

УДК 531. 391

© 1998 г. В.Г. Вильке, М.В. Дворников

КАЧЕНИЕ КОЛЕСА С ПНЕВМАТИКОМ ПО ПЛОСКОСТИ

Предлагается модель пневматика как системы с бесконечным числом степеней свободы, когда его поверхность представляется деформированной поверхностью тора. На основе ряда гипотез найден функционал потенциальной энергии деформаций пневматика в зависимости от деформаций его бандажа. В предположении качения колеса без проскальзывания в зоне контакта бандажа с плоскостью по заранее неизвестному участку бандажа получена полная система уравнений движения. В двух частных случаях качения колеса с уводом и на вираже найдены все характеристики движения (зона контакта, деформация пневматика, силы и моменты, приложенные к диску колеса).

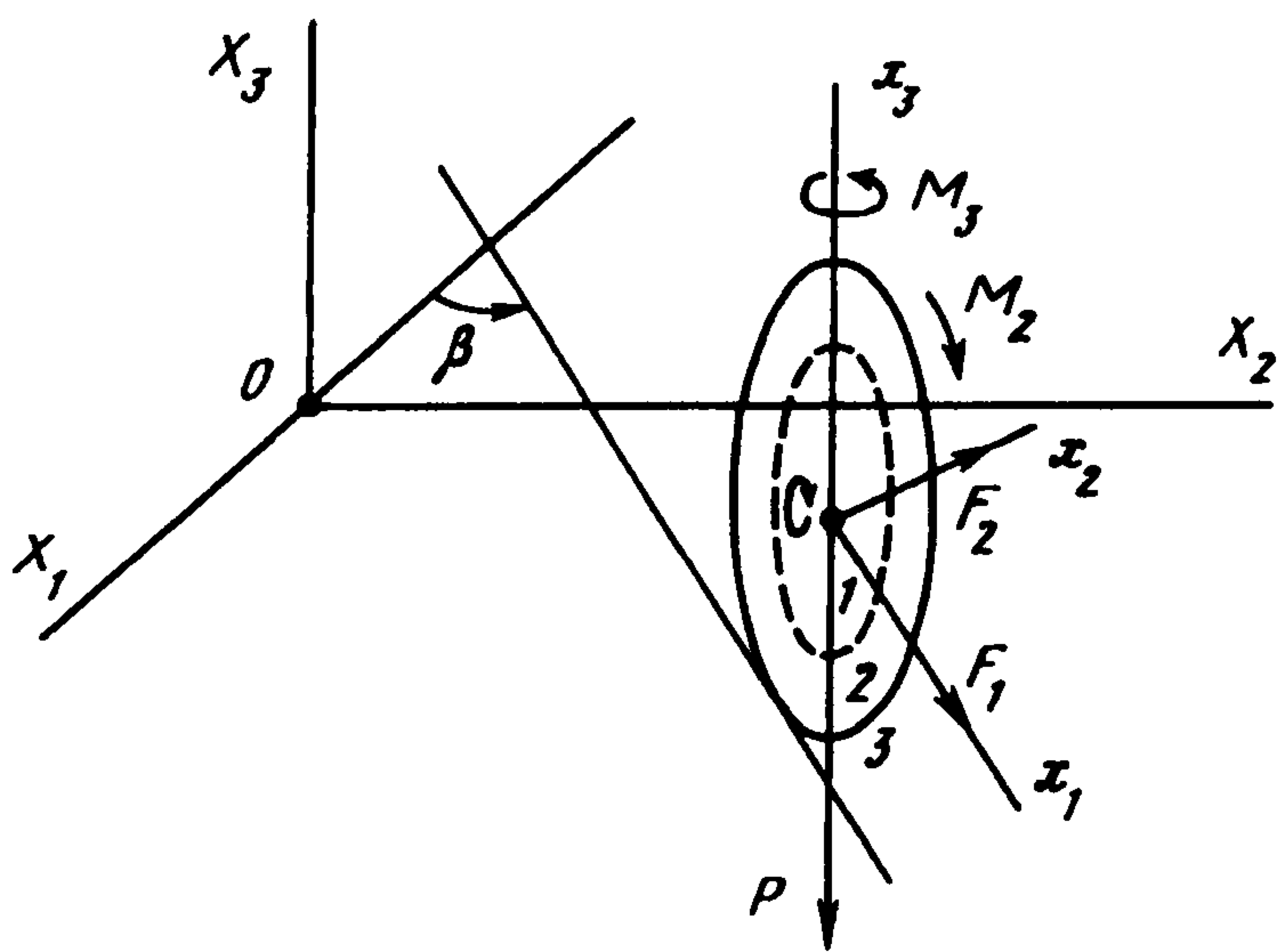
Известен ряд моделей пневматика, в основном имеющих конечное число степеней свободы и базирующихся на неголономных связях [1–3]. Динамические эффекты, связанные с деформацией шины на значительных участках ее свободной поверхности [4], могут быть описаны в рамках модели шины с бесконечным числом степеней свободы. В отличие от предложенной ранее модели [5] рассматривается деформация всей поверхности тора, моделирующего форму шины, по всем направлениям и определяется форма деформированного пневматика как в зоне контакта, так и на его свободной поверхности. (В рамках предыдущей модели [5] деформация сводится к перемещению грузовой линии вдоль оси колеса, а сила и момент пропорциональны этому перемещению и его производной по натуральному параметру в точке контакта.)

1. Модель колеса с пневматиком. Будем полагать, что колесо состоит из диска с осью (1) (твердое тело), деформируемой боковой поверхности шины (2) и нерастяжимого бандажа (3), по части которого происходит контакт без проскальзывания колеса с плоскостью OX_1X_2 (фиг. 1). Система координат $Sx_1x_2x_3$ получается из инерциальной системы $OX_1X_2X_3$ сдвигом начала в точку C (центр масс недеформированного колеса) и поворотом на угол β вокруг оси SX_3 . Ось Sx_2 есть ось вращения диска, а плоскость Sx_1x_2 является срединной плоскостью колеса и ортогональна плоскости OX_1X_2 . Далее, $\Gamma_2(\theta): Sxyz \rightarrow Sx_1x_2x_3$ – оператор поворота вокруг оси Sx_2 на угол θ , а система координат $Sxyz$ жестко связана с диском колеса (фиг. 2). Будем считать, что боковая поверхность шины в недеформированном состоянии совпадает с частью поверхности тора. Переход к тороидальной системе координат $M\eta_1\eta_2\eta_3$ осуществляется с помощью оператора $\Gamma_2(\varphi)\Gamma_3(\psi)$ (фиг. 2). Радиус-вектор точки боковой поверхности шины в деформированном состоянии в системе координат $OX_1X_2X_3$ представим в форме

