме обоснована принципиальная возможность управления движением упругого манипулятора с использованием в качестве переменных его обобщенных импульсов. Основное свойство этих переменных в том, что они не содержат высокочастотных компонент, которые могут возникнуть при высокой жесткости манипулятора. В этом случае открывается возможность в качестве исполнительных и измерительных устройств системы использовать обычные приводы и датчики. Закон управления (3.1) универсален, поскольку согласно теореме обеспечивает устойчивость любого движения из Φ_η^c, т.е. практически всех возможных (реализуемых) движений рассматриваемого объекта управления [8–10].

Теорема будет справедливой и в общем случае, когда закон управления (3.1) и соотношения (1.6), описывающие напряжения в системе, имеют следующий общий вид:

$$M_\alpha = -H_\alpha \operatorname{sign}(p_\alpha - p_\alpha^* + f_\alpha(\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^*)), \quad M_i = F_i(\dot\psi_i - f_i(\psi_i)) \tag{3.4}$$

Относительно функций f_α, F_i, f_i в (3.4) достаточно следующих слабых предположений.

Система

$$p_\alpha - p_\alpha^* + f_\alpha(\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^*) = 0, \quad \dot\psi_i + f_i(\psi_i) = 0 \tag{3.5}$$

имеет экспоненциально устойчивое движение $q^* = (\varphi^*(t), \psi^*(t))$ (см. частный случай (4.1)), для функций f_α справедливы неравенства типа (3.3)

$$-\Lambda x \leqslant -f_\alpha(x) \leqslant -\lambda x \quad \text{при } x > 0, \quad -\lambda x \leqslant -f_\alpha(x) \leqslant -\Lambda x \quad \text{при } x < 0 \tag{3.6}$$

и аналогичные неравенства для F_i, f_i. Таким образом, вместо сильного предположения (1.6) о линейной структуре напряжений звеньев манипулятора вводятся достаточно слабые общие предположения (3.6) об их свойствах.

Рассматриваемая задача примыкает к кругу задач, связанных с устойчивостью положений равновесия механических систем [14]. Усиление условий, полученных ранее [14], до условий (3.3) связано с рассмотрением систем общего вида (необязательно консервативных), а также – с обеспечением устойчивости широкого множества движений манипулятора (необязательно отвечающих положению равновесия).

Сделаем замечание о получении сигналов p_α, используемых в законе управления (3.1). Непосредственное прямое измерение этих сигналов в общем случае неизвестно. Однако величины p_α можно представить как функцию (1.8) $p_\alpha = p_\alpha(q, \dot q)$, аргументы $q_r, \dot q_r$ которой являются сигналами, обычно доступными измерениям. Основная особенность функции $p_\alpha = p_\alpha(q, \dot q)$ в том, что она не может содержать высокочастотных компонент, несмотря на то, что ее аргументы $\dot q_r$ могут их содержать.

Это свойство может быть положено в основу метода специальной обработки (способов оценки, наблюдения) измеряемых сигналов $(q_r, \dot q_r)$ с целью повышения точности выходного сигнала $p_\alpha = p_\alpha(q, \dot q)$. В связи с этим обратим внимание на следующую деталь. Именно, коэффициенты $a_{rs} = a_{rs}(q)$ в выражении (1.8) для импульсов могут изменяться в зависимости от выбора схемы описания деформаций упругого звена. Произвольными здесь являются факторы: число m элементов, на которые разбито звено манипулятора, размеры элементов, расположение и тип шарниров, соединяющих эти элементы. Этот произвол может быть также использован с целью повышения точности оценки выходного сигнала $p_\alpha = p_\alpha(q, \dot q)$.

