УДК 531.36:62–50

© 1998 г. И.Ф. Борецкий, О.Р. Каюмов

ГЛОБАЛЬНО УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Рассматриваются натуральные лагранжевы системы, моделируемые механизмами с кинематической структурой дерева. Приводятся достаточные условия глобальной управляемости, т.е. возможности допустимым воздействием перевести систему за конечное время из любого исходного фазового состояния в любое заданное. Например, показана глобальная управляемость многозвенного маятника в горизонтальной плоскости (вне поля тяготения) при действии только ограниченного внешнего момента, приложенного к первому звену.

Известны необходимые и достаточные условия управляемости линейных систем [1]. Однако в нелинейном случае такого рода свойства могут быть оценены, по-видимому, лишь путем использования специфики конкретных классов объектов.

Были получены [2] достаточные условия глобальной (во всем фазовом пространстве) управляемости натуральных лагранжевых систем, которые характеризовались сильным взаимодействием звеньев, когда частичной диссипацией (например, трением в одном из шарниров) можно было стабилизировать всю систему в единственном положении устойчивого равновесия.

Ниже расширяется перечень глобально управляемых объектов за счет некоторых систем твердых тел, допускающих стационарные движения.

1. Основные определения. В продолжение работы [2] рассматриваются натуральные лагранжевы системы, т.е. объекты с симметричной относительно обращения времени ($t \to -t$) функцией Лагранжа $L(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\bullet}) = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\bullet T}\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\bullet} - B(\mathbf{q})$, где $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n)^T$ – вектор конфигурации, $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ – матрица инерции (положительно определена), $B(\mathbf{q})$ – скалярный потенциал, ограниченный снизу: $B(\mathbf{q}) \geqslant 0$, $B(\mathbf{0}) = 0$. Движение описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^{\bullet}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in U \subset R^n \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)^T$ – вектор управлений из наперед заданной ограниченной области U, содержащей внутреннюю точку $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

При свободном движении ($\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$) интеграл энергии системы $E(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\bullet}) = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\bullet T}\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\bullet} + B(\mathbf{q})$ может быть периодической функцией некоторых ("угловых") координат $q_i (i = 1, 2, ..., r)$. Они берутся в накрывающем пространстве $R^r \times R^{(n-r)}$, соответствующем конфигурационному $M = T^r \times R^{(n-r)}$, где T^r – r-мерный тор. При этом используется запись $\mathbf{q} \in M$. Аналогично определяется фазовое пространство $TM = T^r \times R^{(2n-r)}$, так что $(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\bullet}) \in TM$.

Если обратной связи $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\bullet})$ соответствует сепаратрисная поверхность в TM, движение по которой к особой точке происходит за бесконечное время, то поверхность обозначается $\Omega(\mathbf{u}(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\bullet}))$. Множество положений равновесия $\zeta_0 = \{(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\bullet})$:

$\mathbf{q}^{\bullet} = 0, \partial B/\partial \mathbf{q} = \mathbf{0}, \mathbf{u} = \mathbf{0}\}$ непустое; число компонент этих многообразий полагаем конечным.

Далее для любой скалярной функции $V(\mathbf{y})$ введены обозначения: $Q_V = \{\mathbf{y}: \|\partial V/\partial \mathbf{y}\| = 0\}$ – множество критических точек; $E_V = \{c: c = V(\mathbf{y})\}$ – множество значений; $H_c(V(\mathbf{y})) = \{y: V(\mathbf{y}) \leqslant c, c \in E_V\}$ – области, ограниченные поверхностями равного уровня функции.

Определения стабилизируемости и управляемости используются в традиционном смысле [3]:

Определение 1. Система (1.1) называется стабилизируемой на $P \subset TM$ по входам $u_i (i = 1, 2, ..., m)$, если ее можно перевести из каждой точки $(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\bullet}) \in P$ в сколь угодно малую окрестность состояния $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ при условии $u_j \equiv 0$ $(j = m + 1, m + 2, ..., n)$.

В частном случае это может быть стабилизируемость по скалярному (одному) входу $u_i (i = 1, 2, ..., n)$.

Определение 2. Система (1.1) называется локально управляемой по входам $u_i (i = 1, 2, ..., m)$ в окрестности состояния равновесия $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) \in TM$, если $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ – внутренняя точка открытого множества начальных точек, из которых каждая может быть переведена в $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ за конечное время допустимым управлением при $u_k \equiv 0$ $(k = m + 1, m + 2, ..., n)$.

Известно [3], что локальную управляемость достаточно обнаружить в линейном приближении, применяя ранговый критерий [1].

Определение 3. Система (1.1) называется глобально управляемой в TM по входам $u_i (i = 1, 2, ..., m)$, если ее можно перевести из произвольного состояния $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1^{\bullet})$ в любое наперед заданное $(\mathrm{q}_2, \mathrm{q}_2^{\bullet})$ за конечное время с помощью допустимых управлений при условии $u_k \equiv 0$ $(k = m + 1, m + 2, ..., n)$.