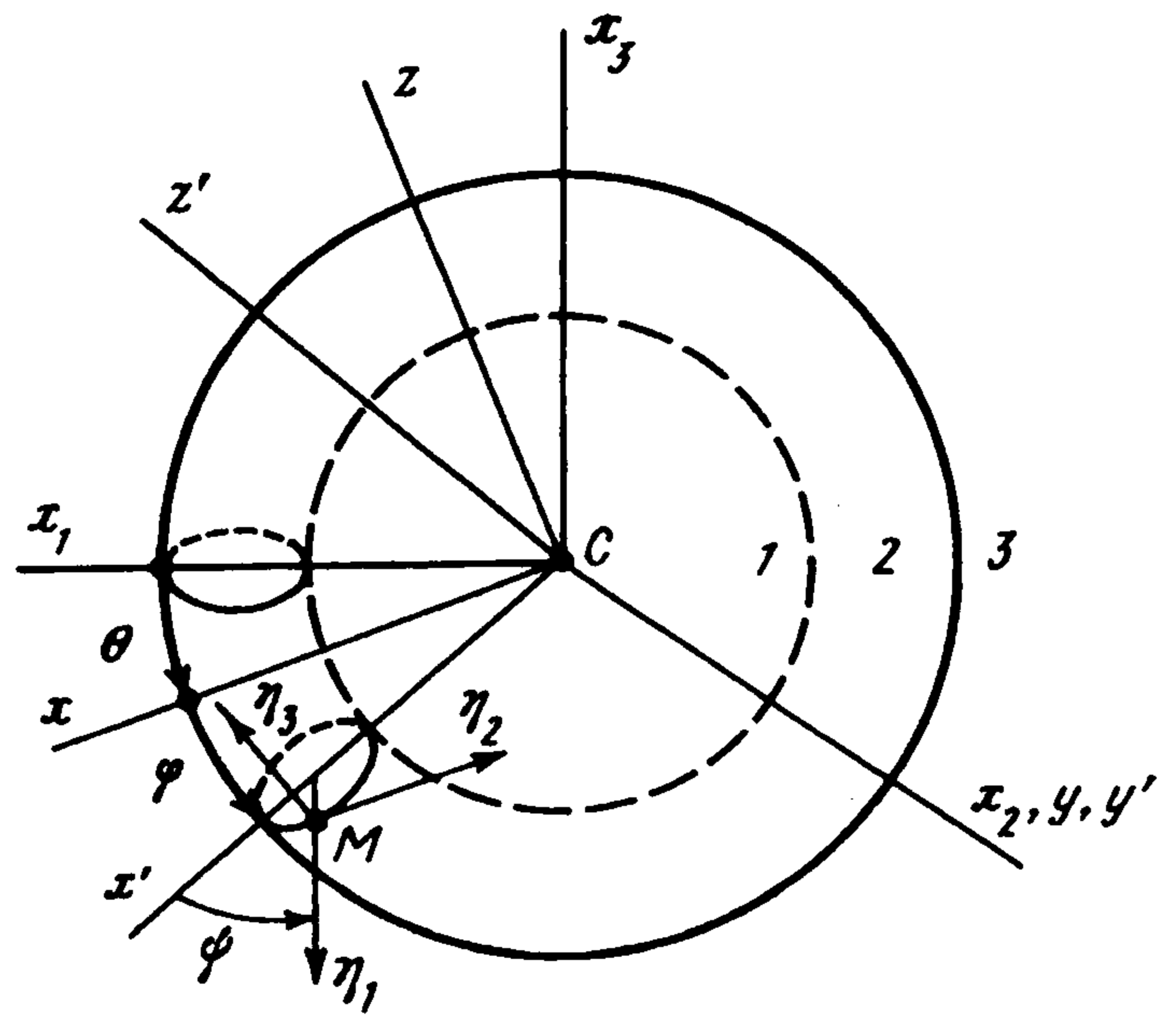
$$\mathbf{R}(\varphi, \psi, t) = \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{I}_i + \Gamma_3(\beta)\Gamma_2(\theta + \varphi) \left\{ a \mathbf{e}_{x'} + \Gamma_3(\psi) \left[b \boldsymbol{\eta}_1 + b \sum_{i=1}^3 u_i(\varphi, \psi, t) \boldsymbol{\eta}_i \right] \right\},$$

$\varphi \bmod 2\pi, \quad |\psi| \leq \psi_0$ (1.1)

$$\Gamma_2(\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix}, \quad \Gamma_3(\beta) = \begin{vmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь l_i – орт оси Ox_i , $e_{x'}$ – орт оси Cx' (фиг. 2), $u_i(\varphi, \psi, t)$ – проекция вектора перемещения точки поверхности шины на ось с ортом η_i тороидальной системы координат.

Сформулируем ряд гипотез, используя которые выразим перемещения точек поверхности шины через перемещения точек бандажа. Во-первых, будем считать, что волокна шины, отвечающие постоянному значению угла φ , нерастяжимы. Поскольку постоянная b – радиус окружности полученной сечением тора плоскостью, проходящей через ось Cx_2 , то согласно (1.1) получим

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi}\right)^2 = b^2 \Rightarrow \left(\boldsymbol{\eta}_3 \times \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_3 \times \sum_{i=1}^3 u_i \boldsymbol{\eta}_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial \psi} \boldsymbol{\eta}_i\right)^2 = 1$$

и далее

$$(1 + u_1 + \partial u_2 / \partial \psi)^2 + (\partial u_1 / \partial \psi - u_2)^2 + (\partial u_3 / \partial \psi)^2 = 1 \quad (1.2)$$

В дальнейшем будем считать функции u_i и $\partial u_i / \partial \psi$ малыми и с точностью до малых второго порядка представим (1.2) в виде

$$u_1 + \partial u_2 / \partial \psi = 0 \quad (1.3)$$

Во-вторых, предположим, что бандаж шины также нерастяжим, т.е.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}(\varphi, 0, t)}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 \Rightarrow \left(\boldsymbol{\eta}_2 \times \left[r \boldsymbol{\eta}_1 + b \sum_{i=1}^3 u_i \boldsymbol{\eta}_i\right] + b \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} \boldsymbol{\eta}_i\right)^2 \Big|_{\psi=0} = r^2, \quad r = a + b$$

и далее

$$(1 + u + \partial v / \partial \varphi)^2 + (v - \partial u / \partial \varphi)^2 + (\partial w / \partial \varphi)^2 = 1 \quad (1.4)$$

$$u(\varphi, t) = u_1(\varphi, 0, t)b / r, \quad v(\varphi, t) = -u_3(\varphi, 0, t)b / r$$

$$w(\varphi, t) = u_2(\varphi, 0, t)b / r$$

Заметим, что точкам бандажа соответствует значение угла $\psi = 0$. Линеаризуя соотношение (1.4), получим

$$u + \partial v / \partial \varphi = 0 \quad (1.5)$$

Функции u , v , w определяют перемещения точек бандажа в тороидальной системе

координат, совпадающей в данном случае при $\psi = 0$ с цилиндрическими координатами $Sx'y'z'$, когда $e_{x'} = \eta_1$, $e_{y'} = \eta_2$, $e_{z'} = -\eta_3$.

