УДК 531.36

© 1998 г. А.П. Иванов

О РАЗРЫВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В СИСТЕМАХ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Рассматриваются механические системы с конечным числом степеней свободы, подчиненные одной или нескольким геометрическим односторонним связям. Наряду с основными видами движений – перелетами, опорными участками и невырожденными соударениями – в таких системах существуют более сложные разрывные движения, включающие бесконечное число ударов в любой окрестности начального момента времени. Эти движения возможны не только в случаях, когда непрерывных движений не существует, но и наряду с непрерывными движениями [1]. Доказывается, что в случае идеальных связей отличие их реакций в начальный момент времени от нуля гарантирует отсутствие разрывных движений. В случае систем с сухим трением имеется еще один тип разрыва – тангенциальный удар при нулевой скорости сближения. Для этого случая также получены достаточные условия непрерывности движения. Проверка этих условий проведена на примерах с использованием употребительных моделей удара.

1. Постановка задачи. Уравнения движения механической системы в форме Лагранжа имеют вид

$$\dot{p}_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \ldots n) \tag{1.1}$$

где T – кинетическая энергия, составленная при учете имеющихся идеальных двусторонних связей, Q_i – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i. При обычных требованиях, предъявляемых к функциям Q_i, T (например, непрерывная дифференцируемость в некоторой области), задача Коши для системы (1.1) корректна, а решения $\mathbf{q}(t)$ дважды дифференцируемы. Следовательно, фазовые кривые непрерывны.

В случае, когда система подчинена односторонней связи $q_1 \geqslant 0$, уравнения (1.1) остаются справедливыми лишь внутри области возможного движения $q_1 > 0$, а на ее границе $q_1 = 0$ возможно два типа движений, описываемых разными уравнениями. В первом из них – опорном – связь остается напряженной в течение некоторого интервала времени, при этом к действующим на систему активным силам добавляется реакция связи:

$$\dot{p}_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + R_i \tag{1.2}$$

Система (1.2) содержит избыточное число неизвестных, поэтому необходимо установить некоторые правила ее решения. Обычно поступают следующим образом. Сначала из физических соображений задают некоторый закон трения, что позволяет выразить $R_2, \ldots, R_n$ через R_1. Затем исключают обобщенные ускорения $\ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n$, в итоге остается единственное линейное (для классических законов трения) уравнение для определения двух неизвестных $\ddot{q}_1$ и R_1. Для исключения избыточной неизвестной величины используют так называемое условие дополнительности [2]. В итоге получают систему вида

$$\ddot{q}_1 = A_0 + A_1 R_1 \tag{1.3}$$

$$\ddot{q}_1 \geqslant 0, \;\; R_1 \geqslant 0, \;\; \ddot{q}_1 R_1 \equiv 0 \tag{1.4}$$

В уравнении (1.3) коэффициенты A_0 и A_1 зависят, вообще говоря, от фазовых переменных и времени.

Если односторонняя связь идеальна, то $A_1 > 0$, и система (1.3), (1.4) имеет единственное решение. При наличии сухого (кулонова) трения коэффициент A_1 может принимать и отрицательные значения; при этом в зависимости от знака A_0 уравнение (1.3) имеет несколько решений или не имеет ни одного решения, согласующегося с (1.4). Данные ситуации принято называть парадоксами Пэнлеве [3].

Специфика ударов состоит в разрывном характере фазовых кривых $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$. Удары происходят в такие моменты времени, в которые $q_1 = 0$, $\dot{q}_1 < 0$ и описываются уравнениями

$$p_i^+ - p_i^- = I_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \;\; (i = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

где $\mathbf{I}$ – вектор-функция, описывающая скачок скоростей ($I_1 \geqslant 0$, $\dot{q}_1^+ \geqslant 0$), индексы минус и плюс отвечают началу и концу удара.

Вид функции $\mathbf{I}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ зависит от физических свойств соударяемых твердых тел; важно, что в любом случае кинетическая энергия системы при ударе не возрастает.

Дадим определение решения уравнений движения в системе с односторонней связью, учитывающее возможности ослабления связи, опорной фазы и ударов.

Определение. Непрерывную вектор-функцию $\mathbf{q}(t)$ будем называть решением системы (1.1), (1.2), (1.5), если выполнены следующие условия:

1) для тех моментов времени, для которых $q_1 > 0$, функция $\mathbf{q}(t)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет системе (1.1);

2) в каждый момент времени, когда $q_1 = 0$, существуют односторонние производные $\dot{\mathbf{q}}\,(t \pm 0)$ и выполнены равенства (1.5);

3) если в некоторый момент времени имеют место равенства $q_1 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$, то существует $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ и выполнены условия (1.4).