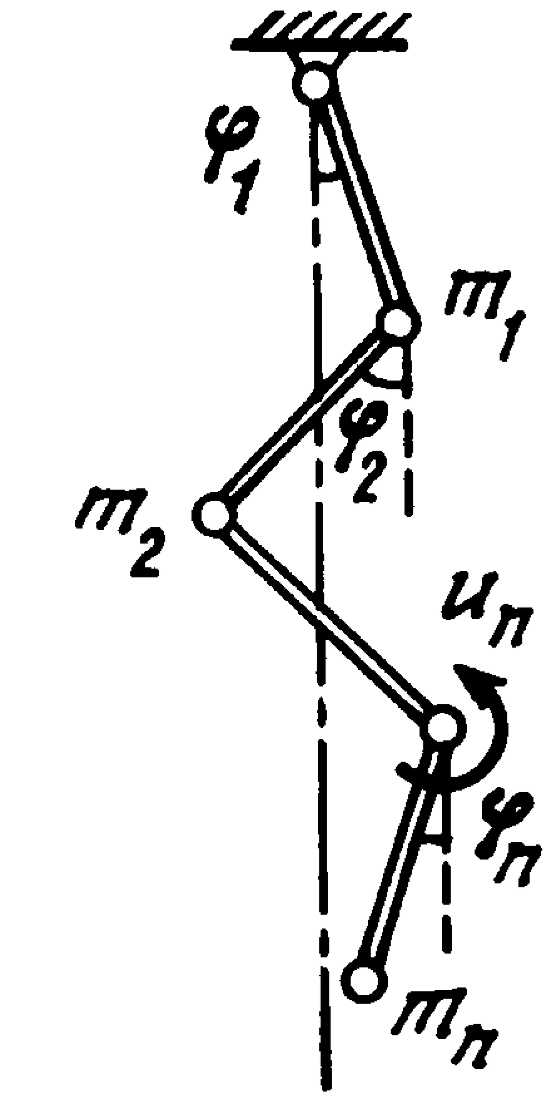
Сформулированные в [2] достаточные условия глобальной управляемости объектов (1.1), когда число управляющих воздействий меньше числа степеней свободы, были основаны на свойствах стабилизируемости, локальной управляемости систем и их симметрии относительно обращения времени. Для доказательства стабилизируемости привлекался прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. Известная теорема Барбашина – Красовского [4] была распространена на случай цилиндрического фазового пространства [5] введением нового понятия – связной функции Ляпунова.

Определение 4. Непрерывная вместе со своими частными производными однозначная функция $V(\mathbf{y})$ $(\mathbf{y} \in T^k \times R^m)$, определенно-положительная в смысле Ляпунова $(V(\mathbf{y}) \geqslant 0, V(\mathbf{y}) = 0 \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0})$ называется функцией Ляпунова на $T^k \times R^m$.

Определение 5. Функция Ляпунова $V(\mathbf{y})$ $(\mathbf{y} \in T^k \times R^m)$ называется связной функцией Ляпунова (СФЛ) на области $P \subset T^k \times R^m$, если каждое множество $P \cap H_c(V(\mathbf{y}))$ связано в P.

Были доказаны также [5] некоторые достаточные условия связности функций Ляпунова, одно из которых может быть сформулировано в следующем виде: если множество $Q_V \backslash \mathbf{0}$ для функции Ляпунова $V(\mathbf{y})$ $(\mathbf{y} \in P)$, заданной на компактном многообразии $P \subset T^k \times R^m$, состоит из конечного числа изолированных точек, в каждой из которых матрица $\partial^2 V/\partial \mathbf{y}^2$ не является положительно-определенной, то $V(\mathbf{y})$ – СФЛ на P. Иными словами, если на компакте P функция $V(\mathbf{y})$ не вырождена (т.е. является функцией Морса [6]) и имеет только один локальный минимум (в точке $\mathbf{y} = \mathbf{0}$,), то $V(\mathbf{y})$ – СФЛ на P.

Пример 1. В вертикальной плоскости расположена система из последовательно скрепленных цилиндрическими шарнирами n жестких стержней (фиг. 1). Все углы φ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ отмеряются звеньями маятника от вертикальной оси, точка подвеса закреплена. Пусть стержни условно невесомы, а их массы сосредоточены в шарнирах. Потенциальная энергия $B(\varphi)=\sum b_i(1-\cos\varphi_i)$, где $b_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, является СФЛ на T^n.



Фиг. 1

Один из результатов работы [2] приведем в следующем виде, для простоты ограничиваясь случаем одномерного управления.

Утверждение 1. Пусть в системе (1.1) потенциал $B(\mathbf{q})$ – связная функция Ляпунова на M, а множества $H_c(B(\mathbf{q}))$ компактны.

1°. Если при свободном движении ($u \equiv 0$) система не допускает частного решения $q_j^{\bullet} \equiv 0$ (исключая положения равновесия), то она стабилизируема по входу u_j $(j \in 1, 2, ..., n)$ на многообразии $TM \setminus \Omega(u_j)$.

2°. Если при этом в окрестностях всех точек $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) \in \zeta_0$ имеет место локальная управляемость по тому же входу u_j, то система (1.1) глобально управляема при действии только u_j.

Свойства потенциала $B(\mathbf{q})$ позволяют применить для анализа асимптотической устойчивости в большом [5] СФЛ $E(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\bullet})$ – полную энергию системы. Роль остальных условий, перечисленных в утверждении 1, следующая:

1) гладкая обратная связь $u_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\bullet}) \in U$ (взятая так, чтобы $\operatorname{sign} u_j = -\operatorname{sign} q_j^{\bullet}$) гарантирует достижение за конечное время достаточно малой окрестности одной из точек покоя $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) \in \zeta_0$;

2) если $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{0}$, то локальная управляемость позволит "преодолеть застревание в этой окрестности" (т.е. осуществить переход в область $TM \setminus \Omega(u_j)$ на меньший уровень значения энергии) и продолжить стабилизацию $u_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\bullet})$. Если же $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$, то локальная управляемость гарантирует попадание в $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ за конечное время.

