УДК 531.36

© 1998 г. **А.П. Маркеев**

О КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПАРЫ НУЛЕВЫХ КОРНЕЙ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассматривается задача о движении автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности ее положения равновесия. Предполагается, что характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет пару чисто мнимых корней. Корни другой пары считаются близкими или равными нулю, причем в последнем случае этим корням отвечают непростые элементарные делители. Решена задача о существовании, бифуркациях и орбитальной устойчивости семейств периодических движений, рождающихся из положения равновесия. Дан анализ условно-периодических движений. Рассмотрен вопрос об ограниченности траекторий системы в окрестности положения равновесия в случае его неустойчивости по Ляпунову. В качестве приложения исследованы нелинейные колебания спутника вблизи его стационарного вращения вокруг нормали к плоскости орбиты.

1. Постановка задачи. Пусть движение системы с двумя степенями свободы описывается каноническими уравнениями

$$dq_j / dt = \partial H / \partial p_j, \quad dp_j / dt = -\partial H / \partial q_j \quad (j = 1,2) \tag{1.1}$$

Предположим, что начало координат $q_j = p_j = 0$ (j = 1, 2) фазового пространства является положением равновесия, а функция Гамильтона не зависит от t и аналитична в некоторой окрестности точки $q_j = p_j = 0$ (j = 1, 2).

Пусть характеристическое уравнение линеаризованной системы (1.1) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\Omega$ ($\Omega > 0$). Корни другой пары считаем близкими к нулю и их модули обозначим через $\varepsilon|\varkappa|$, где ε – малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$). Если величина $\varkappa$ равна нулю, то имеем точный резонанс (одна из частот малых колебаний равна нулю). В этом случае предполагаем, что нулевым корням характеристического уравнения отвечают непростые элементарные делители. При $\varkappa \neq 0$ имеет место неточный резонанс.

Если резонанс точный, то переменные q_j, p_j при помощи нормализующего преобразования могут быть выбраны так (см. [1]), что в разложении функции Гамильтона в ряд члены выше второй степени будут зависеть только от q_2 и комбинации $q_1^2 + p_1^2$. В дальнейшем рассматривается случай, когда в нормальной форме функции Гамильтона нет членов третьей степени. Этот случай не является исключительным, так как часто, например, разложение функции Гамильтона в ряд не содержит вовсе форм нечетных степеней относительно q_j, p_j.

При неточном резонансе в нормальной форме функции Гамильтона будет еще содержаться слагаемое $\frac{1}{2}\varepsilon\varkappa q_2^2$.

Будем считать, что нормализация уже проведена и, следовательно, функция

Гамильтона в уравнениях (1.1) имеет следующую (нормальную) форму:

$$H = \tfrac{1}{2}\delta_1\Omega(q_1^2 + p_1^2) + \tfrac{1}{2}\delta_2 p_2^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\varkappa q_2^2 +$$
$$+ \gamma q_2^4 + \tfrac{1}{2}\delta(q_1^2 + p_1^2)q_2^2 + \tfrac{1}{4}\sigma(q_1^2 + p_1^2)^2 + O_5 \qquad (1.2)$$

В (1.2) величины δ_1 и δ_2 равны 1 или –1, γ, δ, σ – постоянные, O_5 – сходящийся ряд, начинающийся с членов не ниже пятой степени относительно q_j, p_j (j = 1, 2). Всюду в дальнейшем предполагаем, что коэффициент γ в нормальной форме (1.2) отличен от нуля.

Как показано в [1], в случае точного резонанса при выполнении неравенства $\delta_2\gamma > 0$ положение равновесия $q_j = p_j = 0 (j = 1, 2)$ системы (1.1) устойчиво, а при $\delta_2\gamma < 0$ неустойчиво.

Одной из целей данной статьи является решение задачи о существовании, бифуркациях и орбитальной устойчивости периодических движений, рождающихся из положения равновесия. Кроме того, подробно исследуется характер нелинейных колебаний в окрестности положения равновесия как при точном, так и при неточном резонансе.

Отметим, что к рассмотренной в данной статье задаче о периодических движениях, рождающихся из положения равновесия при наличии нулевой частоты малых колебаний, неприменима теорема Ляпунова о голоморфном интеграле [2]. Другие резонансные случаи, когда теорема Ляпунова неприменима, но у характеристического уравнения нет нулевых корней, исследовались ранее (см., например, работы [3–6], в которых приведена и обширная библиография).

2. Дальнейшее преобразование гамильтониана. Предварительный анализ приближенной системы. Если в функции Гамильтона (1.2) отбросить члены выше четвертой степени, то уравнения движения будут иметь интеграл $r = r_0$, где $2r = q_1^2 + p_1^2$, $r_0 \geqslant 0$ – const. Примем величину r_0 за начальное значение переменной r в полной системе уравнений движения, когда в разложении функции Гамильтона в ряд учитываются члены всех степеней и положим $r_0 = \varepsilon|\gamma|^{-1}\rho_0$.