4. Схема доказательства теоремы. Следуя изложенному ранее подходу [8–10], рассмотрим движение системы (3.2) в режиме вида

$$p_\alpha = p_\alpha^* - \lambda_\alpha(\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^*), \quad \dot\psi_i = \dot\psi_i^* - \lambda_i(\psi_i - \psi_i^*) \tag{4.1}$$

(в общем случае (4.1) имеет вид (3.5)). Система (4.1) в отклонениях $\xi_r = q_r - q_r^*$ при учете (1.8) имеет вид

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta}\dot\xi_\beta = -\lambda_\alpha\xi_\alpha - \sum_r (a_{\alpha r} - a_{\alpha r}^*)\dot q_r^* + \sum_i a_{\alpha i}\lambda_i\xi_i, \quad \dot\xi_i = -\lambda_i\xi_i \tag{4.2}$$

Лемма. Движение $\xi = 0$ системы (4.2) будет экспоненциально устойчивым, если $q^*(t) \in \Phi_\eta^c$ и выполнены неравенства (3.3) вида

$$\lambda \leqslant \lambda_\alpha \tag{4.3}$$

Доказательство леммы дано в разд. 5.

Основная идея, таким образом, состоит в том, чтобы обосновать возможность движения системы (3.2) в режиме (4.1). В этом случае из устойчивости заданного движения $q = q^*(t)$ системы (4.1) будет следовать устойчивость $q = q^*(t)$ в системе (3.2), т.е. будет следовать теорема.

Покажем, что систему (3.2) можно вывести на движение (4.1). С этой целью запишем (3.2) в следующем развернутом виде [6, 7]:

$$\dot{p}_\alpha = O_\alpha - H_\alpha \operatorname{sign}(p_\alpha - p_\alpha^* + \lambda_\alpha(\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^*))$$

$$\dot{\varphi}_\alpha = \sum_\beta b_{\alpha\beta}(q)\left(p_\beta - \sum_i a_{\beta i}(q)\dot{\psi}_i\right) \tag{4.4}$$

$$\sum_j A_{ij}\ddot{\psi}_j = O_i - \sum_\alpha \dot{p}_\alpha \gamma_{\alpha i} - k_i(\dot{\psi}_i + \lambda_i \psi_i)$$

где

$$O_\alpha = Q_\alpha - \frac{\partial R}{\partial q_\alpha}, \quad O_i = -\sum_\alpha p_\alpha \dot{\gamma}_{\alpha i} - \sum_j \dot{A}_{ij}\dot{q}_j + Q_i - \frac{\partial R}{\partial q_i} \tag{4.5}$$

$$A_{ij}(q) = a_{ij}(q) - \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} a_{\alpha j} a_{\beta j} \tag{4.6}$$

$$\det a \neq 0, \quad a = \| a_{\alpha\beta}(q) \|, \quad b = \| b_{\alpha\beta}(q) \| = a^{-1} \tag{4.7}$$

$$\gamma_{\alpha i} = \sum_\beta b_{\alpha\beta}(q) a_{\beta i}(q) \tag{4.8}$$

Введем отклонения движения системы (4.4) от режима (4.1)

$$\chi_\alpha = \Delta p_\alpha + \lambda_\alpha \xi_\alpha, \quad \chi_i = \dot{\xi}_i + \lambda_i \xi_i, \quad \Delta p_\alpha = p_\alpha - p_\alpha^*(t), \quad \xi_r = q_r - q_r^*(t) \tag{4.9}$$

На этой основе введем общую меру отклонения движения системы (4.4) от режима (4.1), характеризующуюся функциями вида

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_\alpha \chi_\alpha^2, \quad G = \frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}(q)\chi_i \chi_j \tag{4.10}$$

Π и G – компоненты вектор-функции Ляпунова [15], они являются положительно определенными по переменным χ_α и χ_i соответственно. Для G это следует из неравенств [6, 7]

$$r_1^2 \sum_i \chi_i^2 \leq G \leq r_2^2 \sum_i \chi_i^2 \tag{4.11}$$

где $0 < r_1 \leq r_2 < \infty$, что следует из предположений (1.3).