В-третьих, примем постоянной кривизну волокна шины, соответствующего постоянному углу φ . Эта гипотеза базируется на том факте, что нерастяжимая нить, закрепленная в концах под действием постоянной распределенной нормальной нагрузки (давление), принимает форму окружности, проходящей через концы нити в плоскости действия нагрузки. Кривизну волокна k можно определить из проекций ускорения точки на оси трехгранника Френе, а именно, $|\partial^2 \mathbf{R} / \partial \psi^2| = b^2 k$. Согласно (1.1) получим

$$\begin{aligned} & \left(\eta_3 \times \left[\eta_3 \times \left(\eta_1 + \sum_{i=1}^3 u_i \eta_i \right) \right] + \eta_3 \times \sum_{i=1}^3 2 \frac{\partial u_i}{\partial \psi} \eta_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial \psi^2} \eta_i \right)^2 = k^2 b^2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(1 + u_1 + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} - u_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \psi^2} \right)^2 = k^2 b^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Сохраняя в (1.6) члены нулевого и первого порядка малости, получим с учетом (1.3) равенство

$$\partial^4 u_2 / \partial \psi^4 + \partial^2 u_2 / \partial \psi^2 = 0 \quad (1.7)$$

Найдем решение уравнения (1.7), удовлетворяющее согласно (1.4) и (1.5) условиям $u_2(\varphi, \pm \psi_0, t) = 0$, $u_2(\varphi, 0, t) = w(\varphi, t)r/b$

$$(1.8)$$

$$\partial u_2(\varphi, \pm \psi_0, t) / \partial \psi = 0, \quad \partial u_2(\varphi, 0, t) / \partial \psi = -u(\varphi, t)r/b$$

Общее решение уравнения (1.7) имеет вид $u_2 = c_1 \psi + c_2 + c_3 \cos \psi + c_4 \sin \psi$, где c_i – функции φ и t . С учетом граничных условий (1.8) получим

$$u_2 = u(\varphi, t)f(\psi, \psi_0) + w(\varphi, t)g(\psi, \psi_0) \quad (1.9)$$

$$u_1 = -u(\varphi, t)f'(\psi, \psi_0) - w(\varphi, t)g'(\psi, \psi_0), \quad 0 \leq \psi \leq \psi_0$$

$$f(\psi, \psi_0) = \frac{r}{b\Delta} [(1 - \cos \psi_0)\psi + \Delta_1 - \Delta_1 \cos \psi + \Delta_2 \sin \psi]$$

$$g(\psi, \psi_0) = \frac{r}{b\Delta} [-\sin \psi_0 \psi - \Delta_2 + (\cos \psi_0 - 1)\cos \psi + \sin \psi_0 \sin \psi]$$

$$\Delta = \psi_0 \sin \psi_0 - 2 + 2 \cos \psi_0, \quad \Delta_1 = \psi_0 \cos \psi_0 - \sin \psi_0, \quad \Delta_2 = 1 - \cos \psi_0 - \psi_0 \sin \psi_0$$

На интервале изменения ψ от $-\psi_0$ до нуля необходимо в формулах (1.9) заменить ψ_0 на $-\psi_0$. Заметим, что функция $f(\psi)$ четная, а $g(\psi)$ нечетная.

Функцию $u_3(\varphi, \psi, t)$ разложим в ряд Тейлора по переменной ψ в окрестностях точек $\psi = \psi_0$ и $\psi = -\psi_0$ и, ограничиваясь в этих разложениях двумя первыми членами, получим

$$u_3(\varphi, \psi, t) = -v(\varphi, t)(1 - |\psi|/\psi_0)r/b \quad (1.10)$$

Таким образом, по деформированному состоянию банджа (функции u , v , w) определяются перемещения точек боковой поверхности шины (формулы (1.9), (1.10)). Форма деформированного пневматика несимметрична относительно плоскости Sx_1x_3 , а производные $\partial u_i(\varphi, \psi, t) / \partial \psi$ могут иметь разрывы при $\psi = 0$.

Подсчитаем элементарную работу давления в шине на возможных перемещениях

точек ее поверхности. Имеем

$$\delta A = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \int_0^{2\pi} p n \delta \mathbf{R} d\sigma, \quad \delta \mathbf{R} = b \sum_{i=1}^3 \delta u_i \boldsymbol{\eta}_i$$

$$n d\sigma = \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi} \right] d\psi d\varphi$$

и далее с точностью до малых второго порядка включительно

$$\delta A = p b^3 \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \int_0^{2\pi} \left[\delta u_1 \left(\frac{a}{b} + \cos \psi - \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + u_1 \cos \psi - u_2 \sin \psi \right) + \right. \\ \left. + \delta u_2 \left(\frac{a}{b} + \cos \psi \right) \left(u_2 - \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) + \delta u_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + u_3 \cos \psi \right) \right] d\psi d\varphi \quad (1.11)$$

В соотношении (1.11) следует заменить u_i и δu_i на выражения (1.9), (1.10) и проинтегрировать их по ψ .

Подынтегральное выражение в (1.11) содержит член $\delta u_1 (a/b + \cos \psi)$, линейный по δu_1 . Для сохранения принятой точности аппроксимации нужно найти u_1 с точностью до малых второго порядка включительно относительно u, v, w . Из соотношений (1.2), (1.6), полагая $u_i = u_{i0} + z_i$, где u_{i0} – функции (1.9), (1.10), а z_i – квадратичные по u, v, w поправки, найдем с точностью до малых второго порядка включительно (штрих означает производную по ψ)

$$z_1'' + z_1 = \frac{1}{2} u_{30}''^2 - u_{30}'^2 - \frac{1}{2} (u_{10}' - u_{20}')^2 \quad (1.12)$$

Правая часть уравнения (1.12) равна $-\frac{1}{2} [u(f'' + f) + w(g'' + g)]^2 - v^2 r^2 (b\psi_0)^{-2}$, а функция z_1 обращается в нуль при $\psi = 0$ и $\psi = \pm\psi_0$. Решение уравнения (1.12) имеет вид

$$z_1(\varphi, \psi, t) = A_{11}(\psi) u^2 + A_{33}(\psi) w^2 + 2A_{13}(\psi) u w + A_{22}(\psi) v^2$$

где A_{ii} ($i = 1, 2, 3$) – четная функция, а A_{13} – нечетная. Функции A_{ij} заданы на интервале $[-\psi_0, \psi_0]$ и являются линейными комбинациями $\psi, \psi^2, \cos \psi, \sin \psi$ и постоянной. Определение этих функций не вызывает трудностей, хотя и достаточно громоздко. Подставляя (1.9), (1.10) в (1.11), заменяя δu_1 на $-f' \delta u - g' \delta w + \delta z_1$, интегрируя полученные выражения с учетом четности и нечетности соответствующих функций по ψ , найдем выражение работы давления на возможных перемещениях в виде

$$\delta A = - \int_0^{2\pi} [n_0 \delta u + n_1 u \delta u + n_2 v \delta v + n_3 w \delta w + n_{12} (u' \delta v - v' \delta u)] d\varphi \quad (1.13)$$

Вычисление коэффициентов n_k ($k = 0, \dots, 3$), n_{12} в явном виде достаточно громоздко.