Замечание. В [4] к решениям предъявлялось дополнительное требование: обобщенная скорость $\dot{\mathbf{q}}(t)$ имеет ограниченную вариацию на каждом ограниченном отрезке времени. Покажем, что это свойство в механических системах следует из энергетических соображений. Действительно, неограниченность вариации свидетельствовала бы о неограниченности суммы нормальных компонент ударных импульсов. При этом неограничена и величина p_1, а следовательно, и кинетическая энергия системы. Такое поведение системы на конечном интервале времени свидетельствовало бы о наличии внешнего источника энергии бесконечно большой мощности.

Первоочередная задача теории систем с неудерживающими связями состоит в определении условий существования решений, их единственности и характере зависимости от начальных условий и параметров. На сегодняшний день получен ряд результатов, относящихся к различным частным случаям этой задачи. Наиболее изучен случай идеальной связи (в уравнениях (1.2), (1.5) $R_j = 0$, $I_j = 0$ ($j = 2, \ldots, n$)) с ударами, описываемыми в соответствии с гипотезой Ньютона формулой

$$\dot{q}_1^+ = -e\dot{q}_1^-, \;\; e \in (0, 1] \tag{1.6}$$

где коэффициент восстановления e постоянен.

Доказано [5] существование решения с данными начальными условиями. Это решение может быть недифференцируемым в любой окрестности начального момента времени t_0 ввиду наличия ударов при $t = t_k$ ($k = 1, 2, ...$), где последовательность $\{t_k\}$ монотонно убывает к t_0 [1]. В примере, построенном в [1], такое бесконечно-ударное решение существует наряду с безударным решением, для которого $q_1 \equiv 0$. В биллиардной системе, рассмотренной в [6], безударных решений нет, хотя в начальный момент $q_1 = 0, \dot{q}_1 = 0$.

Достаточные условия единственности для систем биллиардного типа получены в [7, 8]: граница биллиарда либо имеет строго отрицательную гауссову кривизну, либо является линией уровня вещественно-аналитической функции.

Цель данной работы состоит в получении условий единственности решения в системах с одной или несколькими (не обязательно идеальными) односторонними связями.

Отметим, что в случае, если система допускает при данных начальных условиях непрерывно дифференцируемое решение, единственность эквивалентна отсутствию при $t > t_0$ ударных взаимодействий.

2. Случай идеальной односторонней связи. Допустим сначала, что система подчинена идеальной односторонней связи, что соответствует контакту тел с выпуклыми гладкими поверхностями без ребер (при этом величина q_1 равна расстоянию между телами). Кинетическая энергия является квадратичной формой по отношению к обобщенным скоростям (при наличии линейных членов порождаемые ими в уравнениях движения (1.1) слагаемые можно отнести к обобщенным силам), коэффициенты этой формы, а также функции $Q_i(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ будем предполагать непрерывно дифференцируемыми в области возможных движений.

Заметим, что одной из распространенных моделей теории виброударных систем является твердое тело, движущееся на массивном основании, перемещающемся по известному закону. В этом случае в уравнения (1.1), (1.2) входит кинетическая энергия относительного движения, а обобщенные силы включают силы инерции.

В силу отсутствия $R_2 = ... = R_n \equiv 0, I_2 = ... = I_n \equiv 0$. Данное обстоятельство позволяет получить ряд простых соотношений, описывающих удар. Из формул (1.5) получаем

$$p_j^+ = p_j^- \quad (j = 2, ..., n) \tag{2.1}$$

Выразим кинетическую энергию через обобщенную скорость $\dot{q}_1$ и обобщенные импульсы p_j. Несложные алгебраические выкладки показывают (см. [9]), что она распадается на сумму двух положительно определенных квадратичных форм, первая из которых зависит лишь от $\dot{q}_1$, вторая – лишь от p_j (коэффициенты могут зависеть от координат):

$$T = T_0(\dot{q}_1) + T^*(p_2, ..., p_n) \tag{2.2}$$

Вследствие равенств (2.1) второе слагаемое в формуле (2.2) при ударе остается неизменным. Следовательно, величина T_0 не возрастает, что эквивалентно неравенству

$$|\dot{q}_1^+| \le |\dot{q}_1^-| \tag{2.3}$$

Для замыкания уравнений удара к равенствам (2.1) необходимо добавить одно соотношение вида

$$\dot{q}_1^+ = f(\mathbf{q}, \dot{q}_1^-, p_2, ..., p_n) \tag{2.4}$$

согласующееся с (2.3) (частным случаем такого закона является равенство (1.6)).