Основной момент доказательства связан с установлением равенств $\Pi = 0$, $G = 0$. Отсюда при учете (4.10), (4.11) непосредственно вытекают равенства $\chi_i = 0$. Это означает, что система (4.4) движется в режиме (4.1). Движение $q = q^*$ системы (4.1) (по лемме) экспоненциально устойчиво. Из этого следует, что движение $q = q^*$ системы (4.4) будет также экспоненциально устойчивым, т.е. следует теорема. Для обоснования равенств $\Pi = 0$, $G = 0$ строятся производные функций Ляпунова Π, G в силу рассматриваемой системы (4.4), устанавливается их убывание на ее движениях до нуля (разд. 6).

5. Доказательство леммы. Лемма следует из устойчивости движения $\xi = 0$ системы (4.2) по переменным $\xi_\alpha = 0$. Для доказательства этого факта используем функцию Ляпунова

$$g = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}(q)\xi_\alpha \xi_\beta \tag{5.1}$$

положительно определенную по ξ_α [6, 7].

Движение системы (4.4) будем рассматривать в области

$$|q_r| \leq c, \quad |\dot{q}_r| \leq c \tag{5.2}$$

которая аналогична (2.3). Из (1.3) следует, что в области (5.2) справедливы неравенства [6–10]

$$\rho_1^2 \sum_\alpha \xi_\alpha^2 \leqslant g \leqslant \rho_2^2 \sum_\alpha \xi_\alpha^2, \quad \rho_i = \text{const}, \quad 0 < \rho_1 \leqslant \rho_2 < \infty \tag{5.3}$$

аналогичные (4.11).

Из выражения для производной функции g в силу системы (4.2) следует оценка

$$\dot{g} \leqslant -\sum_\alpha \lambda \xi_\alpha^2 + \sum_\alpha |\xi_\alpha| \left[\frac{1}{2} \sum_\beta |\dot{a}_{\alpha\beta}||\xi_\beta| + \sum_r |\Delta a_{\alpha r}||\dot{q}_r^*| + \sum_i |a_{\alpha i}|\overline{\Lambda}|\xi_i| \right] \tag{5.4}$$

$$\lambda \leqslant \lambda_\alpha \leqslant \Lambda, \quad \overline{\lambda} \leqslant \lambda_i \leqslant \overline{\Lambda} \tag{5.5}$$

Из (1.3) следуют оценки

$$|a_{\alpha i}(q)| \leqslant C, \quad \Delta a_{\alpha i} = a_{\alpha i}(q^* + \xi) - a_{\alpha i}(q^*) = \sum_s \frac{\partial a_{\alpha i}}{\partial q_s} \xi_s \leqslant \sum_s C|\xi_s| \tag{5.6}$$

При учете соотношений (2.3), (5.2), (5.6) из (5.4) получим

$$\dot{g} \leqslant -\sum_\alpha \lambda \xi_\alpha^2 + S\left[\frac{1}{2} SCNc + (S + \overline{S})CNc + \overline{S}C\overline{\Lambda} \right] \tag{5.7}$$

$$S = \sum_\alpha |\xi_\alpha|, \quad \overline{S} = \sum_j |\xi_j|$$

Из неравенства (5.7) следует неравенство

$$\dot{g} \leqslant -\frac{\lambda g}{\rho_2^2} + \frac{n\sqrt{g}}{\rho_1} \left[\frac{n\sqrt{g}}{\rho_1} \frac{3}{2} CNc + \overline{S}C(Nc + \overline{\Lambda}) \right] \tag{5.8}$$

если учесть неравенства (5.3) вида $-\sum_\alpha \xi_\alpha^2 \leqslant -g/\rho_2^2$, $|\xi_\alpha| \leqslant \sqrt{g}/\rho_1$.