Заметим, что $n_0 < 0$, а вариация (1.13) при учете (1.5) может быть представлена в форме

$$\delta A = -\delta \Pi[v, w], \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(n_1 + 2n_{12}) v'^2 + n_2 v^2 + n_3 w^2] d\varphi$$

где Π – потенциальная энергия деформированной шины. При $u = v = w = 0$ шина находится в устойчивом равновесии, а это означает, что функционал Π имеет изолированный минимум и коэффициенты $n_1 + 2n_{12}, n_2, n_3$ положительны.

Второе замечание касается постоянства давления p . Если принять газ в пневматике совершенным, а процессы изотермическими, то $pV = p_0 V_0$, где p, V и p_0, V_0 – давление и объем

газа в деформированном и недеформированном пневматике соответственно. Тогда

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{-1} = p_0 \left(1 - \frac{\Delta V}{V_0} + \dots\right), \quad V = V_0 + \Delta V$$

$$\Delta V = b^3 \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \int_0^{2\pi} u_1 \left(\frac{a}{b} + \cos \psi\right) d\psi d\varphi + O_2 \quad (1.14)$$

где O_2 – члены второго порядка малости и выше относительно u, v, w и их производных. Учитывая (1.5), (1.9) и нечетность функции $g'(\psi)$, приходим к выводу, что величина ΔV в (1.14) имеет порядок малости два и выше относительно u, v, w и, следовательно, давление p в выражении (1.11) можно считать постоянным, что соответствует принятой точности при вычислении работы давления на возможных перемещениях.

2. Уравнения движения колеса с пневматиком. Кинетическая энергия колеса складывается из кинетической энергии диска

$$T_d = \frac{1}{2} m_d \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i^2 + \frac{1}{2} J_{1d} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} J_{2d} \dot{\theta}^2$$

где m_d – масса диска, J_{1d}, J_{2d} – моменты инерции диска относительно осей Sx_3, Sx_2 , и кинетической энергии деформированной шины. Относительно последней предположим, что вся масса шины сосредоточена в бандаже (однородная нерастяжимая нить), и представим кинетическую энергию бандажа в виде

$$T_b = \frac{1}{2} \rho r \int_0^{2\pi} \dot{\mathbf{R}}^2(\varphi, 0, t) d\varphi, \quad \Phi = \theta + \varphi$$

$$\dot{\mathbf{R}}^2(\varphi, 0, t) = \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i \mathbf{l}_i + r \Gamma_3(\beta) \{ \dot{\beta} \mathbf{l}_3 \times \Gamma_2(\Phi) [(1+u)\boldsymbol{\eta}_1 + w\boldsymbol{\eta}_2 - v\boldsymbol{\eta}_3] \} +$$

$$+ r \Gamma_3(\beta) \Gamma_2(\Phi) \{ \dot{\theta} \boldsymbol{\eta}_2 \times [(1+u)\boldsymbol{\eta}_1 + w\boldsymbol{\eta}_2 - v\boldsymbol{\eta}_3] + \dot{u}\boldsymbol{\eta}_1 + \dot{w}\boldsymbol{\eta}_2 - \dot{v}\boldsymbol{\eta}_3 \}$$

где ρ – линейная плотность бандажа. Далее получим

$$\Gamma_2(-\Phi) \Gamma_3(-\beta) \dot{\mathbf{R}}(\varphi, 0, t) = \sum_{i=1}^3 Z_i \boldsymbol{\eta}_i, \quad Z_i = \xi_{i1} + r \zeta_{i2} \quad (2.1)$$

$$\zeta_{11} = \dot{X}_1 \cos \Phi \cos \beta + \dot{X}_2 \cos \Phi \sin \beta - \dot{X}_3 \sin \Phi, \quad \zeta_{12} = \dot{u} - v\dot{\theta} - \dot{\beta} w \cos \Phi$$

$$\zeta_{21} = -\dot{X}_1 \sin \beta + \dot{X}_2 \cos \beta, \quad \zeta_{22} = \dot{w} + \dot{\beta}(1+u) \cos \Phi - \dot{\beta} v \sin \Phi$$

$$\zeta_{31} = \dot{X}_1 \sin \Phi \cos \beta + \dot{X}_2 \sin \Phi \sin \beta + \dot{X}_3 \cos \Phi, \quad \zeta_{32} = -\dot{v} - \dot{\theta}(1+u) - \dot{\beta} w \sin \Phi$$

и найдем кинетическую энергию колеса

$$T = T_d + T_b = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2 +$$

$$+ \frac{\rho r}{2} \int_0^{2\pi} \{ r^2 [\xi_{12}^2 + (\zeta_{22} - \dot{\beta} \cos \Phi)^2 + (\zeta_{32} + \dot{\theta})^2] +$$

$$+ 2r [\zeta_{11} \zeta_{12} + (\zeta_{21} + r \dot{\beta} \cos \Phi)(\zeta_{22} - \dot{\beta} \cos \Phi) + (\zeta_{31} - r \dot{\theta})(\zeta_{32} + \dot{\theta})] \} d\varphi \quad (2.2)$$

Здесь m, J_1, J_2 – масса колеса и его моменты инерции в недеформированном состоянии относительно осей Sx_3, Sx_2 .