Допустим, что в начальный момент времени имеем $q_1(t_0) > 0$, или $q_1(t_0) = 0$, $\dot{q}_1(t_0) >$ > 0. Тогда для значений времени, достаточно близких к начальному, решение лежит в области $q_1 > 0$, при этом оно описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1), для которой известны свойства существования и единственности. Случай $q_1(t_0) = 0, \dot{q}_1(t_0) < 0$ соответствует удару: после расчета значений $\dot{\mathbf{q}}(t_0 + + 0)$ по формулам (2.1), (2.4) он сводится к предыдущему или (при пластическом ударе) к нижеследующему случаю.

К наибольшим трудностям приводит анализ решения при условиях $q_1(t_0) = 0, \dot{q}_1(t_0) = = 0$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Если величина A_0 в формуле (1.3) отрицательна при $t = t_0$, то существует такое число $\tau > 0$, что на интервале система (1.1), (1.2), (1.5) имеет единственное решение. Для этого решения связь остается напряженной: $q_1(t_0) \equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$L = \tfrac{1}{2}/2q_1^2 - A_0 q_1 \tag{2.5}$$

В силу сделанных предположений величина A_0 отрицательна в некоторой окрестности начальной точки в расширенном фазовом пространстве. Следовательно, функция L неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда $q_1 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$. При ударах эта функция не возрастает ввиду неравенства (2.3), а в области $q_1 > 0$ ее полная производная, вычисленная в силу (1.1), допускает при учете неравенства $L \geqslant 0$ оценку

$$\frac{dL}{dt} = -q_1 \frac{dA_0}{dt} \leqslant -\frac{1}{A_0}\left|\frac{dA_0}{dt}\right| L \tag{2.6}$$

Для достаточно малых значений τ правая часть формулы (2.6) не превосходит $C_1 L$, где C_1 – некоторая константа. Отсюда следует

$$L(t) \leqslant L(t_0)\exp\{C_1(t - t_0)\}$$

и при учете начальных условий получаем, что $L(t) \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{q}(t) \equiv 0$. Данное равенство позволяет свести (1.2) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $n - 1$ и сделать вывод о единственности решения на основании общих теорем.

Приведем пример, показывающий необходимость условий теоремы 1.

Пример. Рассмотрим подъем груза на лифте. В поле силы тяжести при разгоне лифта груз сохраняет, согласно теореме 1, контакт с платформой. Если же внешние силы отсутствуют, то наряду с постоянным контактом возможны и решения, для которых груз во время разгона платформы подпрыгивает с возрастающей амплитудой. Построим одно из таких решений. Для этого сначала зададим закон движения груза $x(t)$ (кусочно-линейный), а затем определим зависимость высоты платформы от времени $S(t) \leqslant x(t)$, для которой груз может двигаться по этому закону.

Будем считать, что $t_0 = 0$ и строить решение с ударами в моменты $t_k = 2^{-k}$ и послеударными скоростями $\dot{x}(t_k + 0) = 4^{-k}$. При учете отсутствия внешних сил на промежутках между ударами движение равномерное, следовательно,

$$x(t_k) = \sum_{j=k}^{\infty}(t_j - t_{j+1})\dot{x}(t_{j+1} + 0) = \tfrac{1}{7}8^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Закон движения платформы, при котором груз совершает движение указанного типа, определим из соотношений

$$S(t_k) = x(t_k), \quad \dot{x}(t_k + 0) - \dot{S}(t_k) = e(\dot{S}(t_k - \dot{x}(t_k - 0)) \tag{2.7}$$

где коэффициент восстановления $c \in (0, 1]$ постоянен. Нетрудно построить дважды непрерывно дифференцируемую функцию $S(t)$, удовлетворяющую всем условиям (2.7) и такую, что ее вторая производная положительна при $t > 0$ (такая функция неединственна). Для этого можно воспользоваться одним из стандартных интерполяционных методов.

3. Случай нескольких идеальных связей. Теорему 1 можно обобщить на случай системы с несколькими идеальными односторонними связями. Построим локальную систему координат так, чтобы эти связи выражались неравенствами $q_i \geqslant 0$ ($i = 1, ..., k$).

Свободное движение описывается уравнениями (1.1). Для другого типа – опорного движения – эти уравнения принимают вид, аналогичный (1.2): при учете идеальности связей имеем

$$\dot{p}_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + R^{(i)}, \ \dot{p}_j - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \ (i = 1, ..., k; \ j = k+1, ..., n) \tag{3.1}$$

Здесь $R^{(i)}$ – реакция $q_i \geqslant 0$. Исключим из второй группы уравнений (3.1) обобщенные ускорения $\ddot{q}_j$ и приведем первую группу к виду

$$\mathbf{B}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{R}}, \tag{3.2}$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = (q_1, ..., q_k), \ \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = (F_1, ..., F_k), \ \tilde{\mathbf{R}} = (R^{(1)}, ..., R^{(k)})$$

В уравнениях (3.2) $\mathbf{B}$ – симметричная положительно определенная матрица порядка k, представляющая собой матрицу первой из квадратичных форм в разложении кинетической энергии на сумму, аналогичную (2.2):

$$T = T_0(\dot{q}_1, ..., \dot{q}_k) + T^*(p_{k+1}, ..., p_n) \tag{3.3}$$

Заметим, что в правой части формулы (3.3) отсутствуют произведения вида $\dot{q}_i p_j$. Данное обстоятельство объясняется не каким-то специальным видом обобщенных координат, а обусловлено определением (1.1) обобщенных импульсов p_j (см. лемму в [9]).