Пусть число δ задает начальные условия в системе (4.4)

$$|\xi_s(0)| \leqslant \delta, \quad |\dot{\xi}_s(0)| \leqslant \delta \tag{5.9}$$

Тогда из неравенства (5.8) при учете (4.2) следует неравенство

$$\dot{g} \leqslant -\frac{\lambda g}{\rho_2^2} + \frac{n\sqrt{g}}{\rho_1} \left[\frac{n\sqrt{g}}{\rho_1} \frac{3}{2} CNc + C(Nc + \overline{\Lambda}) \sum_i \delta \exp(-\lambda_i t) \right] \tag{5.10}$$

При учете условия (см. условие (4.3) леммы)

$$-\lambda^1 = -\frac{\lambda}{\rho_2^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{n}{\rho_1} \right)^2 CNc < 0 \tag{5.11}$$

неравенство (5.10) запишем в виде

$$\sqrt{g} \left[\frac{d}{dt} (2\sqrt{g}) + \lambda^1 \sqrt{g} - b\exp(-\overline{\lambda} t) \right] \leqslant 0 \tag{5.12}$$

Движение $g(t) = 0$ системы (5.12) (в классе неотрицательных абсолютно непрерывных функций $g(t)$) экспоненциально устойчиво [8–10]. Отсюда при учете (5.3) следует экспоненциальная устойчивость движения $\xi = 0$ системы (4.2) и по переменным ξ_α. Лемма доказана.

6. Доказательство теоремы. Производные функций Ляпунова П и G на движениях системы (4.4) (эквивалентной (3.2)), принимают вид

$$\dot{\Pi} = \sum_{\alpha} \chi_\alpha (\Delta O_\alpha + \Delta M_\alpha + \lambda_\alpha \dot{\xi}_\alpha)$$

$$\dot{G} = \sum_i \chi_i \left\{ \frac{1}{2} \sum_k \dot{A}_{ik} \chi_k + \left[-\sum_k \Delta A_{ik} \ddot{q}_k^* + \Delta O_i - \sum_\alpha \Delta \dot{p}_\alpha \gamma_{\alpha i}^* + \right. \right. \tag{6.1}$$

$$\left. \left. -\sum_\alpha \dot{p}_\alpha \Delta \gamma_{\alpha i} + \Delta M_i \right] + \sum_k A_{ik} \lambda_k \dot{\xi}_k \right\}$$

При построении (6.1) учтены соотношения (4.9) и тождества (2.2) вида (4.4). Система (6.1) записывается далее в виде

$$\dot{\Pi} = \sum_{\alpha} \chi_\alpha (\Delta O_\alpha + \lambda_\alpha \dot{\xi}_\alpha) + \sum_\alpha \chi_\alpha \Delta M_\alpha$$

$$\dot{G} = \sum_i \chi_i \left\{ \sum_k \dot{A}_{ik} \chi_k / 2 + \left[-\sum_k \Delta A_{ik} \ddot{q}_k^* + \Delta O_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \dot{\xi}_\alpha \gamma_{\alpha i}^* + \right. \right. \tag{6.2}$$

$$\left. \left. -\sum_\alpha (O_\alpha + M_\alpha) \Delta \gamma_{\alpha i} \right] + \sum_k A_{ik} \lambda_k \dot{\xi}_k \right\} + \sum_i \chi_i \Delta M_i + \sigma$$

где

$$\sigma = -\sum_i \chi_i \sum_\alpha (\Delta \dot{p}_\alpha + \lambda_\alpha \dot{\xi}_\alpha) \gamma_{\alpha i}^* \tag{6.3}$$

и учтены уравнения $\dot{p}_\alpha = O_\alpha + M_\alpha$ системы (4.4).

Правые части системы (6.2) далее мажорируются в области (5.2) при учете (2.3). При этом используются оценки типа (5.6)

$$|\dot{A}_{ik}| < CNc, \quad |\ddot{q}_k^*| \leqslant C, \quad |\gamma_{\alpha i}^*| \leqslant C, \quad |O_\alpha + M_\alpha| \leqslant C + H_\alpha, \quad |A_{ik}| \leqslant C$$

$$\Delta O_\alpha \leqslant C(n\sqrt{\Pi} + (N-n)\sqrt{G} + S(1+\Lambda) + \bar{S}(1+\bar{\Lambda}))$$