Будем полагать, что колесо катится по плоскости OX_1X_2 без проскальзывания. Это означает, что на интервале $[\varphi_1, \varphi_2]$ изменения угла φ скорость точек бандажа равна

нулю. Согласно (2.1) получим

$$Z_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \quad (2.3)$$

а возможные перемещения удовлетворяют условиям

$$\delta Z_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \quad (2.4)$$

Связи (2.3) можно заменить одной голономной связью $\mathbf{R}(\varphi, 0, t)\mathbf{l}_3 = 0$ и двумя неголономными связями, например, $Z_2 = 0$ и $Z_3 = 0$. Кроме того, в граничных точках контакта бандажа с плоскостью, соответствующих углам φ_1 и φ_2 , введем две реакции связей $\mathbf{v}_1(t)$ и $\mathbf{v}_2(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\Gamma_2(-\Phi)\Gamma_3(-\beta)\mathbf{l}_3\mathbf{v}_k = 0 \Rightarrow v_{1k} \sin \Phi_k - v_{3k} \cos \Phi_k = 0 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{v}_k = (v_{1k}, v_{2k}, v_{3k}), \quad \Phi_k = \varphi_k + \theta; \quad k = 1, 2$$

Условия (2.5) означают, что реакции связей в граничных точках линии контакта равны нулю в проекции на ось OX_3 . Работа этих сил на возможных перемещениях после освобождения от связей равна

$$\delta A_k = \sum_{i=1}^3 v_{ik} \delta Z_{ik}, \quad k = 1, 2; \quad \delta Z_{ik} = \delta Z_i|_{\varphi=\varphi_k} \quad (2.6)$$

При освобождении от связей (2.3) следует также учесть работу реакций связей $\mu(\varphi, t)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ определяемую в виде

$$\delta A_\mu = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sum_{i=1}^3 \mu_i(\varphi, t) \delta Z_i d\varphi \quad (2.7)$$

Будем предполагать, что к диску колеса приложена сила и момент (фиг. 1), работа которых на возможных перемещениях равна

$$\delta A_F = F(\beta)\delta X_1 + F(\beta - \pi/2)\delta X_2 - P\delta X_3 + M_2\delta\theta + M_3\delta\beta \quad (2.8)$$

$$F(\beta) = F_1 \cos \beta - F_2 \sin \beta$$

Уравнения движения колеса и условия на скачки функций в граничных точках линии контакта получим из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A + \delta A_1 + \delta A_2 + \delta A_F + \delta A_\mu + \delta A_3) dt = 0 \quad (2.9)$$

$$\delta A_3 = \int_{\varphi_2}^{2\pi-\varphi_1} \lambda(\varphi, t) [(1+u+v')(\delta u + \delta v') + (v-u')(\delta v - \delta u') + w'\delta w'] d\varphi$$

где $\lambda(\varphi, t)$ – неопределенный множитель Лагранжа, соответствующий условию нерастяжимости бандажа (1.4), а остальные величины определяются формулами (1.13), (2.6)–(2.8). Область интегрирования $[t_1, t_2] \cup [0, 2\pi]$ в (2.9) разбивается кривыми $\varphi = \varphi_1(t)$ и $\varphi = \varphi_2(t)$ на две части, к каждой из которых применим формулу Грина. В результате получим систему уравнений

$$-\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}_1} T + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} S_1(\mu_i, \Phi, \beta) d\varphi + \sum_{k=1}^2 S_1(v_{ik}, \Phi_k, \beta) + F(\beta) = 0$$

$$-\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}_2} T + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} S_1\left(\mu_i, \Phi, \beta - \frac{\pi}{2}\right) d\varphi + \sum_{k=1}^2 S_1\left(v_{ik}, \Phi_k, \beta - \frac{\pi}{2}\right) + F\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$S_1(\mu_i, \Phi, \beta) = \mu_1 \cos \Phi \cos \beta - \mu_2 \sin \beta + \mu_3 \sin \Phi \cos \beta$$

$$-\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{X}_3} T - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} S_2(\mu_i, \Phi) d\varphi - \sum_{k=1}^2 S_2(v_{ik}, \Phi_k) - P = 0 \quad (2.10)$$

$$S_2(\mu_i, \Phi) = \mu_1 \sin \Phi - \mu_3 \cos \Phi$$

$$\nabla_{\theta} T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\theta}} T - r \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} S_3(\mu_i, u, v) d\varphi - r \sum_{k=1}^2 S_3(v_{ik}, u_k, v_k) + M_2 = 0$$

$$S_3(\mu_i, u, v) = \mu_1 v + \mu_3 (1 + u)$$

$$\nabla_{\beta} T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\beta}} T - r \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} S_4(\mu_i, \Phi, u, v, w) d\varphi - r \sum_{k=1}^2 S_4(v_{ik}, \Phi_k, u_k, v_k, w_k) + M_3 = 0$$

$$S_4(\mu_i, \Phi, u, v, w) = \mu_1 w \cos \Phi - \mu_2 ((1 + u) \cos \Phi - v \sin \Phi) + \mu_3 w \sin \Phi$$

$$u_k = u(\varphi_k, t), \quad v_k = v(\varphi_k, t), \quad w_k = w(\varphi_k, t), \quad k = 1, 2$$

$$\nabla_u T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{u}} T - n_0 - n_1 u + n_{12} v' + \lambda(1 + u + v') + [\lambda(v - u')] = 0, \quad \varphi \in I_2$$

$$-n_0 - n_1 u + n_{12} v' + \mu_1 r = 0, \quad \varphi \in I_1$$

$$\rho r^3 \dot{\varphi}_k [\dot{u}]_k - (-1)^{k+1} \lambda(v - u')|_{l(k)} + r v_{1k} = 0$$

$$\nabla_v T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{v}} T - n_2 v - n_{12} u' + \lambda(v - u') - [\lambda(1 + u + v')] = 0, \quad \varphi \in I_2$$

$$n_2 v + n_{12} u' + \mu_3 r = 0, \quad \varphi \in I_1$$

$$\rho r^3 \dot{\varphi}_k [\dot{v}]_k + (-1)^{k+1} \lambda(1 + u + v')|_{l(k)} - v_{3k} r = 0$$

$$\nabla_w T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{w}} T - n_3 w - (\lambda w') = 0, \quad \varphi \in I_2$$

$$n_3 w = \mu_2 r, \quad \varphi \in I_1$$

$$\rho r^3 \dot{\varphi}_k [\dot{w}]_k + (-1)^{k+1} \lambda w'|_{l(k)} + r v_{2k} = 0$$

$$k = 1, 2; \quad I_1 =]\varphi_1, \varphi_2[, \quad I_2 =]\varphi_2, 2\pi - \varphi_1[$$

Здесь $[f(\varphi, t)]_k = f(\varphi_k + 0, t) - f(\varphi_k - 0, t)$ – скачок функции в точке φ_k , а индексы $l(1)$ и $l(2)$ означают пределы соответствующих функций при $\varphi \rightarrow \varphi_1$ слева и $\varphi \rightarrow \varphi_2$ справа. Соотношения (2.10) помимо уравнений движения содержат условия сопряжения (условия на скачки) на границах зоны контакта при $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$; совместно с уравнениями связей (1.4), (2.3) и условиями (2.5) они образуют полную систему уравнений задачи (всего 20 соотношений) относительно двадцати неизвестных: $X_i, \mu_i, v_{i1}, v_{i2}$ ($i = 1, 2, 3$), $\beta, \theta, u, v, w, \lambda, \varphi_1, \varphi_2$. Кроме этого, следует учитывать при определении функций u, v, w их непрерывность в точках φ_1 и φ_2 , а именно $[u]_k = [v]_k = [w]_k = 0$ ($k = 1, 2$).