Для определения из уравнений (3.2) обобщенных ускорений и реакций связей в момент $t = t_0$ воспользуемся условиями дополнительности

$$\ddot{q}_i \geqslant 0, \ R^{(i)} \geqslant 0, \ \ddot{q}_i R^{(i)} \equiv 0 \ (i = 1, ..., k) \tag{3.4}$$

Как известно [10], для любой положительно определенной матрицы $\mathbf{B}$ и любого вектора $\tilde{\mathbf{F}}$ линейная алгебраическая по отношению к $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(t_0)$, $\tilde{\mathbf{R}}$ система (3.2) имеет единственное решение, удовлетворяющее (3.4). Отметим, что само по себе это обстоятельство не гарантирует существование непрерывного решения при $t > t_0$.

Для описания ударов об одну или несколько односторонних связей будем использовать соотношения (1.5). Заметим, что корректное определение удара о несколько связей в общем случае невозможно, так как функции $I_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ разрывны на поверхностях $q_i = 0$ [11]. Тем не менее формулы (2.1) остаются верными для $j = k + 1, ..., n$ [12]. Следовательно, второе слагаемое в формуле (3.3) при ударах не изменяется, а первое слагаемое – не возрастает. Это обстоятельство достаточно для доказательства следующего утверждения без конкретизации законов удара.

Теорема 2. Если все величины F_i ($i = 1, ..., k$) в формуле (3.2) отрицательны при $t = t_0$, то существует такое число $\tau > 0$, что на интервале $(t_0, t_0 + \tau)$ система (1.1), (3.1), (1.5) имеет единственное решение. Для этого решения связи остаются напряженными: $q_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, ..., k$).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$L = \tfrac{1}{2}(\mathbf{B}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - (\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{q}}) \tag{3.5}$$

Данная функция неотрицательна в некоторой окрестности начальной точки в фазовом пространстве и обращается в нуль на многообразии $q_i = 0, \dot{q}_i = 0$ ($i = 1, ..., k$).

Производная этой функции в силу уравнений (3.1) допускает оценку

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{B}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + (\mathbf{B}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - (\tilde{\mathbf{F}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - (\dot{\tilde{\mathbf{F}}}, \tilde{\mathbf{q}}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{B}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + (\tilde{\mathbf{R}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - (\dot{\tilde{\mathbf{F}}}, \tilde{\mathbf{q}}) \leqslant C_2 L, \quad C_2 = \mathrm{const} \tag{3.6}$$

При ударах об одну или несколько связей первое слагаемое в формуле (3.5), как отмечалось выше, не возрастает. При этом второе слагаемое может изменяться вследствие изменения одной из величин F_i, если соответствующая связь в момент удара ослаблена. Пусть $h_s = |\dot{\mathbf{q}}(t_s + 0) - \dot{\mathbf{q}}(t_s - 0)|$ – модуль скачка скоростей при ударе в момент $t = t_s \in (t_0, t_0 + \tau)$, тогда сумма ряда с общим членом h_s не превосходит вариации вектор-функции $\mathbf{q}(t)$ на интервале $(t_0, t_0 + \tau)$, т.е. ограничена (см. замечание в разд. 1).

Вследствие соотношений $q_i = O(L)$ получаем

$$L(t_s + 0) - L(t_s - 0) \leqslant C_3 h_s L(t_s - 0), \quad C_3 = \mathrm{const} \tag{3.7}$$

Пусть (t_1, t_2) – некоторый интервал безударного движения, тогда в силу (3.6)

$$L(t_2 - 0) \leqslant L(t_1 + 0)\exp\{C_2(t_2 - t_1)\} \tag{3.8}$$

Далее, при учете (3.7) имеем

$$L(t_2 + 0) \leqslant L(t_2 - 0)(1 + C_3 h_2) \tag{3.9}$$

Объединяя неравенства (3.8), (3.9) для всего интервала $(t_0, t_0 + \tau)$, получим

$$0 \leqslant L(t) \leqslant L(t_0)\exp(C_2\tau)\prod_s (1 + C_3 h_s) \tag{3.10}$$

Сходимость бесконечного произведения в формуле (3.10) следует из отмеченной выше сходимости ряда с общим членом h_s. Поскольку $L(t_0) = 0$, приходим к выводу, что $L(t) \equiv 0$, причем это равенство остается справедливым, пока все функции F_i в уравнениях (3.2) строго отрицательны.