вытекающие из гладкости функций из (6.2) (что следует из (1.3) при учете (4.5)–(4.8)). Учитываются соотношения $\chi_\alpha \Delta M_\alpha \leqslant -\eta |\chi_\alpha|$, $\chi_i \Delta M_i = -k_i \chi_i^2$, вытекающие из (1.6), (3.1), (4.9), (2.3). Используются соотношения (4.10) и неравенства (4.11). Это позволяет из системы (6.2) построить систему неравенств

$$\dot{\Pi} \leqslant \sqrt{\Pi}\{a^1\sqrt{\Pi} + a^2\sqrt{G} + a^2 S + a^3 \bar{S}\} - \eta\sqrt{2\Pi} \tag{6.4}$$

$$\dot{G} \leqslant \sqrt{G}\{b^1\sqrt{\Pi} + b^2\sqrt{G} + b^3 S + b^4 \bar{S}\} - G\frac{k}{r^2} + \sigma$$

где $a_i, b_i \geqslant 0$ – постоянные, $0 < k \leqslant k_i$.

При использовании функции Ляпунова (5.1), а также $z = \sum_k \xi_k^2 / 2$, система (6.4) примет вид

$$\dot{\Pi} \leqslant -\sqrt{\Pi}\{\eta\sqrt{2} - A^1\sqrt{\Pi} - A^2\sqrt{G} - A^3\sqrt{g} - A^4\sqrt{z}\}$$

$$\dot{G} \leqslant B^1 \Pi - \left(\frac{k}{r^2} - B^2\right) G + B^3 g + B^4 z + \sigma \tag{6.5}$$

где учитываются оценки $S \leqslant \sqrt{gn} / \rho_1$, $\bar{S} \leqslant \sqrt{2z}(N-n)$, а также $2\sqrt{\Pi G} \leqslant \Pi + G$.

Для производных $\dot{g}, \dot{z}$ в силу (4.4) справедливы неравенства

$$\dot{g} \leqslant \left\{ -\lambda \frac{g}{\rho_2^2} + Cn \frac{\sqrt{g}}{\rho_1} \left[\frac{2}{3} nNc \frac{\sqrt{g}}{\rho_1} + (Nc + \overline{\Lambda}) \overline{S} \right] \right\} + \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \xi_\beta \chi_\alpha$$

$$\dot{z} = -\sum_k \lambda_k \xi_k^2 + \sum_k \xi_k \xi_k \leqslant -2\overline{\lambda} z + \sum_k \sqrt{2z} \frac{\sqrt{G}}{r_1} \tag{6.6}$$

где использована оценка (5.8) для $\dot{g}$ в силу (4.4) при ее движении в режиме (4.1), где $\chi_\alpha \equiv 0$, $\chi_k \equiv 0$. При учете (6.6) система (6.5) принимает вид

$$\begin{gathered}
\dot{\Pi} \leqslant -\sqrt{\Pi} \{ n\sqrt{2} - A^1 \sqrt{\Pi} - A^2 \sqrt{G} - A^3 \sqrt{g} - A^4 \sqrt{z} \} \\
\dot{G} \leqslant B^1 \Pi - \left(\frac{k}{r^2} - B^2 \right) G + B^3 g + B^4 z + \sigma \\
\dot{g} \leqslant C^1 \Pi - (\lambda g / \rho_2^2 - C^3) g + C^4 z, \quad \dot{z} \leqslant D^2 G - (2\overline{\lambda} - D^4) z
\end{gathered} \tag{6.7}$$

Покажем далее, что движение $\Pi = 0$, $G = 0$, $g = 0$, $z = 0$ системы (6.7) экспоненциально устойчиво. Отсюда следует экспоненциальная устойчивость движения $q = q^*(t)$ системы (4.4), что утверждается в теореме. Ниже показано, что при малых начальных отклонениях

$$\Pi(0) \leqslant \delta, \ G(0) \leqslant \delta, \ g(0) \leqslant \delta, \ z(0) \leqslant \delta \tag{6.8}$$

переменная Π системы (6.7) через достаточно малое время $t = t_1$ достигнет нуля и далее останется нулем;

движение $\Pi = 0$, $G = 0$, $g = 0$, $z = 0$ системы (6.7) при $\sigma \equiv 0$ является экспоненциально устойчивым (так можно подобрать параметры k, λ, Λ, $\overline{\lambda}$, $\overline{\Lambda}$);

экспоненциальная устойчивость системы (6.7) при $\sigma \neq 0$ также будет иметь место (при учете свойств этого слагаемого), откуда будет следовать обоснование экспоненциальной устойчивости движения $q = q^*(t)$ системы (4.4).