Сформулируем завершение логической цепи утверждения 1.

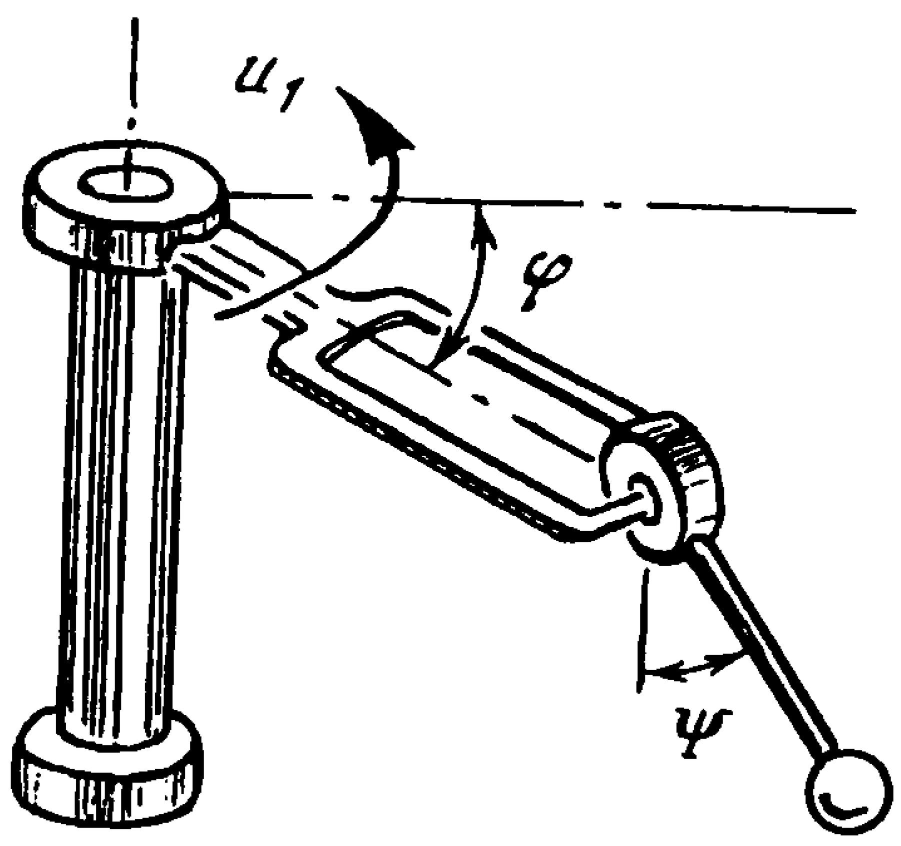
Замечание. Если допустимым управлением u_j натуральную лагранжеву систему (1.1) можно перевести за конечное время из любого начального состояния $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1^{\bullet}) \in TM$ в положение $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, она глобально управляема по входу u_j $(j \in 1, 2, ..., n)$.

Действительно, инвариантность уравнений (1.1) относительно замены $\mathbf{q}^{\bullet} \to -\mathbf{q}^{\bullet}$, $t \to -t$ позволяет любому управляемому процессу $u_j(t)$: $(\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2^{\bullet}) \to (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ (при $t \to [0, T]$) поставить в соответствие на том же интервале t "симметричное" движение $u_j(T-t)$: $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \to (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2^{\bullet})$, а значит, построить поэтапный переход $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1^{\bullet}) \to (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \to (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2^{\bullet})$.

В примере 1 из утверждения следует глобальная управляемость n-звенного маятника в вертикальной плоскости (без трения) при действии единственного ограниченного момента $|u_n| \leqslant a_n$ в последнем шарнире, т.е. такой объект можно [2] перевести, например, из нижнего положения равновесия в неустойчивое верхнее за ограниченное время с помощью сколь угодно малого момента u_n.

2. Системы со стационарными движениями. Использованные в утверждении 1 достаточные условия глобальной управляемости применимы к объектам "с сильным взаимодействием звеньев", когда частичной диссипацией (например, трением в одном из шарниров) можно стабилизировать всю систему, т.е. привести ее в сколь угодно малую окрестность множества ζ_0 состояний покоя.

В рассмотренных далее примерах достаточные условия не выполняются (в части 1°), однако системы глобально управляемы. Их особенность – наличие стационарных движений, когда система вращается вокруг неподвижной оси как одно отвердевшее тело. Возможность асимптотически приблизиться к такому состоянию и локальная управляемость в его окрестности при имеющихся управляющих воздействиях позволят переводить объект из любого начального состояния в требуемое положение относительного покоя с заданным значением угловой скорости и угла поворота всего объекта. С учетом симметрии относительно обращения времени ($t \to -t$) это означает глобальную управляемость.



Фиг. 2

Пример 2. Система с двумя степенями свободы (фиг. 2) расположена во вращающейся вертикальной плоскости в поле тяготения. Невесомые стержни, длины которых l_1 и l_2 соединены цилиндрическими шарнирами без трения. В шарнирах сосредоточены массы m_1 и m_2. Ограниченное управление $|u_1| \leqslant a$ представляет собой внешний момент, приложенный к первому звену. Угол φ измеряется в горизонтальной плоскости, а угол ψ – от вертикали.

Система не удовлетворяет условиям утверждения 1, так как существуют частные решения $\varphi^{\bullet} \equiv 0$ при $\psi^{\bullet} \neq 0$.