Вместо переменных q_j, p_j (j = 1, 2) введем новые канонически сопряженные переменные φ, ψ, ξ, η при помощи канонического преобразования вида

$$q_1 = \delta_2\sqrt{2r}\sin\varphi, \quad p_1 = \sqrt{2r}\cos\varphi \quad (r = r_0 + \varepsilon^{3/2}|\gamma|^{-1}\psi)$$
$$q_2 = \delta_2\varepsilon^{1/2}|\gamma|^{-1/2}\xi, \quad p_2 = \varepsilon|\gamma|^{-1/2}\eta \qquad (2.1)$$

Уравнениям движения в новых переменных соответствует функция Гамильтона

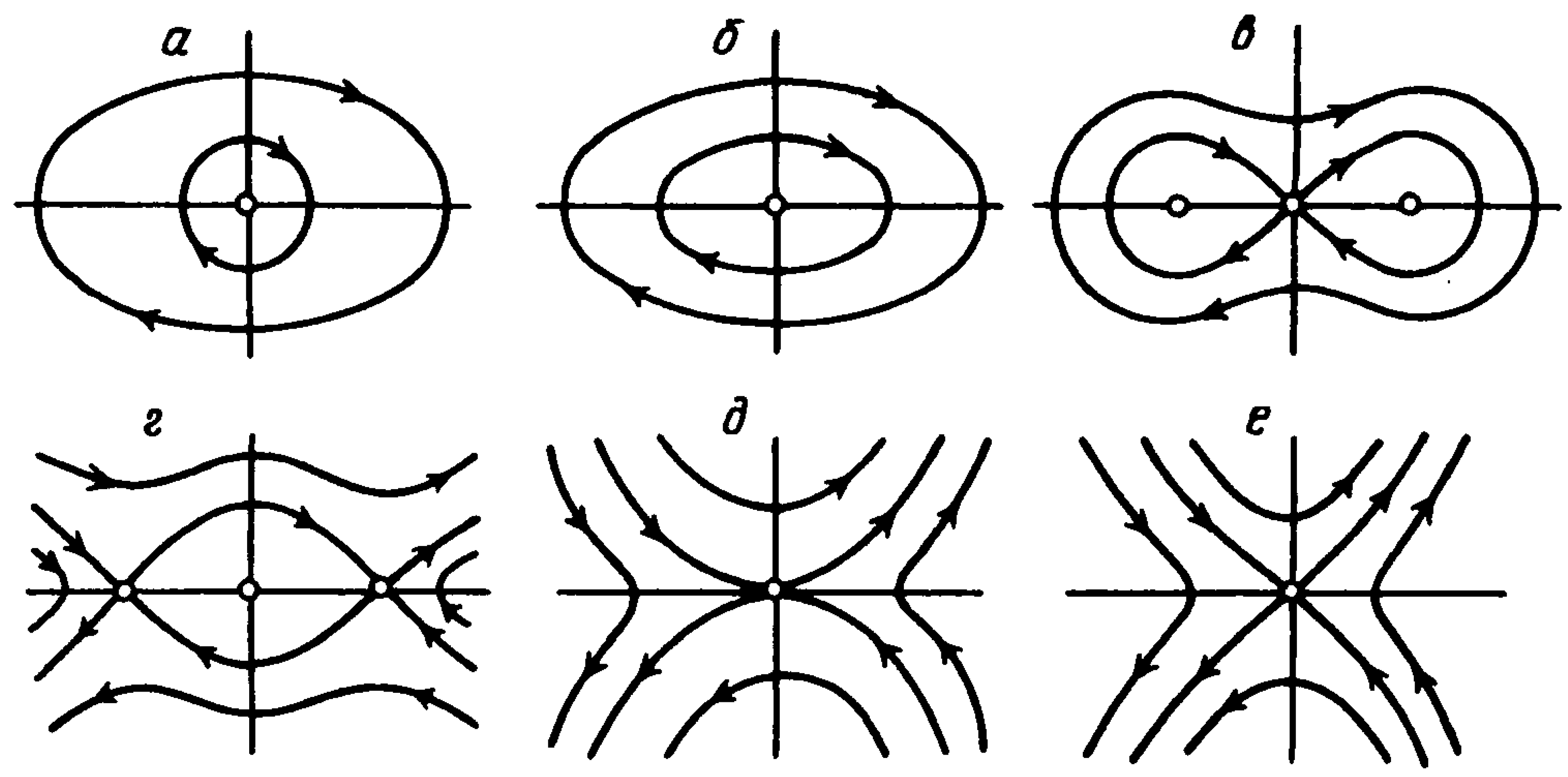
$$H = \sigma_1\Omega\psi + \varepsilon^{1/2}(\tfrac{1}{2}\eta^2 + \tfrac{1}{2}\sigma_2\nu^2\xi^2 + \sigma_3\xi^4) + O(\varepsilon) \qquad (2.2)$$

$$\nu^2 = |\chi|, \ (\nu \geqslant 0), \quad \chi = \varkappa + 2\delta|\gamma|^{-1}\rho_0$$

$$\sigma_1 = \delta_1\delta_2, \quad \sigma_2 = \delta_2 \operatorname{sign}\chi, \quad \sigma_3 = \delta_2 \operatorname{sign}\gamma$$