В соответствии с этим рассмотрим движение (6.7) в области

$$\Pi \leqslant \delta_1, \ G \leqslant \delta_1, \ g \leqslant \delta_1, \ z \leqslant \delta_1 \tag{6.9}$$

где δ_1 удовлетворяет неравенству

$$\eta\sqrt{2} - A^1 \sqrt{\delta_1} - A^2 \sqrt{\delta_1} - A^3 \sqrt{\delta_1} - A^4 \sqrt{\delta_1} \geqslant \eta\sqrt{2}/2 \tag{6.10}$$

Тогда система (6.7) может быть записана в форме

$$\dot{\Pi} \leqslant -\sqrt{\Pi}\eta\sqrt{2}/2, \quad \dot{G} \leqslant \gamma, \quad \dot{g} \leqslant \gamma, \quad \dot{z} \leqslant \gamma, \quad \gamma = \text{const} \geqslant 0 \tag{6.11}$$

Для Π в (6.11) будут выполнены соотношения [8–10]

$$\begin{gathered}
\sqrt{\Pi(t)} \leqslant \sqrt{\Pi(0)} - t\eta \sqrt{2}/4 \quad \text{при} \quad t \leqslant t_1, \quad \sqrt{\Pi(t)} \equiv 0 \quad \text{при} \quad t > t_1 \\
t_1 = 4\sqrt{\Pi(0)} / (\eta\sqrt{2})
\end{gathered} \tag{6.12}$$

При учете (6.12) систему (6.11) можно представить в виде

$$\sqrt{\Pi(t)} \leqslant \sqrt{\Pi(0)}, \quad G(t) \leqslant G(0) + \gamma t, \quad g(t) \leqslant g(0) + \gamma t, \ldots \tag{6.13}$$

Выберем δ в (6.8) из условия $G(2t_1) \leqslant \delta_1, \ldots$, т.е. из условия $\delta + 2\gamma(4\sqrt{\delta}/(\eta\sqrt{2})) \leqslant \delta_1$. Тогда значения переменных G, g и z при $t \leqslant 2t_1$ еще не выйдут из области (6.9). Это означает, что при $t \leqslant 2t_1$ система (6.11) будет двигаться в силу исходной системы (6.7).

Покажем, что и далее движение $\Pi = 0, G = 0, g = 0, z = 0$ системы (6.7) не выйдет из области (6.9) и, более того, будет экспоненциально устойчивым. Для этого систему (6.7) при $t = t_1 + 0$ с учетом (6.12) запишем в виде

$$\Pi \equiv 0, \quad \dot{G} \leqslant -(k / r_2^2 - B^2)G + B^3 g + B^4 z + \sigma$$

$$\dot{g} \leqslant -(\lambda g / \rho_2^2 - C^3)g + C^4 z, \quad \dot{z} \leqslant D^2 G - (2\overline{\lambda} - D^4)z \tag{6.14}$$

Рассмотрим далее сумму

$$Y = \mu^2 G + \mu g + z, \quad \mu = \text{const} > 0 \tag{6.15}$$

и ее производную в силу системы (6.14)

$$\dot{Y} \leqslant \mu^2(-(k / r_2^2 - B^2)G + B^3 g + B^4 z + \sigma) +$$

$$+\mu(-(\lambda g / \rho_2^2 - C^3)g + C^4 z) + D^2 G - (2\overline{\lambda} - D^4)z \tag{6.16}$$

Для коэффициентов системы (6.16) за счет выбора ее параметров $k, \lambda, \Lambda, \overline{\lambda}, \overline{\Lambda}$ будут справедливы неравенства

$$\mu^2(k / r_2^2 - B^2) > D^2, \quad \mu(\lambda / \rho_2^2 - C^3) > \mu^2 B^3, \quad 2\overline{\lambda} - D^4 > \mu C^4 + \mu^2 B^4 \tag{6.17}$$