3. Качение колеса с уводом. Рассмотрим частные случаи поставленной задачи: качение колеса с уводом и движение на вираже. В этих случаях можно получить аналитическое решение задачи и определить необходимые для существования этих режимов силы и моменты.

Рассмотрим режим качения колеса с уводом, когда

$$\beta = \dot{\beta} = 0, \quad \dot{X}_1 = c \cos \varepsilon, \quad \dot{X}_2 = c \sin \varepsilon, \quad X_3 = \text{const}, \quad \dot{\theta} = \Omega$$

$$(u, v, w)(\varphi, t) = (U, V, W)(\alpha), \quad \alpha = \varphi + \Omega t - \pi/2, \quad \mu(\varphi, t) = \mu(\alpha)$$

$$\dot{\varphi}_k = -\Omega, \quad v_k = \text{const}, \quad k = 1, 2, \quad \lambda(\varphi, t) = \lambda(\alpha)$$

где ε – постоянный угол увода. Уравнения движения (2.10) для функций u, v, w в зоне

контакта и условия качения без проскальзывания (2.3) представляются в виде (штрих означает производную по α)

$$\begin{aligned} \mu_1 r &= n_0 + n_1 U - n_{12} V', & \mu_2 r &= n_3 W, & -\mu_3 r &= n_2 V + n_{12} U' \\ \alpha &\in]\alpha_1, \alpha_2[, & \alpha_k &= \varphi_k + \Omega t - \pi/2 \\ c \cos \varepsilon \sin \alpha &= r\Omega(U' - V), & c \sin \varepsilon &= -r\Omega W' \\ c \cos \varepsilon \cos \alpha &= r\Omega(1 + U + V') \end{aligned} \quad (3.1)$$

Считая, что центр колеса движется по прямой $L = \{X_2 = X_1 \operatorname{tg} \varepsilon, X_3 = \text{const}\}$ с постоянной скоростью c , будем искать решение последних трех уравнений системы (3.1), определяющее зону контакта, с учетом нерастяжимости бандажа (1.4) в виде отрезка прямой, параллельной L . В результате получим

$$\begin{aligned} U &= d\alpha \sin \alpha + d_1 \sin \alpha + r^{-1} X_3 \cos \alpha - 1 \\ V &= d\alpha \cos \alpha + d_1 \cos \alpha - r^{-1} X_3 \sin \alpha \\ W &= -d \operatorname{tg} \varepsilon \alpha + d_3, & d &= c \cos \varepsilon (r\Omega)^{-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где d_1 и d_3 – произвольные постоянные. Уравнения линии контакта в системе координат $OX_1X_2X_3$ имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c \cos \varepsilon t - c \cos \varepsilon \Omega^{-1} \alpha - rd_1 \\ \xi_2 &= c \sin \varepsilon t - c \sin \varepsilon \Omega^{-1} \alpha + rd_3, & \xi_3 &= 0; & \alpha &\in [\alpha_1, \alpha_2] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из условия нерастяжимости бандажа следует, что при изменении угла α дуга бандажа $r\alpha$ совпадает с соответствующим отрезком зоны контакта, что возможно при условии $c = r\Omega$. Линия контакта согласно (3.3) есть прямая, параллельная прямой L . Далее из первых трех уравнений (3.1) определяются реакции в зоне контакта μ_1, μ_2, μ_3 .

Форма деформированного бандажа вне зоны контакта находится в результате решения уравнений (2.10) для функций u, v, w , представленных в форме

$$\begin{aligned} g_0(1 + U - U'' + 2V') - n_0 - n_1 U + n_{12} V' + \lambda(1 + U + V') + \lambda(V' - U'') + \lambda'(V - U') &= 0 \\ g_0(V - V'' - 2U') - n_2 V - n_{12} U' - \lambda'(1 + U + V') - \lambda(U' + V'') + \lambda(V - U') &= 0 \\ g_0 W'' + n_3 W + \lambda' W' + \lambda W''' = 0, & U + V' = 0; & g_0 &= \rho r^3 \Omega^2; & \alpha &\in [\alpha_2, 2\pi - \alpha_1] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Последнее уравнение в (3.4) представляет собой линеаризованное условие нерастяжимости бандажа (1.5). Полагая, что натяжение бандажа $-\lambda = g_0 - n_0 - v(\alpha)$, где $v(\alpha)$ – малая величина, и оставляя в (3.4) только линейные члены, получим общее решение соответствующей линейной системы в виде

$$V = \sum_{k=1}^4 C_k \exp(D_k \alpha), \quad W = A_1 \exp(\gamma \alpha) + A_2 \exp(-\gamma \alpha), \quad U = -V'; \quad \alpha \in [\alpha_2, 2\pi - \alpha_1] \quad (3.5)$$

$$D_k = \pm \left[\tilde{n} \pm \left(\tilde{n}^2 - 1 + \frac{n_2}{n_0} \right)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad \tilde{n} = 1 + \frac{n_1/2 + n_{12}}{n_0}, \quad \gamma = \left(-\frac{n_3}{n_0} \right)^{1/2} > 0$$

Характер корней D_k зависит от геометрических характеристик шины (величины a, b, ψ_0). Коэффициенты C_k и A_k определяются из условий, налагаемых на скачки в (2.10), и условий непрерывности функций U, V, W в граничных точках зоны контакта K_1 и K_2 , а именно

$$\begin{aligned} g_0[U']_k + (-1)^{k+1} (n_0 - g_0)(V - U')_{l(k)} &= r\nu_{1k}, & [U]_k &= 0 \\ g_0[V']_k - (-1)^{k+1} (n_0 - g_0 + v)_{l(k)} &= -r\nu_{3k}, & [V]_k &= 0 \\ g_0[W']_k - (-1)^{k+1} (n_0 - g_0)W'_{l(k)} &= r\nu_{2k}, & [W]_k &= 0; & k &= 1, 2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Условия сопряжения (3.6) при учете соотношений (3.2) и (3.5) представим в виде

$$\sum_{k=1}^4 D_k^m W_{kj} = a_{mj}, \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

$$a_{0j} = (\cos \varepsilon - 1)\alpha_j + d_1, \quad a_{1j} = d_2 = 1 - X_3 r^{-1}$$

$$a_{2j} = (1 - \cos \varepsilon)\alpha_j - d_1 - \frac{g_0}{n_0} \cos \varepsilon \alpha_j - (-1)^j \frac{r v_{1j}}{n_0}$$

$$a_{3j} = 1 - \left(1 + \frac{n_1 + n_{12}}{n_0}\right) d_2 - \frac{g_0}{n_0} \cos \varepsilon + (-1)^j \frac{r v_{3j}}{n_0}$$

$$W_{k1} = C_k \exp[D_k(2\pi - \alpha_1)] \approx C_k \exp(2\pi D_k)$$

$$W_{k2} = C_k \exp(D_k \alpha_2) \approx C_k$$

$$A_m \exp\{(-1)^{m+1} \gamma [2\pi(2-s) + (-1)^s \alpha_s]\} = G_{ms}$$

$$G_{ms} = \frac{1}{2\gamma} \left[\gamma d_3 + (-1)^m \frac{g_0 \sin \varepsilon}{n_0} - \alpha_s \gamma \sin \varepsilon - (-1)^{m+s} \frac{r v_{2s}}{n_0} \right]; \quad m, s = 1, 2$$