Если в функции Гамильтона (2.2) пренебречь величинами порядка ε и выше, то придем к приближенной системе, представляющей собой совокупность двух осцилляторов: линейного с гамильтонианом $\sigma_1\Omega\psi$ и нелинейного, гамильтониан которого представляет собой совокупность членов порядка $\varepsilon^{1/2}$ из (2.2). Этот гамильтониан содержит постоянную ρ_0 в качестве параметра.

Для линейного осциллятора с учетом (2.1) имеем $\psi(t) \equiv 0$, $\varphi(t) = \sigma_1\Omega t + \varphi(0)$. Фазовые портреты нелинейного осциллятора для случая $\nu = 0$ представлены в плоскости ξ, η на фиг. *б* и *д*, где $\sigma_3 = 1$ и $\sigma_3 = -1$ соответственно. Эти портреты, в частности, иллюстрируют устойчивость и неустойчивость начала координат $q_j =$



$= p_j = 0$ (j = 1, 2) исходной системы (1.1) при точном резонансе в случаях $\delta_2\gamma > 0$ и $\delta_2\gamma < 0$ соответственно (при этом в выражении для χ имеем $\varkappa = 0$, $\rho_0 = 0$).

Пусть теперь $\nu \neq 0$. В этом случае удобно от переменных φ, ψ, ξ, η перейти к канонически сопряженным переменным w_1, I_1, q, p по формулам

$$\xi = \nu q, \quad \eta = \nu^2 p, \quad \psi = \nu^3 I_1, \quad \varphi = w_1$$

а также ввести новое время $\tau = \nu t$.

В новых переменных имеем

$$H = \sigma_1\Omega_1 I_1 + \varepsilon^{1/2}(1/2\, p^2 + 1/2\, \sigma_2 q^2 + \sigma_3 q^4) + O(\varepsilon) \ (\Omega_1 = \nu^{-1}\Omega) \tag{2.3}$$

Теперь функция Гамильтона нелинейного осциллятора приближенной системы имеет вид

$$F = \varepsilon^{1/2}(1/2\, p^2 + 1/2\, \sigma_2 q^2 + \sigma_3 q^4) \tag{2.4}$$

а соответствующие уравнения движения становятся такими:

$$dq / d\tau = \varepsilon^{1/2} p, \quad dp / d\tau = -\varepsilon^{1/2}(\sigma_2 q + 4\sigma_3 q^3) \tag{2.5}$$

Рассмотрим положения равновесия $q = q_0$, $p = 0$ системы (2.5). Всегда есть положение равновесия, в котором $q_0 = 0$. Это равновесие устойчиво, если $\sigma_2 > 0$ и неустойчиво, если $\sigma_2 < 0$.

Если $\sigma_2\sigma_3 < 0$, то, помимо равновесия $q_0 = 0$, $p = 0$, есть еще два равновесия, в которых $p = 0$, а $q_0 = 1/2$ или $-1/2$. Эти равновесия устойчивы, если $\sigma_2 < 0$ и неустойчивы, если $\sigma_2 > 0$.

Фазовые портреты системы (2.5) представлены на фиг., *а–е* в плоскости q, p. На фиг. *а* и *в* величина $\sigma_3 = 1$, а $\sigma_2 = 1$ и -1 соответственно. На фиг., *г* и *е* $\sigma_3 = -1$, а величина σ_2 опять соответственно равна 1 и –1. Устойчивым равновесиям на фиг. *а, в, г, е* отвечают особые точки типа центр, а неустойчивым – седловые особые точки.

3. Семейства периодических движений. Положениям равновесия нелинейного осциллятора приближенной системы соответствуют ее периодические движения. В исходных переменных q_j, p_j эти периодические движения описываются формулами

$$q_1 = \delta_2 |\gamma|^{-1/2} \sqrt{2\varepsilon\rho_0}\sin\varphi, \quad p_1 = |\gamma|^{-1/2} \sqrt{2\varepsilon\rho_0}\cos\varphi(\varphi = \sigma_1\Omega t + \varphi(0)) \tag{3.1}$$

$$q_2 = \delta_2 |\gamma|^{-1/2} \nu\sqrt{\varepsilon} q_0, \quad p_2 = 0$$

Здесь либо $q_0 = 0$, либо (при $\sigma_2\sigma_3 < 0$) q_0 может принимать одно из трех значений: 0, $1/2$, $-1/2$.