Это устанавливается, например, при $\Lambda = 2\lambda, \overline{\Lambda} = 2\overline{\lambda}, \ \overline{\lambda} > 4D^4, \ \lambda / \rho_2^2 - C^3(2\overline{\lambda}) = C^3(2\overline{\lambda})$ и достаточно больших μ, $1/K$. При учете (6.17) неравенство (6.16) можно записать в виде

$$\dot{Y} \leqslant -EY + \mu^2\sigma, \quad E = \text{const} > 0 \tag{6.18}$$

т.е. обосновать устойчивость системы (6.18) (откуда следует устойчивость системы (6.7)) при $\sigma = 0$.

Покажем далее, что система (6.18) будет устойчива и при $\sigma \neq 0$. Для этого рассмотрим общее решение неравенства (6.18)

$$Y(t) \leqslant [Y(t_1) + \exp(E(\tau - t_1))I(\tau)|_{t_1}^{t} + \int_{t_1}^{t} E\exp(E(\tau - t_1))I(\tau)d\tau]\exp(-E(t - t_1)) \tag{6.19}$$

где при учете (6.3)

$$I(t) = \int_{t_1}^{t} \mu^2\sigma d\tau = \int_{t_1}^{t} \mu^2\left[-\sum_i \sum_\alpha \chi_i \gamma^*_{\alpha_i}(\Delta\dot{p}_\alpha + \lambda_\alpha\dot{\xi}_\alpha)\right]d\tau \tag{6.20}$$

При $t \geqslant t_1$ справедливо тождество

$$I(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1 \tag{6.21}$$

устанавливаемое при интегрировании по частям, причем $dv = \sum\limits_\alpha (\Delta\dot{p}_\alpha + \lambda_\alpha\dot{\xi}_\alpha)d\tau$.

Учитывается, что производные функций χ_i и $\overset{*}{\gamma}_{\alpha_i}$ ограничены из предположений (1.3) в области (2.3), (5.2), а $v \equiv 0$, при $t \geqslant t_1$, что следует из соотношений (6.12).

При учете (6.21) неравенство (6.19) запишем в виде

$$Y(t) \leqslant Y(t_1)\exp(-E(t - t_1)), \quad t \geqslant t_1 \tag{6.22}$$

Отсюда следует, что движение $\Pi = 0, \ G = 0, g = 0, z = 0$ системы (6.7) экспоненциально устойчиво, т.е. экспоненциально устойчивым является движение $q = q^*(t)$ исходной системы (4.4). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00039).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора // Известия АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 5. С. 142–152.
2. *Лавровский Е.К., Формальский А.М.* Управление упругим звеном манипулятора при помощи обратной связи по положению и скорости груза // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 51–60.
3. *Дунская Н.В., Пятницкий Е.С.* Метод синтеза управления упругими системами // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 2. С. 194–196.
4. *Zhu S.O., Lewis F.L., Hunt L.R.* Robust stabilization of the internal dynamics of flexible robots without measuring the velocity of the deflection // Proc. 33rd Conf. on Decision and Control. Lake Buena Vista. 1994. P. 1811–1816.
5. *Болграбская И.А.* Обоснование исследования динамических свойств упругого стержня на основе модели системы связанных твердых тел // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 346–350.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
7. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
8. *Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 67–81.
9. *Матюхин В.И.* Устойчивость движения манипуляционных роботов в режиме декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 1989. № 3. С. 33–44.
10. *Матюхин В.И.* Сильная устойчивость движений механических систем // Автоматика и телемеханика. 1996. № 1. С. 37–56.
11. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
13. *Амензаде Ю.А.* Теория упругости. М.: Изд-во Высш. шк., 1971. 287 С.
14. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. 128 С.
15. *Матросов В.М.* Об устойчивости движения // ПММ 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 885–895.

Москва

Поступила в редакцию
18.III.1997