Величины W_{kj} определяются из системы линейных алгебраических уравнений (3.7) в виде

$$W_{kj} = \left[\prod_{i \neq k}^4 (D_i - D_k) \right]^{-1} [a_{0j} D_k^{-1} D_1^2 D_3^2 + a_{1j} (D_1^2 + D_3^2 - D_k^2) - a_{2j} D_k - a_{3j}]$$

$$k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, 2 \quad (3.8)$$

Полагая $\exp(D_k \alpha_j) \approx 1$ и $\exp(\pm \gamma \alpha_j) \approx 1$, получим из (3.7) и (3.8) соотношения

$$W_{k1} \exp(-\pi D_k) = W_{k2} \exp(\pi D_k), \quad k = 1, \dots, 4$$

$$G_{j1} \exp(-\gamma \pi) = G_{j2} \exp(\gamma \pi), \quad j = 1, 2$$

из которых вытекают равенства

$$\frac{r}{n_0} (v_{11} + v_{12}) = \left[(1 - \cos \varepsilon)(1 + H_1) - \frac{g_0}{n_0} \cos \varepsilon \right] (\alpha_2 - \alpha_1) + 2H_2 d_2$$

$$\frac{r}{n_0} (v_{11} - v_{12}) = [2d_1 - (1 - \cos \varepsilon)(\alpha_1 + \alpha_2)](1 + H_3) \quad (3.9)$$

$$\frac{r}{n_0} (v_{31} + v_{32}) = -[2d_1 - (1 - \cos \varepsilon)(\alpha_1 + \alpha_2)]H_4$$

$$\frac{r}{n_0} (v_{31} - v_{32}) = 2 - \frac{2g_0 \cos \varepsilon}{n_0} - 2 \left(1 + \frac{n_1 + n_{12}}{n_0} + H_5\right) d_2 - (1 - \cos \varepsilon)H_6 (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\frac{r}{n_0} (v_{21} + v_{22}) = \gamma \operatorname{th} \pi \gamma [\sin \varepsilon (\alpha_1 + \alpha_2) - 2d_3]$$

$$\frac{r}{n_0} (v_{21} - v_{22}) = -\frac{2g_0 \sin \varepsilon}{n_0} - \gamma \sin \varepsilon \operatorname{cth} \pi \gamma (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$H_1 = D_1 D_3 G_{13} / G_{31}, \quad H_2 = (D_3^2 - D_1^2) \operatorname{th} \pi D_1 \operatorname{th} \pi D_3 / G_{31}$$

$$H_3 = D_1 D_3 G_{31} / G_{13}, \quad H_4 = D_1 D_3 (D_3^2 - D_1^2) \operatorname{th} \pi D_1 \operatorname{th} \pi D_3 / G_{13}$$

$$H_5 = (D_3^3 \operatorname{th} \pi D_1 - D_1^3 \operatorname{th} \pi D_3) / G_{31}, \quad H_6 = D_1 D_3 (D_1^2 - D_3^2) / G_{31}$$

$$G_{ik} = D_i \operatorname{th} \pi D_1 - D_k \operatorname{th} \pi D_3, \quad i, k = 1, 3$$

В соотношениях (3.8), (3.10) принято соглашение о корнях D_k , а именно, $D_2 = -D_1$,

$D_4 = -D_3$. Оставляя в первых пяти уравнениях (2.10) и в условиях (2.5) члены первого порядка малости, представим их в форме

$$\begin{aligned} F_1 = -v_{31} - v_{32} &= r^{-1} n_0 H_4 [2d_1 - (1 - \cos \varepsilon)(\alpha_1 + \alpha_2)], \quad M_2 = -rF_1 \\ F_2 = -v_{21} - v_{22} &= r^{-1} n_0 \gamma \operatorname{th} \pi \gamma [2d_3 - \sin \varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2)] \\ P = -r^{-1} n_0 (\alpha_2 - \alpha_1), \quad M_3 &= n_0 \sin \varepsilon (\alpha_2 - \alpha_1) \\ v_{11} + v_{12} + v_{31} \alpha_1 + v_{32} \alpha_2 &= 0 \Rightarrow 2H_2 d_2 + [H_1 - (1 + H_1) \cos \varepsilon] (\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \\ v_{11} - v_{12} + v_{31} \alpha_1 - v_{32} \alpha_2 &= 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{g_0 \cos \varepsilon}{n_0}\right) (\alpha_1 + \alpha_2) + \\ &+ [2d_1 - (1 - \cos \varepsilon)(\alpha_1 + \alpha_2)] (1 + H_3) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из соотношений (3.10) следует, что условия существования стационарного качения колеса с уводом являются равенства $M_2 = -rF_1$, $M_3 = -Pr \sin \varepsilon$. Остальные характеристики стационарного режима определяются из (3.10) в виде

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= -n_0^{-1} Pr, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -\left(1 - \frac{g_0 \cos \varepsilon}{n_0}\right)^{-1} (1 + H_3) H_4^{-1} n_0^{-1} F_1 r \\ 2d_1 &= H_4^{-1} \left[1 - (1 - \cos \varepsilon) \left(1 - \frac{g_0 \cos \varepsilon}{n_0}\right)^{-1} (1 + H_3)\right] n_0^{-1} F_1 r \\ 2d_3 &= \operatorname{cth} \pi \gamma n_0^{-1} F_2 r - \sin \varepsilon \left(1 - \frac{g_0 \cos \varepsilon}{n_0}\right)^{-1} (1 + H_3) H_4^{-1} n_0^{-1} F_1 r \end{aligned} \quad (3.11)$$

Заметим, что сопротивление качению колеса с уводом отсутствует. Последнее появится, если ввести диссипативные силы, связанные с процессом деформации шины.