4. Разрывные движения в системах с трением. Перейдем к обсуждению систем с сухим трением. Ограничимся случаем одной неудерживающей связи $q_1 \geqslant 0$. Связь между компонентами реакции в уравнениях (1.2) описывается формулами

$$R_j = \varphi_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})R_1 \quad (j = 2, \ldots, n) \tag{4.1}$$

Первая особенность систем с трением состоит в возможной отрицательности величины A_1 в уравнении (1.3) (возникающие при этом ситуации называют парадоксами Пенлеве). Кроме того, при ударе с трением неравенство (2.3) не следует прямо из законов динамики и подлежит дополнительной проверке для принятой модели удара.

Непосредственным обобщением теоремы 1 является следующее утверждение.

Теорема 3. Если в формуле (1.3) $A_0 < 0$, $A_1 > 0$ при $t = t_0$, и для достаточно малых значений скорости сближения при ударе о связь выполнено неравенство (2.3), то существует такое число $\tau > 0$, что на интервале t_0, $t_0 + \tau$ система (1.1), (1.2), (5.1), (1.5) имеет единственное решение. Для этого решения связь остается напряженной: $q_1(t) \equiv \equiv 0$.

Доказательство идентично доказательству теоремы 1.

Если одно из условий теоремы 3 не выполнено, в системе возможно разрывное решение. В случае $A_1 < 0$, $A_0 > 0$ (парадокс неединственности) система (1.3) допускает два решения, согласующихся с (1.4): 1) $\ddot{q}_1 = A_0$, $R_1 = 0$ и 2) $\ddot{q}_1 = 0$, $R_1 = -A_0/A_1$. Первое из этих решений соответствует ослаблению односторонней связи: $q_1 > 0$ при $t > t_0$. Для второго решения связь остается напряженной; заметим, что здесь мы получаем бесконечное множество различных решений при $t > t_0$, так как прекращение контакта может произойти в любой из моментов, пока сохраняются условия неединственности. Отбор "истинного" движения из возможных на основе законов динамики невозможен, поэтому для преодоления парадокса необходимо принять некоторые дополнительные физические допущения.

В частности, можно считать, следуя [13], что в данной ситуации шероховатые тела ведут себя подобно гладким, модифицировать закон трения [14], отказаться от абсолютной жесткости контактирующих тел [14, 15] или отбирать решение из соображений устойчивости [15]. Все эти методы приводят к первому из двух решений.

Заметим, что наряду с двумя непрерывными решениями в данном случае система обладает и разрывным решением: при подстановке начальных условий в правую часть формулы (1.5) получаем ненулевой скачок скоростей. Данная возможность аналогична нижеследующей.

В случае $A_1 < 0$, $A_0 < 0$ (парадокс несуществования) система (1.3), (1.4) несовместна. Следовательно, движение разрывно. Поскольку начальная скорость сближения тел $\dot{q}_1(t_0)$ равна нулю, данный тип движения называют тангенциальным ударом, или соударением без удара [16]. По окончании удара в общем случае $\dot{q}_1(t_0 + 0) > 0$, и связь ослабляется.

Допустим теперь, что первые два условия теоремы 3 выполнены, т.е. $A_1 > 0$, $A_0 < 0$, но неравенство (2.3) при данном законе удара (1.5) нарушается в сколь угодно малой окрестности нуля. Здесь имеется несколько подслучаев:

а) если $\lim \dot{q}_1^+ > 0$ при $\dot{q}_1^- \to -\ 0$, то в системе происходит удар, аналогичный тангенциальному, и связь ослабляется;

б) если $\lim \dot{q}_1^+ = 0$ при $\dot{q}_1^- \to -\ 0$, причем $\lim q_1^+ / |\dot{q}_1^-| = \theta > 1$, то при данных начальных условиях в системе наряду с непрерывным движением при напряженной связи возможны и разрывные движения. Такое движение включает бесконечную последовательность ударов, моменты которых равны $t_k = \lambda\theta^{-k} + O(\theta^{-2k})$, где λ – произвольное положительное число. Таким образом, имеем здесь бесконечно много возможных разрывных решений;

в) в случае если $\lim \dot{q}_1^+ / |\dot{q}_1^-| = 1$ при $\dot{q}_1^- \to -\ 0$, а функции $I_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^-)$, описывающие зависимость импульса от начальных условий удара, дифференцируемы, разрывное решение невозможно. Поскольку в этом случае неравенство (2.3) может нарушаться, сформулированное утверждение можно рассматривать как дополнение к теореме 3. Его можно доказать методами, использованными выше. При сделанных предположениях изменение нормальной составляющей скорости при ударе описывается формулой