Используя безразмерные параметры $\varkappa = m_1/m_2$, $\mu = l_1/l_2$, $u = u_1/(m_2 g l_2)$ и время $\tau = t\sqrt{g/l_2}$, получим приведенный лагранжиан

$$L = \tfrac{1}{2}\varphi^{\bullet 2}[\varkappa\mu^2 + (\mu + \sin\psi)^2] + \tfrac{1}{2}\psi^{\bullet 2} - B(\psi), \quad B(\psi) = 1 - \cos\psi$$

а также уравнения движения

$$\varphi^{\bullet\bullet}[\varkappa\mu^2 + (\mu + \sin\psi)^2] + 2\varphi^{\bullet}\psi^{\bullet}\cos\psi(\mu + \sin\psi) = u$$

$$\psi^{\bullet\bullet} - \varphi^{\bullet 2}\cos\psi(\mu + \sin\psi) + \sin\psi = 0$$

При $u \equiv 0$ система допускает стационарное вращение $\varphi^{\bullet} = \omega$, $\psi^{\bullet} = 0$, $\psi = \psi_0$, причем величины ω и ψ_0 связаны формулой

$$\omega^2 = \sin\psi_0 / [\cos\psi_0(\mu + \sin\psi_0)] \tag{2.1}$$

Введем переменные $\gamma = \varphi - \omega t$, $\beta = \psi - \psi_0$ и вектор $\mathbf{x} = (\gamma^{\bullet}, \beta, \psi^{\bullet})^T$. В линейном приближении в окрестности состояния $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ система имеет вид

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{G} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -c_2/c_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ c_2 & -c_3 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Vmatrix} 1/c_1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$c_1 = \varkappa\mu^2 + (\mu + \sin\psi_0)^2 > 0, \quad c_2 = 2\omega\cos\psi_0(\mu + \sin\psi_0) \neq 0$$

$$c_3 = \omega^2(\mu + \sin^3\psi_0)/\sin\psi_0$$

Так как $\det\|\mathbf{b}, \mathbf{G}\mathbf{b}, \mathbf{G}^2\mathbf{b}\| = -c_2^2/c_1^3 \neq 0$, то система локально управляема по входу u в окрестности положения относительного покоя $\varphi^{\bullet} = \omega$, $\psi^{\bullet} = 0$, $\psi = \psi_0$.

При выбранном ω уравнение (2.1) имеет два корня, один из которых удовлетворяет условию $0 < \psi_0 < \pi/2$.

Покажем, что систему можно перевести из любого начального состояния в ε – окрестность многообразия $\varphi^{\bullet} = \omega$, $\psi = \psi_0$, $\psi^{\bullet} = 0$ за конечное время.

Используя искусственный потенциал

$$B_1(\psi) = 1 - \cos\psi - \tfrac{1}{2}\omega^2[\varkappa\mu^2 + (\mu + \sin\psi)^2]$$

получим функцию Ляпунова

$$V(x) = \tfrac{1}{2}\gamma^{\bullet 2}\{\varkappa\mu^2 + [\mu + \sin(\beta + \psi_0)]^2\} + \tfrac{1}{2}\psi^{\bullet 2} + B_1(\beta + \psi_0) - B_1(\psi_0)$$

для которой производная вдоль траектории $V^{\bullet} = u\gamma^{\bullet}$. Выбирая допустимое управление u из условия $\operatorname{sign} u = -\operatorname{sign}\gamma^{\bullet}$, получим $V^{\bullet} \leqslant 0$, причем $V^{\bullet} \neq 0$ (исключая состояния относительного покоя). Согласно утверждению 1, это означает стабилизируемость системы по входу u на многообразии $TM_2 \backslash \Omega(u)$, где $x \in TM_2$, так как $V(x)$ – СФЛ на TM_2.

Возможное "застревание" системы около неустойчивых состояний относительного покоя (на $\Omega(u)$) преодолимо ввиду наличия локальной управляемости, которая также обеспечит достижение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ за конечное время.

Таким образом, из любого начального положения $(\varphi_1, \varphi_1^{\bullet}, \psi_1, \psi_1^{\bullet})$ двузвенник можно перевести в режим стационарного вращения $\varphi^{\bullet} \equiv \omega$, $\psi \equiv \psi_0$, $\psi^{\bullet} \equiv 0$. Поскольку угол $\varphi(t)$ при этом режиме меняется равномерно, система периодически будет достигать, например, состояния $(0, \omega, \psi_0, 0)$.

Покажем, что из этого состояния можно допустимым управлением попасть в точку $(0, 0, 0, 0)$.

Действительно, изменив "целевое" направление вращения ω, систему можно было перевести из любого начального положения в режим $(0, -\omega, \psi_0, 0)$, в том числе и из точки $(0, 0, 0, 0)$. Существование управляемого процесса $u(t)$: $(0, 0, 0, 0) \to (0, -\omega, \psi_0, 0)$ (при $t \in [0, T]$) гарантирует (ввиду симметрии системы (1.1) относительно обращения времени $t \to -t$) наличие "симметричной" траектории движения $u(T - t)$: $(0, \omega, \psi_0, 0) \to (0, 0, 0, 0)$. Это означает, что из любого начального положения возможен поэтапный переход: $(\varphi_1, \varphi_1^{\bullet}, \psi_1, \psi_1^{\bullet}) \to (0, \omega, \psi_0, 0) \to$ $\to (0, 0, 0, 0)$.