Рассмотрим теперь полную систему с функцией Гамильтона (2.3). Предположим, что $\nu \neq 0$. Покажем, что тогда в полной системе существуют однопараметрические аналитические относительно $\varepsilon^{1/2}$ семейства периодических движений, стремящиеся при $\varepsilon \to 0$ к движениям (3.1). При $\sigma_2\sigma_3 > 0$ существует одно, а при $\sigma_2\sigma_3 < 0$ – три семейства периодических движений. Параметром семейств служит константа интеграла энергии или, что то же, величина ρ_0.

Для доказательства рассмотрим изоэнергетический уровень $H = c_* = \text{const}$. Учитывая выражение (2.3) для H и то, что $I_1(0) = 0$, разрешим уравнение $H = c_*$ относительно I_1:

$$I_1 = -K = -\sigma_1\Omega_1^{-1}F + O(\varepsilon) \tag{3.2}$$

где F – это функция (2.4). Не зависящие от q, p, w_1 слагаемые в (3.2) отброшены, $O(\varepsilon)$ – 2π-периодическая по w_1 аналитическая относительно q, p, ε функция.

На изоэнергетическом уровне $H = c_*$ уравнения имеют гамильтонову форму (уравнения Уиттекера [7]), причем роль функции Гамильтона играет функция K из (3.2), а роль независимой переменной – величина w_1. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} dq/dw_1 &= \varepsilon^{1/2}\sigma_1\Omega_1^{-1}p + O(\varepsilon) \\ dp/dw_1 &= -\varepsilon^{1/2}\sigma_1\Omega_1^{-1}(\sigma_2 q + 4\sigma_3 q^3) + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Найдем 2π-периодическое по w_1 решение системы (3.3). Ищем его в виде рядов

$$q = q_0 + \varepsilon^{1/2}q^{(1)} + \varepsilon q^{(2)} + \ldots, \quad p = \varepsilon^{1/2}p^{(1)} + \varepsilon p^{(2)} + \ldots \tag{3.4}$$

Подставив эти ряды в (3.3) и приравняв члены при одинаковых степенях $\varepsilon^{k/2}$, получим дифференциальные уравнения для коэффициентов $q^{(k)}, p^{(k)}$. Для $q^{(1)}, p^{(1)}$ имеем уравнения

$$dq^{(1)}/dw_1 = 0, \quad dp^{(1)}/dw_1 = 0$$

Общее решение этих уравнений есть $q^{(1)} = c^{(1)}$, $p^{(1)} = d^{(1)}$. Постоянные $c^{(1)}, d^{(1)}$ определяются на следующем шаге при нахождении 2π-периодического решения уравнений для $q^{(2)}, p^{(2)}$:

$$\begin{aligned} dq^{(2)}/dw_1 &= \sigma_1\Omega_1^{-1}d^{(1)} + Q^{(2)}(w_1) \\ dp^{(2)}/dw_1 &= -\sigma_1\Omega_1^{-1}(\sigma_2 + 12\sigma_3 q_0^2)c^{(1)} + P^{(2)}(w_1) \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $Q^{(2)}, P^{(2)}$ – 2π-периодические функции, не содержащие $c^{(1)}, d^{(1)}$.

Для периодичности $q^{(2)}, p^{(2)}$ необходимо и достаточно выбрать $c^{(1)}, d^{(1)}$ так, чтобы в разложениях правых частей уравнений (3.5) в ряды Фурье отсутствовали постоянные члены. Величина $\sigma_2 + 12\sigma_3 q_0^2$ из правой части второго из уравнений (3.5) равна σ_2 при $q_0 = 0$ и $-2\sigma_2$ при $q_0 = \pm 1/2$. Отсюда в силу предположения $\nu \neq 0$ и обозначений из (2.2) следует, что указанный выбор $c^{(1)}, d^{(1)}$ всегда возможен. Поэтому из (3.5) находим, что $q^{(2)} = f^{(2)} + c^{(2)}$, $p^{(2)} = g^{(2)} + d^{(2)}$, где $f^{(2)}$, $g^{(2)}$ 2π-периодичны по w_1, а $c^{(2)}, d^{(2)}$ – постоянные, определяемые на следующем шаге.

Процесс можно продолжить. При достаточно малых ε ряды (3.4) сходятся [8] и представляют собой 2π-периодические функции w_1, содержащие ρ_0 как параметр.

Зависимость w_1 от τ находится из уравнения $dw_1 / d\tau = \partial H / \partial I_1 = \sigma_1\Omega_1 + O(\varepsilon)$. Период построенных решений по t равен промежутку времени, за который величина w_1 возрастает на 2π. При $\varepsilon \to 0$ он стремится к величине $2\pi/\Omega$.