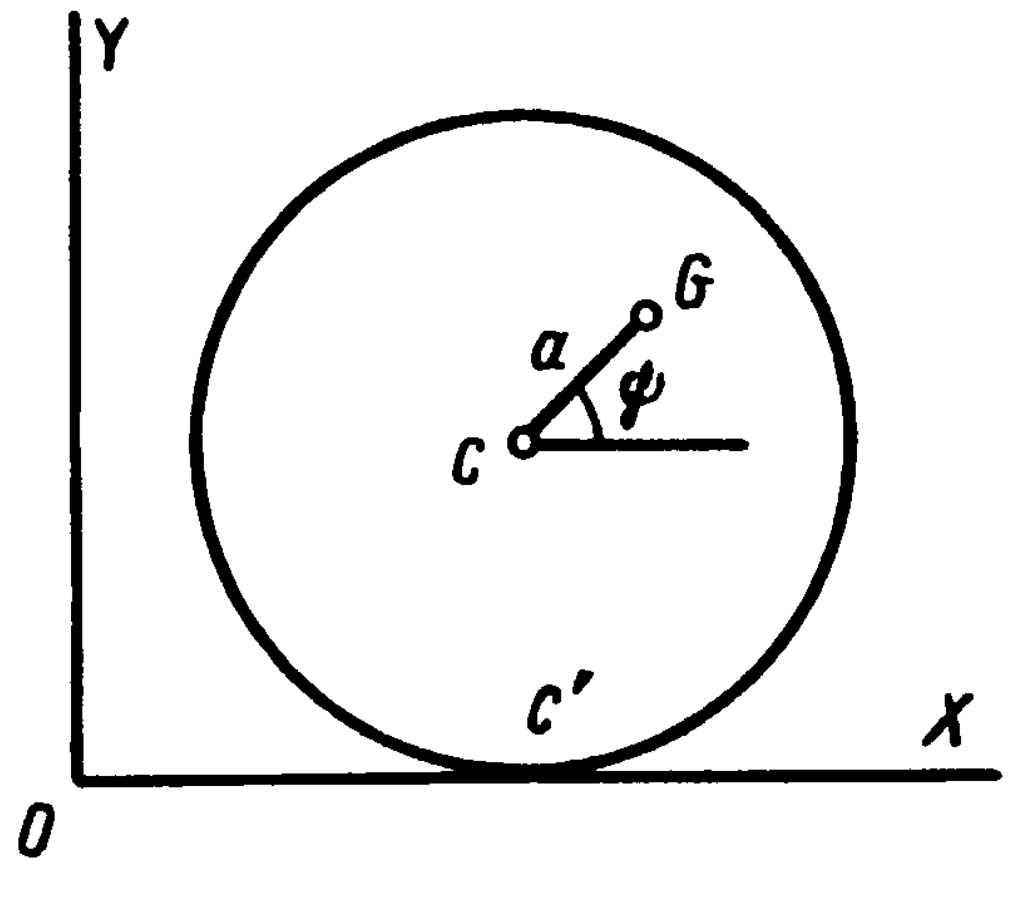
$$\left|\dot{q}_1^+\right| = \left|\dot{q}_1^-\right| + O\left(\left|\dot{q}_1^-\right|^2\right) \tag{4.2}$$

Для функции (2.5) на участках полета остается справедливой оценка (2.6), а при ударах о связь вследствие (4.2) имеем

$$\Delta L = \Delta \dot{q}_1 O(L) \tag{4.3}$$

Соотношение (4.3) аналогично (3.7), поэтому по аналогии с теоремой приходим к выводу, что $L \equiv 0$.

Таким образом, в системах с трением разрывные движения возникают в двух случаях: либо $A_1 < 0$, либо $\lim \dot{q}_1^+ / |\dot{q}_1^-| > 1$. Заметим, что выполнение этих неравенств в конкретных системах зависит от физических предположений разного рода: функция



$A_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ вполне определена законом трения (4.1), а для определения ударных импульсов в формуле (1.5) требуются дополнительные гипотезы о закономерностях ударов.

Ниже рассматривается пример системы с кулоновым трением, при этом используются некоторые наиболее известные модели удара.