Таким образом, согласно замечанию в конце разд. 1, система (фиг. 2) глобально управляема при действии только одного момента u_1, ограниченного любой наперед заданной величиной a.

3. Случай n степеней свободы. Далее распространим логику предыдущих рассуждений на более общий случай.

Допустим, в системе твердых тел (1.1) координата $q_1 = \varphi$ – циклическая, т.е. $\mathbf{q} = (\varphi, \boldsymbol{\psi}^T)^T$, $\boldsymbol{\psi} \in M_1 = T^{(r-1)} \times R^{(n-r)}$, $L = {}^1/_2\, \mathbf{q}^{\bullet T}\mathbf{A}(\boldsymbol{\psi})\mathbf{q}^{\bullet} - B(\boldsymbol{\psi})$, а также $\mathbf{u} = (u_1, 0, ..., 0)^T$.

Пусть в системе возможно движение $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\varphi^{\bullet} = \omega$, $\boldsymbol{\psi}^{\bullet} = \mathbf{0}$, т.е. ее вращение как одного отвердевшего тела. Конфигурация $\boldsymbol{\psi}$ в положении относительного покоя доставляет экстремум приведенному потенциалу

$$B_1(\boldsymbol{\psi}) = B(\boldsymbol{\psi}) - \tfrac{1}{2}\omega^2 a_{11}(\boldsymbol{\psi}) + c \tag{3.1}$$

(при учете переносных сил инерции). Элемент a_{11} матрицы $\mathbf{A}(\boldsymbol{\psi})$ определяет момент инерции всей "отвердевшей" системы относительно оси вращения.

Рассмотрим случай, когда функция $B_1(\boldsymbol{\psi})$ при фиксированном значении ω имеет единственный изолированный минимум. Тогда можно выбрать постоянную c и "считывать" вектор $\boldsymbol{\psi}$ так, чтобы $B_1(\boldsymbol{\psi}) \geqslant 0$, $B_1(0) = 0$.

Введем вектор

$$\mathbf{x} = (\gamma^{\bullet},\ \boldsymbol{\psi}^T,\ \boldsymbol{\psi}^{\bullet T})^T \in R \times TM_1, \quad \gamma = \varphi - \omega t$$

Многообразие $R \times TM_1$ содержит непустое множество состояний относительного покоя:

$$\zeta_1 = \{\mathbf{x}\colon\ \gamma^{\bullet} = 0,\ \ \partial B_1 / \partial \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0},\ \ \boldsymbol{\psi}^{\bullet} = \mathbf{0},\ \ \mathbf{u} = \mathbf{0}\}$$

Полную энергию представим в виде

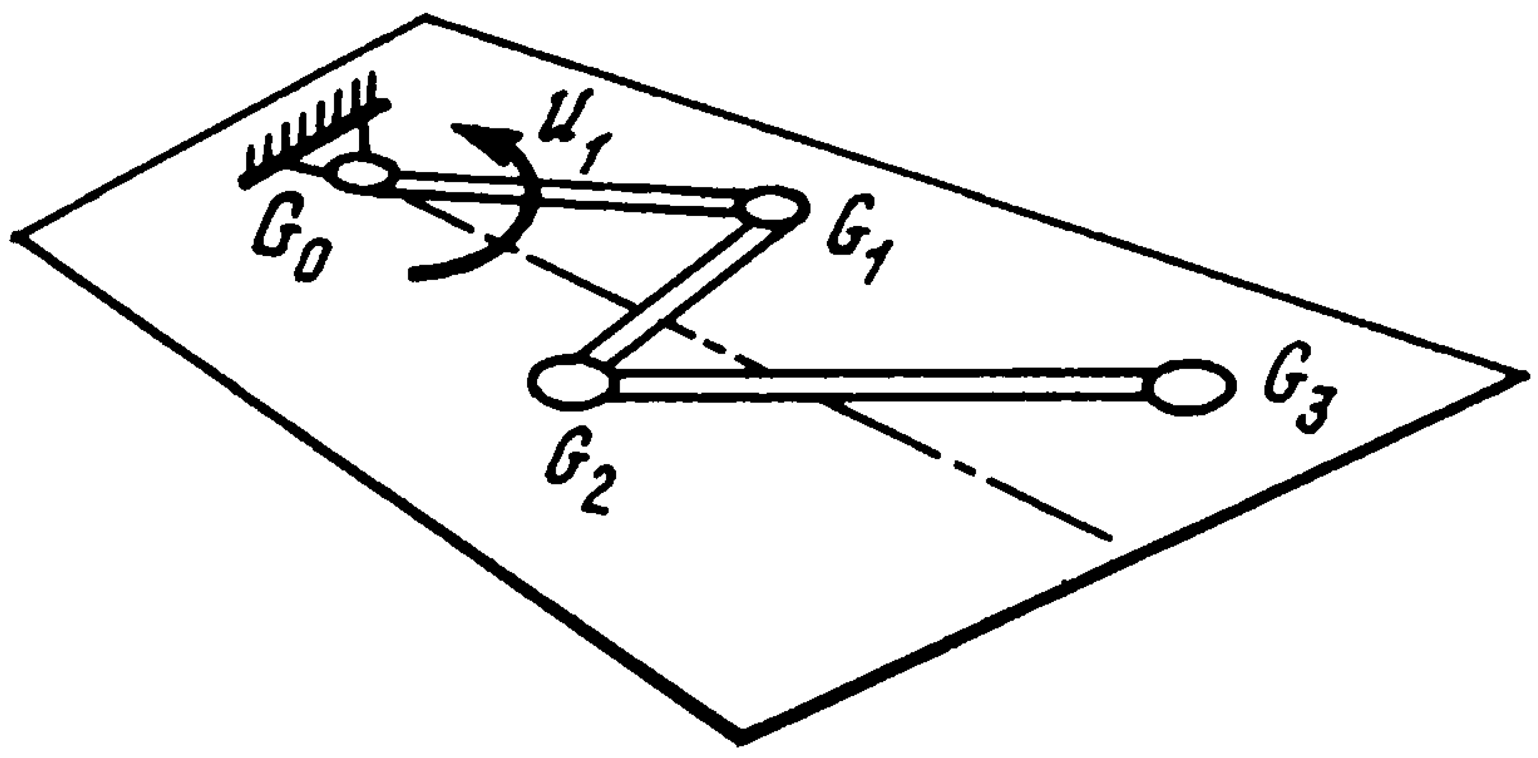
$$E(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\bullet}) = T(\mathbf{x}) + \omega p - \tfrac{1}{2}\omega^2 a_{11}(\boldsymbol{\psi}) + B(\boldsymbol{\psi})$$