4. Качение колеса на вираже. Рассмотрим еще один стационарный режим качения колеса на вираже, когда

$$\begin{aligned} X_1 &= R \sin \omega t, \quad X_2 = -R \cos \omega t, \quad X_3 = \operatorname{const} \\ \beta &= \omega t, \quad \omega = \operatorname{const}, \quad \dot{\theta} = \Omega, \quad \dot{\varphi}_k = -\Omega = \operatorname{const}, \quad k = 1, 2 \\ (u, v, w)(\varphi, t) &= (U, V, W)(\alpha), \quad \alpha = \varphi + \Omega t - \pi / 2 \\ \mu(\varphi, t) &= \mu(\alpha), \quad v_k = \operatorname{const}, \quad k = 1, 2, \quad \lambda(\varphi, t) = \lambda(\alpha) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $R, R\omega$ – радиус виража и скорость центра колеса. Первые три уравнения системы (3.1) в случае качения колеса на вираже сохраняют свой вид, а последние три уравнения записываются в форме

$$\begin{aligned} \Omega U' - \Omega V + \omega W \sin \alpha &= r^{-1} R \omega \sin \alpha \\ \Omega W' - \omega(1 + U) \sin \alpha - \omega V \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\Omega V' + \Omega(1 + U) + \omega W \cos \alpha = r^{-1} R \omega \cos \alpha$$

Уравнения (4.2) допускают первый интеграл

$$(1 + U) \cos \alpha - V \sin \alpha = X_3 r^{-1} \quad (4.3)$$

а условие нерастяжимости бандажа (1.4) представляется в форме

$$W'^2 + \left(\frac{\omega}{\Omega} W - \frac{R\omega}{r\Omega}\right)^2 = 1 \quad (4.4)$$

Общее решение уравнения (4.4) имеет вид

$$W = \frac{R}{r} - \frac{\Omega}{\omega} \cos\left(\frac{\omega}{\Omega} \alpha + \delta\right), \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] \quad (4.5)$$

где δ – произвольная постоянная. Далее из второго уравнения (4.2) и (4.3) найдем

$$\begin{aligned} U &= \frac{\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{\Omega} \alpha + \delta\right) \sin \alpha + \frac{X_3}{r} \cos \alpha - 1 \\ V &= \frac{\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{\Omega} \alpha + \delta\right) \cos \alpha - \frac{X_3}{r} \sin \alpha, \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Уравнения, описывающие зону контакта в системе координат $OX_1X_2X_3$, получим из (1.1) при $\psi = 0$ в виде

$$\xi_1 = r \frac{\Omega}{\omega} \sin\left(\beta - \frac{\omega}{\Omega} \alpha - \delta\right), \quad \xi_2 = -r \frac{\Omega}{\omega} \cos\left(\beta - \frac{\omega}{\Omega} \alpha - \delta\right), \quad \xi_3 = 0 \quad (4.7)$$

Из соотношений (4.7) следует, что зона контакта есть дуга окружности с центром в точке O и радиусом $r\Omega/\omega$. Поскольку величины $U, V, W, \alpha_1, \alpha_2$ малы, приходим к выводу, что величины $\delta_1 = \Omega/\omega - R/r$ и δ также малы. Далее в зоне контакта с точностью до малых второго порядка найдем

$$\begin{aligned} U &= -d_2, \quad V = r^{-1}R\delta, \quad W = -\delta_1, \quad d_2 = 1 - r^{-1}X_3 \\ U' &= \alpha + \delta R/r, \quad V' = d_2, \quad W' = \delta + r\alpha/R \end{aligned}$$

Форма деформированного бандажа и его натяжение определяются из уравнений (3.4–3.6). Уравнения (3.7) имеют тот же вид, только их правые части следует принять такими:

$$\begin{aligned} a_{0j} &= \delta R/r, \quad a_{1j} = d_2 \\ a_{2j} &= -\frac{R}{r} \delta - \frac{g_0}{n_0} \alpha_j - (-1)^j \frac{r v_{1j}}{n_0} \\ a_{3j} &= 1 - \frac{g_0}{n_0} - \left(1 + \frac{n_1 + n_{12}}{n_0}\right) d_2 + (-1)^j \frac{r v_{3j}}{n_0} \\ G_{ms} &= \frac{1}{2\gamma} \left[-\gamma \delta_1 - (-1)^m \frac{g_0}{n_0} \left(\frac{r}{R} \alpha_s + \delta\right) - (-1)^{m+s} \frac{r v_{2s}}{n_0} \right], \quad m, s = 1, 2 \end{aligned}$$

Решение полученных уравнений определяется по схеме разд. 3. В результате получим

$$\begin{aligned} F_1 &= \left[\frac{4g_0}{R(D_1^2 + 1)(D_3^2 + 1)} - \frac{2n_0 R}{r^2} \right] H_4 \delta \\ F_2 &= mR\omega^2 + 2 \left(\frac{g_0 r}{R^2 \gamma^2} - \frac{n_0}{r} \right) \gamma \delta_1 \operatorname{th} \pi \gamma + \frac{g_0}{R} \left(1 - \frac{g_0 r^2}{n_0 R^2 \gamma^2} \right) (\alpha_2 - \alpha_1) \\ P &= -r^{-1} n_0 (\alpha_2 - \alpha_1), \quad d_2 = -\frac{1}{2} H_2^{-1} (\alpha_2 - \alpha_1) \\ M_2 &= \left[\frac{2n_0 R}{r} - \frac{6g_0 r}{R(D_1^2 + 4)(D_3^2 + 4)} \right] H_4 \delta \\ M_3 &= -\frac{4g_0 r H_4 \delta}{R(D_1^2 + 1)(D_3^2 + 1)}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -2(1 + H_3) \frac{R}{r} \delta \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из равенств (4.8) при произвольных значениях величин F_1, F_2, P определяются

характеристики деформированного бандажа $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_1 + \alpha_2$, δ , δ_1 , d_2 и моменты M_2 , M_3 . После этого находится связь между угловыми скоростями Ω и ω согласно равенству $\Omega = \omega(Rr^{-1} + \delta_1)$.

Если в соотношениях (3.11), (4.8) между силами, моментами и величинами, характеризующими деформацию бандажа, пренебречь динамическими эффектами, положив $g_0 = 0$, то они совпадут с соответствующими соотношениями, полученными ранее [2, 3, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рокар Н.* Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
2. *Келдыш М.В.* Шимми переднего колеса трехколесного шасси // Тр. ЦАГИ. 1945. № 564. 34 с.
3. *Левин М.А., Фуфаев Н.А.* Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 271 с.
4. *Бидерман В.Л.* Критическая скорость качения пневматической шины // Расчеты на прочность. М.: Машгиз, 1961. Вып. 7. С. 324–349.
5. *Метелицын И.И.* Устойчивость движения автомобиля // Укр. мат. журн. 1952. Т. 4. № 3. С. 323–338; 1953. Т. 5. № 1. С. 80–92.
6. *Racejka H.B., Bakker E.* The magic formula tyre model // Proc. 1st Inter. Colloq. Tyre Models for Vehicle Dynamics Analysis. Delft, 1991. Amsterdam: Swets and Zeitlinger, 1993. P. 1–18.

Москва

Поступила в редакцию
30.V.1997