Пример. Неоднородный диск на шероховатой опоре [14, 17]. Обозначим G центр масс диска, C – его геометрический центр, C' – точку контакта, r – радиус диска, $a = |CG|$. Положение диска в вертикальной плоскости определим при помощи координат точки C в системе OXY (ось OX горизонтальна) и угла ψ между CG и OX (фигура). Уравнения движения под действием силы тяжести и реакции опоры составим, используя основные теоремы динамики:

$$m(\dot{x} - a\dot{\psi}\sin\psi)^{\cdot} = R_X, \quad m(\dot{y} + a\dot{\psi}\cos\psi)^{\cdot} = -mg + R_Y$$
$$mk^2\ddot{\psi} = (r + a\sin\psi)R_X - a\cos\psi R_Y \tag{4.4}$$

где m – масса диска, k – его центральный радиус инерции.

Односторонняя связь выражается неравенством $y \geqslant r$; компоненты реакции связаны соотношением $R_X = -\mu R_Y \operatorname{sign}(\dot{x} + r\dot{\psi})$, где μ – коэффициент трения скольжения. Будем считать, что в начальный момент времени нормальная составляющая скорости точки контакта равна нулю, а горизонтальная ее составляющая отрицательна. Решение системы (4.4) приводит к уравнению вида (1.3), где

$$A_0 = a\dot{\psi}^2 \sin\psi - g, \quad A_1 = \frac{1}{mk^2}(k^2 + a^2\cos^2\psi - \mu a\cos\psi(r + a\sin\psi)) \tag{4.5}$$

Можно убедиться, что коэффициенты (4.5) могут принимать значения обоих знаков: величина A_0 положительна, если центр масс лежит выше геометрического центра, а скорость вращения достаточно велика. Значение A_1 отрицательно, если центр масс находится правее геометрического центра, а коэффициент трения достаточно велик: например, $\psi = 0$, $\mu > (k^2 + a^2)/ar$.

Уравнения классической теории удара можно получить из (4.4), заменяя производные от скоростей приращениями и пренебрегая эффектом действия силы тяжести [12]:

$$m\Delta(\dot{x} - a\dot{\psi}\sin\psi) = I_X, \quad m\Delta(\dot{y} + a\dot{\psi}\cos\psi) = I_Y$$
$$mk^2\Delta\dot{\psi} = (r + a\sin\psi)I_X - a\cos\psi I_Y, \quad \mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathbf{R}dt \tag{4.6}$$

где I_X, I_Y – компоненты ударного импульса, Δt – продолжительность соударения. Из уравнений (4.6) следует

$$mV_X' = a_{11}I_X' + a_{12}, \quad mV_Y' = a_{12}I_X' + a_{22}$$
$$a_{11} = 1 + (r + a\sin\psi)^2 k^{-2}, \quad a_{12} = -a\cos\psi(r + a\sin\psi)k^{-2}, \quad a_{22} = 1 + a^2k^{-2}\cos^2\psi$$

где матрица $\|a_{ij}\|$ положительно определена, штрих означает дифференцирование по переменной $\chi = I_Y$, монотонно возрастающей со временем, $V_X = \dot{x} + r\dot{\psi}$, $V_Y = \dot{y}$ – составляющие скорости точки контакта C'.

Рассмотрим сначала закономерности удара в парадоксальном случае, когда в начальный момент времени $A_1 < 0$. Тогда для достаточно малых значений χ величина $\Delta\dot{y}$ будет отрицательной. Это свидетельствует о наличии удара не только при наличии начальной скорости сближения ($\dot{y}(t_0) < 0$), но и в обсуждаемом случае, когда $\dot{y}(t_0) = 0$ (тангенциальный удар). Удар состоит из нескольких фаз. В первой из них диск "вдавливается " в опору: $V_Y' < 0$, при этом $mV_X' = \mu a_{11} + a_{12} > a_{12} - a_{11}a_{22} / a_{12} > 0$. После остановки относительного скольжения величина V_X остается равной нулю, при этом $mV_Y' = a_{22} - a_{12}^2 / a_{11} > 0$, т.е. вертикальная составляющая скорости в точке контакта увеличивается.

Момент, когда $V_Y = 0$, соответствует наибольшей деформации соударяемых тел. Если удар абсолютно неупругий, то он на этом заканчивается. Упругий удар включает в себя еще и фазу восстановления. По окончании такого удара диск приобретает вертикальную скорость, пропорциональную коэффициенту восстановления ударного импульса и начальной скорости скольжения.

В регулярном случае $A_1 > 0$ в течение всего удара выполняется неравенство $V_Y' > 0$. Если начальная скорость скольжения отлична от нуля, то она не изменит при ударе своего направления при условии, что вертикальная составляющая относительной скорости достаточно мала.