$$p = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} q_i^{\bullet}, \quad T(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}(\gamma^{\bullet}, \boldsymbol{\psi}^{\bullet T})\mathbf{A}(\boldsymbol{\psi})(\gamma^{\bullet},\ \boldsymbol{\psi}^{\bullet T})^T$$

p – кинетический момент системы тел относительно оси вращения, а $T(\mathbf{x})$ – положительно определенная форма. Производные вдоль векторного поля $E^{\bullet} = \mathbf{q}^{\bullet T}\mathbf{u}$, $p^{\bullet} = u_1$, поэтому для СФЛ $V(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + B_1(\boldsymbol{\psi})$ получим $V^{\bullet} = \gamma^{\bullet} u_1$. Таким образом, выполнены условия утверждения 1, но уже для $R \times TM_1$.

Стабилизируемость по входу u_1 в относительном движении и локальная управляемость во всех окрестностях состояний относительного покоя позволят достичь точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ за конечное время. В результате можно перевести систему из любого начального положения $(\varphi_1, \varphi_1^{\bullet},\ \boldsymbol{\psi}_1^T,\ \boldsymbol{\psi}_1^{\bullet T})$ в режим стационарного вращения $\varphi^{\bullet} \equiv \omega$, где векторы $\boldsymbol{\psi} \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\psi}^{*} \equiv \mathbf{0}$, а значение угла φ периодически обращается в нуль.

Отсюда следует (аналогично рассуждениям из примера 2) наличие управляемого процесса $u_1(t)$: $(0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \to (0, -\omega, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ (при $t \in [0, T]$), а значит и ему "симметричного" движения $u_1(T-t)$: $(0, \omega, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \to (0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ (при $t \in [0, T]$). Таким образом, существует поэтапный переход из любого начального состояния $(\varphi_1, \varphi_1^\bullet, \boldsymbol{\psi}_1^T, \boldsymbol{\psi}_1^{\bullet T}) \to (0, \omega, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \to$ $\to (0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Согласно замечанию в конце разд. 1, это гарантирует глобальную управляемость системы (1.1) при действии только момента u_1. Поэтому справедливо



Фиг. 3

Утверждение 2. Пусть в системе (1.1) возможно движение $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$, $\varphi^\bullet = \omega$, $\boldsymbol{\psi}^\bullet = \mathbf{0}$, где $\mathbf{q} = (\varphi, \boldsymbol{\psi}^T)^T$, $\boldsymbol{\psi} \in M_1$. Допустим также, что приведенный потенциал $B_1(\boldsymbol{\psi})$ в виде (3.1) является СФЛ на M_1, а множества $H_c(B_1(\boldsymbol{\psi}))$ компактны. Тогда:

1) если в относительном движении $\mathbf{x} = (\gamma^\bullet, \boldsymbol{\psi}^T, \boldsymbol{\psi}^{\bullet T})^T$ (где $\mathbf{x} \in R \times TM_1$, $\gamma^\bullet = \varphi^\bullet - \omega$) при $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ в системе (1.1) отсутствуют частные решения $\gamma^\bullet \equiv 0$ (кроме состояний относительного покоя $\mathbf{x} \in \zeta_1$), эта система стабилизируема по входу u_1 в области $R \times$ $\times TM_1 \setminus \Omega(u_1)$;

2) если к тому же в окрестностях состояний $\mathbf{x} \in \zeta_1$ имеется локальная управляемость по входу u_1, то система (1.1) глобально управляема по входу u_1 на TM_1.

Пример 3. Рассмотрим n-звенный маятник (фиг. 3), расположенный в горизонтальной плоскости. Отличие от ранее рассмотренного примера 1 состоит в том, что теперь система – "вне поля тяготения". Вновь трение отсутствует, а единственный внешний ограниченный момент $|u_1| \leqslant a$ приложен к первому звену. Здесь $B(\mathbf{q}) \equiv 0$, поэтому механизм может находиться в равновесии в любой конфигурации $\mathbf{q} = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)^T$, где φ_i – углы стержней от фиксированной оси. Условия утверждения 1, накладываемые на потенциальную энергию системы, здесь заведомо не выполнены.