Периодические движения из тех семейств, которым при $\varepsilon \to 0$ соответствуют седловые особые точки на фиг. *а–е*, при достаточно малых ε орбитально неустойчивы; это следует из непрерывности характеристических показателей по ε. Как будет следовать из дальнейшего (см. разд. 4), периодические движения из семейств, которым при $\varepsilon \to 0$ на фиг. *а–е* отвечают особые точки типа центр для достаточно малых ε, являются орбитально устойчивыми.

Полученные выводы дают ясную картину бифуркаций периодических движений в окрестности начала координат $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$) исходной системы (1.1) в зависимости от коэффициентов нормализованного гамильтониана (1.2).

Рассмотрим сначала случай точного резонанса ($\varkappa = 0$). Если $\delta_2\gamma > 0$ (начало координат устойчиво), то при $\delta_2\delta > 0$ из начала координат рождается одно семейство периодических движений, которые орбитально устойчивы; эти движения зависят от величины r_0 как от параметра и при $r_0 \to 0$ переходят в положение равновесия $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$) (фиг., *а*). Если же $\delta_2\gamma > 0_0$, а $\delta_2\delta < 0$, то из начала координат рождаются три семейства периодических движений: одно орбитально неустойчиво, а два орбитально устойчивы; эти семейства при $r_0 \to 0$ "схлопываются" в начало координат (фиг., *в*).

Если $\delta_2\gamma < 0$ (начало координат неустойчиво), а $\delta_2\delta > 0$, то из начала координат рождаются также три семейства периодических движений, но теперь одно орбитально устойчиво, а два неустойчивы (фиг., *г*). Если же при $\delta_2\gamma < 0$ имеем $\delta_2\delta < 0$, то из неустойчивого начала координат рождается одно семейство орбитально неустойчивых периодических движений (фиг., *е*).

Пусть теперь резонанс не будет точным ($\varkappa \neq 0$). Наглядное представление о семействах периодических движений, рождающихся из начала координат $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$), снова можно получить из фиг., *а–е*. При $\delta_2\gamma > 0$ иллюстрацией будет фиг., *а* (случай $\delta_2\chi > 0$, когда рождается одно семейство орбитально устойчивых движений) и фиг., *в* (случай $\delta_2\chi < 0$, когда рождается одно семейство неустойчивых и два семейства устойчивых движений). Интересна эволюция бифуркационной картины при изменении величины ρ_0 в случае разных знаков величин $\varkappa$ и δ. Пусть, например, $\delta_2 > 0$, а $\varkappa > 0$, $\delta < 0$. Тогда единственное рождающееся из начала координат $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$) орбитально устойчивое семейство периодических движений с ростом ρ_0 теряет устойчивость, а в момент потери устойчивости (когда $\rho_0 = \varkappa|\gamma|\,|2\delta|^{-1}$) от него ответвляются два орбитально устойчивых семейства (фиг., *а* переходит в фиг., *в*). Если же $\delta_2 > 0$, а $\varkappa < 0$, $\delta > 0$, то, наоборот, с ростом ρ_0 неустойчивое семейство периодических движений становится устойчивым, а два устойчивых семейства исчезают (фиг., *в* переходит в фиг., *а*). Случай $\delta_2 < 0$ рассматривается аналогично.

Случай $\delta_2\gamma < 0$ иллюстрируется фиг., *г* ($\delta_2\chi > 0$; рождаются три семейства периодических движений: одно устойчивое и два неустойчивых) и фиг., *е* ($\delta_2\chi < 0$; рождается одно неустойчивое семейство). Здесь в случае разных знаков у величин $\varkappa$ и δ будет такая эволюция бифуркационной картины при изменении ρ_0: при $\delta_2 > 0$, $\varkappa > 0$, $\delta < 0$ с ростом ρ_0 неустойчивые семейства исчезают, а устойчивое становится неустойчивым (фиг., *г* переходит в фиг., *е*); при $\delta_2 > 0$, $\varkappa < 0$, $\delta > 0$ картина обратная: неустойчивое семейство становится устойчивым и от него ответвляются два неустойчивых семейства (фиг., *е* переходит в фиг., *г*). Случай $\delta_2 < 0$ рассматривается аналогично.

4. Об условно-периодических движениях. Рассмотрим более подробно характер нелинейных колебаний в окрестности положения равновесия $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$) системы (1.1). Ограничиваясь случаем $\nu \neq 0$, будем исследовать преобразованные уравнения движения с функцией Гамильтона (2.3).