Использование кинематического коэффициента восстановления Ньютона, динамического коэффициента Пуассона или энергетического коэффициента Буланже – Стронга приводит к одинаковым расчетным результатам (см. [18]): $\dot{q}_1^+ = e\dot{q}_1^-$. Здесь согласно теореме 3 приходим к выводу об отсутствии в системе при данных начальных условиях разрывных движений. При использовании для построения модели удара другого энергетического определения коэффициента восстановления, предложенного в [18], вывод будет иным: в системе наряду с непрерывным движением возможен удар (подслучай *а*, обсуждавшийся выше).

Перейдем к обсуждению моделей удара, основанных на учете деформаций в зоне контакта. Не повышая размерности системы, будем считать возможным при ударах неравенство $q_1 < 0$, при этом реакция задается как некоторая явная функция $\mathbf{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, отличная от нуля лишь в области $q_1 < 0$. Сохраняя для компонент реакции кулоновский закон вида (4.1), получим семейство моделей, каждая из которых определяется функцией $R_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ и описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, уравнение (1.3) в области $q_1 < 0$ принимает вид

$$\ddot{q}_1 = A_0 + A_1 R_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{4.7}$$

Несмотря на количественное различие моделей (4.7), они обладают общими качественными свойствами.

Во-первых, тангенциальный удар имеет место лишь в случае несуществования непрерывных решений $A_0 < 0$, $A_1 < 0$. В случае неединственности $A_0 > 0$, $A_1 < 0$ при $t > t_0$ связь ослабляется под действием "конечной" силы A_0. Следовательно, данный парадокс разрешается в пользу непрерывного движения. В этом состоит отличие рассматриваемых моделей удара от классической.

Во-вторых, в случае несуществования тангенциальный удар приводит к остановке скольжения и отрыву диска от опоры.

В-третьих, в регулярном случае для достаточно малых значений начальной скорости сближения $|\dot{q}_1|$ направление скольжения в ходе удара не изменяется, откуда из энергетических соображений получаем $\dot{q}_1^+ \le |\dot{q}_1^-|$. Следовательно, выполнены условия теоремы 3.

Существуют и другие модели удара шероховатых тел, для которых трение не является кулоновым (см., например, [19]). При этом третье условие теоремы 3 может не выполняться, что приводит к существованию разрывных движений наряду с непрерывными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01440) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 96-2138).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bressan A.* Incompatibilità dei teoremi di esistenza e di unicità del moto per un tipo molto comune e regolare di sistemi meccanici. // Rend. Scu. Norm, di Pisa. 1959. P. 333–348.
2. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
3. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
4. *Moreau J.J.* Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics // Non-smooth mechanics and applications. Cours. and Lect. Intern. Cent. Mech. Sci 1988. No. 302. P. 1–82.
5. *Paoli L., Schatzman M.* Vibrations avec contraintes unilaterales et perte d'énergie aux impacts, en dimension finie // C.r. Acad. sci. Paris. Ser.1. 1993. T. 317. № 1. P. 97–101.
6. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
7. *Schatzman M.* A class of nonlinear differential equations of second order in time // Nonlinear Analysis, Theory. Meth. and Appl. 1978. V. 2. No. 3. P. 355–373.
8. *Percivale D.* Uniqueness in the elastic bounce problem // J. Different. Equat. 1985. V. 56. № 2. P. 206–215.
9. *Иванов А.П.* Об уравнениях движения неголономной системы с неудерживающей связью // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 717–723.
10. *Murty K.G.* Linear complementarity, linear and nonlinear programming. Berlin: Heldermann, 1988. 631 p.
11. *Иванов А.П.* Об ударах в системах с несколькими неудерживающими связями // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 559–566.
12. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
13. *Painlevé P.* Sur le lois du frottement de glissement. 2 // C.r. Acad. sci., 1905. V. 141. P. 401–406 = = Пэнлеве П. О законах трения скольжения. 2 // Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. С. 235–241.
14. *Lecornu L.* Sur le frottement de glissement // C.r. Acad. sci. 1905. V. 140. P. 635–637 = Лекорню Л. О трении скольжения. // Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. С. 221–224.
15. *Prandtl L.* Bemerkungen zu den Aufsatzen der Herren F. Klein, R.v. Mises und G. Hamel // Z. Math. und Phys. 1909. Bd. 58. S. 196–197. = Прандтль Л. Замечания к статьям Ф. Клейна, Р. Мизеса и Г. Гамеля // Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. С. 262–264.
16. *Painlevé P.* Sur le lois du frottement de glissement. 3 // C. r. Acad. sci. 1905. V. 141. P. 546–550. = = Пэнлеве П. О законах трения скольжения. 3 // Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. С. 241–249.
17. *Painlevé P.* Sur le lois du frottement de glissement // C. r. Acad. sci. 1905. V. 140. P. 702–707. = = Пэнлеве П. О законах трения скольжения // Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. С. 224–230.
18. *Иванов А.П.* Энергетика удара с трением // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 624–631.
19. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.IV.1997