Полагаем, что невесомые звенья имеют длины l_i ($i = 1, 2, ..., n$), а их массы m_i сосредоточены в шарнирах. Тогда в "выпрямленной" конфигурации ($\varphi_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$) получим матрицу инерции $\mathbf{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{S}$ с элементами $s_{ij} = \left(l_i l_j \sum_{k=r}^{n} m_k \right)$, $r = \max(i, j)$, $(i, j = 1, 2, ..., n)$.

Для дальнейшего анализа удобно представить матрицу S в форме $\mathbf{S} = \mathbf{G}(\mathbf{C}^{-1})^T\mathbf{N}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}$, где $\mathbf{G} =$ $= \operatorname{diag}(l_i)$, $\mathbf{N} = \operatorname{diag}(m_i)$ ($i = 1, 2, ..., n$), а вспомогательные матрицы имеют вид

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & -1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot\ \cdot & 1 \end{Vmatrix}$$

Справедливость предлагаемого разложения проверяется непосредственным перемножением.

Обратная матрица $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{G}^{-1}$ имеет трехдиагональную структуру:

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{Vmatrix} \mu_1\lambda_1^2 & -\mu_1\lambda_1\lambda_2 & & & \mathbf{0} \\ -\mu_1\lambda_1\lambda_2 & (\mu_1+\mu_2)\lambda_2^2 & -\mu_2\lambda_2\lambda_3 & & \\ & -\mu_2\lambda_2\lambda_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & & -\mu_{n-1}\lambda_{n-1}\lambda_n \\ \mathbf{0} & & & -\mu_{n-1}\lambda_{n-1}\lambda_n & (\mu_{n-1}+\mu_n)\lambda_n^2 \end{Vmatrix}$$

$\mu_i = 1/m_i$, $\lambda_i = 1/l_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$

Далее можно сделать координату $q_1 = \varphi_1$ циклической, переходя от "абсолютных" углов φ_i (отмеряемых от неподвижной оси) к "относительным" углам между стержнями: $q_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ $(i = 2, 3, ..., n)$. Связь между векторами конфигураций задается формулой $\mathbf{q} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}$.

Обозначим $\boldsymbol{\psi} = (q_2, ..., q_n)^T \in M_1$, тогда $\mathbf{q} = (\varphi_1, \boldsymbol{\psi}^T)^T$, Лагранжиан $L = {}^1\!/_2\mathbf{q}^{\bullet T}\mathbf{A}_1(\boldsymbol{\psi})\mathbf{q}^{\bullet}$ определяется матрицей инерции $\mathbf{A}_1(\boldsymbol{\psi})$, которая связана с матрицей в "абсолютных углах" $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}) = \{s_{ij}\cos(\varphi_j - \varphi_i)\}$ условием $\mathbf{A}_1 = (\mathbf{C}^{-1})^T\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$. В результате угловой элемент $a_{11}(\boldsymbol{\psi})$ равен сумме всех элементов матрицы $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})$ (с заменой $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{q}$).

Стационарное движение $u_1 = 0, \varphi_1^{\bullet} = \omega$, $\boldsymbol{\psi}^{\bullet} = \mathbf{0}$ возможно при $\partial B_1/\partial\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$, $B_1(\boldsymbol{\psi}) = {}^1\!/_2\omega^2[a_{11}(\mathbf{0}) - a_{11}(\boldsymbol{\psi})]$. Приведенный потенциал $B_1(\boldsymbol{\psi})$ (переносных сил инерции) имеет единственный изолированный минимум в точке $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$. Из достаточного условия связности функции Ляпунова [5] (разд. 1) следует, что $B_1(\boldsymbol{\psi})$ – СФЛ на M_1.

Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{x} = (\gamma^{\bullet}, \boldsymbol{\psi}^T, \boldsymbol{\psi}^{\bullet T})^T \in R \times TM_1$, где $\gamma = \varphi - \omega t$. Многообразие $R \times \times TM_1$ содержит непустое множество $\zeta_1 = \{\mathbf{x}: \gamma^{\bullet} = 0, \partial B_1/\partial\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}^{\bullet} = \mathbf{0}, \mathbf{u} = \mathbf{0}\}$ состояний относительного покоя.

Исследуем в окрестностях точек $\mathbf{x} \in \zeta_1$ условия локальной управляемости при действии только момента u_1. Линеаризованная в окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (т.е. $\varphi^{\bullet} = \omega$, $\psi = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\psi}^{\bullet} = \mathbf{0}$) система имеет вид $\mathbf{A}_0\mathbf{q}^{\bullet\bullet} = \mathbf{B}_0\mathbf{q} + \mathbf{b}u_1$, $\mathbf{b} = (1, 0, ..., 0)^T$. При вычислениях $\mathbf{A}_0 = (\mathbf{C}^{-1})^T\mathbf{S}\mathbf{C}^{-1}$, $\mathbf{B}_0 = (\mathbf{C}^{-1})^T\mathbf{H}\mathbf{C}^{-1}$ используется матрица

$$\mathbf{H} = \left.\left\{\omega^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}s_{ij}\cos(\varphi_j - \varphi_i)\right]\right\}\right|_{\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{0}}$$

Можно убедиться, что $\mathbf{H} = \omega^2(\mathbf{S} - \mathbf{F})$, где $\mathbf{F} = \mathrm{diag}\,(f_i)$, $(i = 1, 2, ..., n)$, причем $f_i = \Sigma s_{ij}$ $(j = 1, 2, ..., n)$. Переходя к новым переменным $\mathbf{Z} = \mathbf{S}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{q}$ и учитывая равенство $\mathbf{C}^T\mathbf{b} = \mathbf{B}$, получим $\mathbf{Z}^{\bullet\bullet} = \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{b}u_1$.