Сначала рассмотрим приближенную систему. В ней $I_1(\tau) \equiv 0$, а переменные q, p удовлетворяют уравнениям (2.5). Эти уравнения имеют интеграл $F = h = \text{const}$, где F – функция (2.4). Фазовые портреты показаны на фиг., *а–е*. Ниже рассмотрены четыре случая, когда на фазовых портретах есть области, заполненные замкнутыми траекториями. Применяются стандартные обозначения: k – модуль эллиптических функций и интегралов, K и E – полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода. Для удобства введены также следующие обозначения:

$$h = \varepsilon^{1/2} a/16, \quad b = \sqrt{1+a}, \quad c = \sqrt{1-a}, \quad e = (b-1)^{1/2}/2$$

$$c_1 = (1-b)^{1/2}/2, \quad c_2 = (1+b)^{1/2}/2, \quad e_1 = (1-c)^{1/2}/2, \quad e_2 = (1+c)^{1/2}/2$$

1°. Случай $\sigma_3 = 1$, $\sigma_2 = 1$ (*фиг., а*). Здесь $a \geqslant 0$. При $a = 0$ имеем равновесие $q = p = 0$ системы (2.5). Случай $a > 0$ отвечает колебаниям в окрестности этого равновесия. При этом $-e \leqslant q(\tau) \leqslant e$. Если принять, что $q(0) = -e$, то

$$q = -e\,\mathrm{cn}(\sqrt{\varepsilon b}\tau, k), \quad k^2 = (1-b^{-1})/2$$

Частота колебаний (по τ) вычисляется по формуле $\omega = \pi\sqrt{\varepsilon b}K^{-1}/2$.

При $a > 0$ можно ввести переменные "действие – угол" I_2, w_2 [9]. Вычисления показывают, что

$$I_2(a) = (6\pi)^{-1} b^{1/2}[(b+1)K - 2E] \tag{4.1}$$

Обращение функции (4.1) с учетом принятых обозначений для a и b дает $h(I_2) = \varepsilon^{1/2} H^{(1)}(I_2)$, причем $\omega = \varepsilon^{1/2}\partial H^{(1)}/\partial I_2$. В малой окрестности точки $q = p = 0$ (где $0 < a \ll 1$) справедливы разложения

$$\omega = \varepsilon^{1/2}(1 + \frac{3}{16}a + \ldots), \quad h = \varepsilon^{1/2}(I_2 + \frac{3}{2}I_2^2 + \ldots)$$

Всюду в области колебаний ($a > 0$) функция $h(I_2)$ удовлетворяет условию невырожденности $d^2h/dI_2^2 \neq 0$. Действительно, вычисления показывают, что

$$\frac{d^2H^{(1)}}{dI_2^2} = \frac{6\pi^3 I_2}{a\sqrt{b}K^3} > 0$$

Отсюда и из равенства $h = \varepsilon^{1/2} H^{(1)}$ и следует невырожденность h.

2°. Случай $\sigma_3 = 1$, $\sigma_2 = -1$, $-1 < a < 0$ (*область колебаний на фиг., в*). При $\sigma_3 = 1$, $\sigma_2 = -1$ величина a удовлетворяет неравенству $a \geqslant -1$. Если $a = -1$, то имеем равновесие $q = 1/2$, $p = 0$ или $q = -1/2$, $p = 0$. При $-1 < a < 0$ происходят колебания в окрестности этих равновесий. Рассмотрим их подробнее, ограничиваясь, например, случаем колебаний в окрестности равновесия $q = 1/2$, $p = 0$. Тогда $c_1 \leqslant q(\tau) \leqslant c_2$, причем

$$q = c_2\,\mathrm{dn}(\sqrt{2\varepsilon}c_2\tau, k), \quad k^2 = 2b(1+b)^{-1}$$

Частота колебаний $\omega = \pi\sqrt{2\varepsilon}c_2K^{-1}$. Переменная действие вычисляется по формуле

$$I_2 = \sqrt{2}(6\pi)^{-1}c_2(E - 4c_1^2K)$$

В малой окрестности положения равновесия имеем

$$\omega = \sqrt{2\varepsilon}(1 - \frac{3}{16}(a+1) + \ldots), \quad h = \sqrt{\varepsilon}(-\frac{1}{16} + \sqrt{2}I_2 - 3I_2^2 + \ldots)$$

Всюду в области $-1 < a < 0$ функция $h(I_2) = \varepsilon^{1/2} H^{(1)}(I_2)$ удовлетворяет условию невырожденности, так как

$$\frac{d^2 H^{(1)}}{dI_2^2} = -\frac{6\sqrt{2}\pi^3 c_2 I_2}{c_1^2 (a+1) K^3} < 0$$

Случай $a = 0$ отвечает либо равновесию $q = p = 0$, либо двоякоасимптотическим к нему траекториям – сепаратрисам, отделяющим на фиг., *в* области колебаний в окрестности равновесий $q = \pm 1/2$, $p = 0$ от области вращений, в которой траектории охватывают все три положения равновесия. В области колебаний при приближении к сепаратрисе частота ω убывает, причем в достаточной близости к сепаратрисе, где $0 < -a \ll 1$, $\omega \cong -2\pi\varepsilon^{1/2} \ln^{-1}(-a)$.

3°. *Случай* $\sigma_3 = 1$, $\sigma_2 = -1$, $a > 0$ (*область вращений на фиг., в*). Здесь

$$q = -c_2 \operatorname{cn}(\sqrt{\varepsilon b}\tau, k), \quad k^2 = 1/2(1 + b^{-1})$$

$$\omega = \pi\sqrt{\varepsilon b}(2K)^{-1}, \quad I_2 = (3\pi)^{-1} b^{1/2}(2e^2 K + E)$$

$$\frac{d^2 H^{(1)}}{dI_2^2} = \frac{6\pi^3 I_2}{a\sqrt{b} K^3} > 0$$

Вблизи сепаратрисы, где $0 < a \ll 1$, имеем $\omega \cong -\pi\varepsilon^{1/2} \ln^{-1} a$.

4°. *Случай* $\sigma_3 = -1$, $\sigma_2 = 1$, $0 < a < 1$ (*область колебаний на фиг., г*). В случае $\sigma_3 = -1$, $\sigma_2 = 1$ при $a = 0$ имеет равновесие $q = p = 0$, а при $a = 1$ – либо равновесия $q = \pm 1/2$, $p = 0$, либо соединяющую их двоякоасимптотическую траекторию – сепаратрису. При $0 < a < 1$ имеем область колебаний в окрестности равновесия $q = p = 0$. В области колебаний

$$q = e_1 \operatorname{sn}(\sqrt{2\varepsilon} e_2 \tau, k), \quad k^2 = (1-c)(1+c)^{-1}$$

$$\omega = \pi\sqrt{2\varepsilon} e_2 (2K)^{-1}, \quad I_2 = (3\pi)^{-1}\sqrt{2} e_2 (E - cK)$$

$$\frac{d^2 H^{(1)}}{dI_2^2} = -\frac{3\sqrt{2}\pi^3 e_2 I_2}{4 e_1^2 (1-a) K^3} < 0$$

Вблизи равновесия $q = p = 0$ справедливы разложения

$$\omega = \varepsilon^{1/2}\left(1 - \frac{3}{16}a + \ldots\right), \quad h = \varepsilon^{1/2}\left(I_2 - \frac{3}{2} I_2^2 + \ldots\right)$$

а вблизи сепаратрисы $\omega \cong -\pi\sqrt{2\varepsilon} \ln^{-1}(1-a)$.

Вернемся теперь к полной системе с функцией Гамильтона (2.3). Для каждого из четырех рассмотренных случаев в переменных "действие–угол" I_1, I_2, w_1, w_2 имеем

$$H = H^{(0)}(I_1) + \varepsilon^{1/2} H^{(1)}(I_2) + \varepsilon H^{(2)}(I_1, I_2, w_1, w_2; \varepsilon^{1/2}), \quad H^{(0)} = \sigma_1 \Omega_1 I_1 \tag{4.2}$$

Функция $H^{(1)}(I_2)$ в каждом из случаев 1°–4° определена выше. В рассмотренных областях колебаний и вращения функция (4.2) 2π-периодична по w_1, w_2 и аналитична по всем своим аргументам. При этом имеет место случай собственного вырождения [10], так как при $\varepsilon = 0$ функция Гамильтона (4.2) зависит только от одной из переменных действие.

Как следует из приведенных выше результатов вычислений, гамильтониан (4.2) удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial I_1} \neq 0, \quad \frac{\partial H^{(1)}}{\partial I_2} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} \neq 0$$

Отсюда, согласно [10, 11], следует, что в полной системе (в рассмотренных в случаях 1°–4° областях) движение для большинства начальных условий будет условно-периодическим с частотами (по t) Ω и $\nu\,\omega$; лишь доля $O(\exp(-d_1\varepsilon^{-1/2}))$, $d_1 > 0 - \mathrm{const}$ фазового пространства не заполнена условно-периодическими траекториями.

При этом для всех начальных условий величины $I_j(t)$ $(j = 1,2)$ в полной системе при всех t, близки их начальным значениям: $|I_j(t) - I_j(0)| < d_2\varepsilon^{1/2}$ $(d_2 = \mathrm{const})$.

Отсюда, в частности, следует орбитальная устойчивость периодических движений из семейств, которым при $\varepsilon \to 0$ на фиг., *а–е* отвечают особые точки типа центр (см. разд. 3).