Известно [7], что для такой системы при невырожденной матрице $\mathbf{D}$ ранговый критерий управляемости приводится к виду rank $\mathbf{K} = n$, где $\mathbf{K} = \|\mathbf{b}, \mathbf{D}\mathbf{b}, ..., \mathbf{D}^{n-1}\mathbf{b}\|$.

В рассматриваемом примере $\mathbf{D} = \omega^2(\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{S}^{-1})$ – трехдиагональная, а в треугольной матрице управляемости K элементы главной диагонали $k_{11} = 1$, $k_{i+1,\,i+1} = -k_{ii}\omega^2 f_{i+1}\mu_i\lambda_{i+1}\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$, поэтому rank $\mathbf{K} = n$.

Это означает, что в окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ в $R \times TM_1$ система локально управляема при действии только момента u_1.

В окрестностях других положений $\mathbf{x} \in \zeta_1$ относительного равновесия аналогичные рассуждения приводят к следующему выводу для рассматриваемого n-звенного маятника вне поля тяготения: если в матрице инерции $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}) = \{a_{ij}\}$ в прямолинейной конфигурации (когда $a_{ij} = \pm s_{ij}$) значения всех построковых сумм $f_i = \sum a_{ij}$ $(j = 1, 2, ..., n)$ не равны нулю $(\forall\ i = 2, 3, ..., n)$, то в окрестности соответствующего положения относительного равновесия $(\omega \neq 0)$ система локально управляема при действии только момента u_1.

Для простоты изложения рассмотрим случай $n = 3$. Обсудим условия, при которых система из трех звеньев не допускает частного решения $\dot\varphi_1 = \omega$ (исключая состояния $\mathbf{x} \in \zeta_1$ относительного покоя). Обозначим точку подвеса маятника буквой G_0, а концы стержней (шарниры) – соответственно G_1, G_2, G_3 (фиг. 3).

Допустим, звено G_0G_1 находится в относительном покое при $\dot\varphi_1 = \omega$. Тогда сила реакции второго стержня действует на первый вдоль G_0G_1. Равновесие отдельно взятого звена G_1G_2 под действием реакций связей и даламберовых сил инерции возможно лишь при $N_2 \sin \psi_1 = 0$, где N_2 – сила давления со стороны стержня G_1G_2. Условие $N_2 \equiv 0$ эквивалентно разрушению связи, когда третье звено совершает свободное движение, т.е. вращается вокруг неподвижного центра масс либо покоится в абсолютной системе координат. Это произошло бы лишь при геометрическом совпадении точек G_0 и G_2.

Итак, за исключением состояний относительного равновесия, частный интеграл $\dot\varphi_1 = \omega$ возможен при $\psi_1 = \pi$, $\dot\psi_1 = 0$, $\dot\psi_2 = -\omega$, когда третье звено покоится, а первые два вращаются в совмещенной конфигурации (точки G_2 и G_0 на фиг. 3 совпадают).

Анализ уравнений двузвенного маятника с равными стержнями ($n = 2$, $l_1 = l_2$) показывает, что многообразие $\psi_1 = \pi$, $\dot\psi_1 = 0$ инвариантно относительно u_1, т.е. вращение совмещенных стержней невозможно возмутить никаким $u_1(t)$. Это свойство не может быть нарушено добавлением к движущейся системе третьего покоящегося звена G_2G_3, так как точки G_0 и G_2 совмещены.

Таким образом, трехзвенный маятник ($l_1 = l_2$) допускает инвариантное многообразие $\Gamma = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}): \psi_1 = \pi, \dot\psi_1 = 0, \dot\psi_2 = -\dot\varphi_1\}$. Область $TM\setminus\Gamma$ – открытая и всюду плотная в TM.

Из любой начальной точки $(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \in TM\setminus\Gamma$ систему можно перевести стабилизирующим управлением $\operatorname{sign} u_1 = -\operatorname{sign}(\dot\varphi_1 - \omega)$ в окрестность точек $\mathbf{x} \in \zeta_1$ за конечное время, поскольку в системе отсутствуют частные решения $\dot\gamma = 0$, кроме точек $\mathbf{x} \in \zeta_1$.

Используя логику утверждения 2, придем к выводу, что областью управляемости рассматриваемого маятника ($n = 3$, $l_1 = l_2$) при действии только момента u_1 является $TM\setminus\Gamma$.

Подбором значений m_i, l_i ($i = 1, 2, ..., n$) можно заведомо избежать наличия инвариантных многообразий и гарантировать глобальную управляемость плоского многозвенного маятника вне поля тяготения при действии одного сколь угодно малого момента u_1.

Заметим наконец, что физический n-звенный маятник вне поля тяготения не допускает описанного инвариантного многообразия, если центр тяжести второго звена несовместим с точкой подвеса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калман Р.Е.* Об общей теории систем управления // Тр. 1-го Междунар. конгр. ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 2. С. 521–546.
2. *Каюмов О.Р.* О глобальной управляемости некоторых лагранжевых систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 16–23.
3. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
4. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453–456.
5. *Каюмов О.Р.* Асимптотическая устойчивость в большом в системах с цилиндрическим фазовым пространством // Изв. вузов. Математика. 1987. № 10. С. 61–63.
6. *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: Мир, 1965. 184 с.
7. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.

Тара, Омская обл.

Поступила в редакцию
5.V.1996