5. Замечание. Пусть имеет место точный резонанс, т.е. в (1.2) величина $\varkappa$ равна нулю. Тогда [1] при выполнении неравенства $\delta_2\gamma < 0$ положение равновесия $q_j = p_j = 0$ $(j = 1,2)$ системы (1.1) неустойчиво. Оказывается, однако, что если коэффициенты γ и δ нормальной формы функции Гамильтона (1.2) имеют противоположные знаки, то, несмотря на неустойчивость при $\delta_2\gamma < 0$ положения равновесия $q_j = p_j = 0$ $(j = 1,2)$ системы (1.1), ее траектории, начинающиеся достаточно близко к положению равновесия и такие, что $r_0 \neq 0$, при всех t могут оставаться в сколь угодно малой окрестности положения равновесия.

Действительно, случай $\varkappa = 0$, $\delta_2\gamma < 0$, $\gamma\delta < 0$ иллюстрируется фиг., *г* и *д*, где $r_0 \neq 0$ и $r_0 = 0$ соответственно. Из результатов же предыдущего раздела следует, что если $\delta_2\gamma < 0$ и $\gamma\delta < 0$ (т.е. $\sigma_3 = -1$, $\sigma_2 = 1$) и в начальный момент $t = 0$ имеем $q_1^2(0) + p_1^2(0) = 2r_0 \neq 0$ $(0 < r_0 \ll 1)$, то при всех $t > 0$ величина r близка к r_0, а $q_2(t)$, $p_2(t)$ сколь угодно близки к началу координат, если величины $|q_2(0)|$, $|p_2(0)|$ достаточно малы. Более точно, при всех $t > 0$ будут выполняться неравенства $|q_2(t)| < |\delta/(2\gamma)|^{1/2} r_0^{1/2}$, $|p_2(t)| < |\delta|\,|2\gamma|^{-1/2} r_0$. Эти неравенства следуют из оценок размеров области колебаний на фиг., *г*.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим следующий модельный пример. Пусть тяжелая материальная точка движется по неподвижной абсолютно гладкой поверхности, мало отличающейся от цилиндрической поверхности с горизонтальной образующей. Единицы измерения выберем так, чтобы масса точки, ускорение свободного падения и отличная от нуля кривизна поверхности в положении равновесия точки равнялись единице. Движение отнесем к неподвижной системе координат xyz, ось z которой направлена вертикально вверх. Поверхность зададим уравнением

$$z(x,y) = \tfrac{1}{2}x^2 + x^2y^2 - y^4$$

Уравнения движения точки можно записать в виде

$$\ddot{x} + (\ddot{z}+1)z_x = 0, \qquad \ddot{y} + (\ddot{z}+1)z_y = 0$$

Начало координат $x = y = 0$ является положением равновесия, причем это равновесие неустойчиво. Действительно, можно проверить, что уравнения движения допускают частные решения, для которых $x(t) \equiv 0$, а $y(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1+16y^6)\ddot{y} + 48y^5\dot{y}^2 - 4y^3 = 0 \tag{5.1}$$

Эти частные решения описывают движение материальной точки в вертикальной плоскости yz по абсолютно гладкой кривой $z = -y^4$. Для всех решений уравнения (5.1), кроме $y(t) \equiv 0$, имеем $|y(t)| \to \infty$, если $t \to \infty$. Отсюда следует неустойчивость равновесия $x = y = 0$.

Однако материальная точка при всех t может оставаться в малой окрестности равновесия $x = y = 0$, если только ее движение начинается достаточно близко к началу координат с малой начальной скоростью, причем $x^2(0) + \dot{x}^2(0) \neq 0$.

Чтобы показать справедливость этого утверждения, найдем нормальную форму функции Гамильтона. Введя обычным образом обобщенные импульсы p_x, p_y, получаем, что в окрестности положения равновесия

$$H = \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \tfrac{1}{2}x^2 + x^2y^2 - y^4 - \tfrac{1}{2}x^2p_x^2 + O_6$$

где O_6 – сходящийся ряд по степеням x, t, p_x, p_y, начинающийся с членом не ниже шестой степени.

Имеет место точный резонанс, так как одна из частот малых колебаний равна нулю. При этом соответствующим нулевым корням характеристического уравнения отвечают непростые элементарные делители. Квадратичная часть функции Гамильтона (6.3) уже имеет нормальную форму. Нормализация же членов четвертой степени может быть осуществлена при помощи унивалентной канонической замены переменных $x, y, p_x, p_y \to q_1, q_2, p_1, p_2$, задаваемой следующей производящей функцией:

$$S = xp_1 + yp_2 + S_4$$

$$S_4 = \frac{1}{16}(x^3p_1 - 4x^2yp_2 + 8xy^2p_1 - xp_1^3 - 4xp_1p_2^2 + 4yp_1^2p_2)$$

Нормализованная до членов четвертой степени включительно функция Гамильтона запишется в виде

$$H = \tfrac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \tfrac{1}{2}p_2^2 - q_2^4 + \tfrac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2)q_2^2 - 1/16(q_1^2 + p_1^2)^2 + O_6$$

Таким образом, в (1.2) имеем $\delta_2 = 1, \gamma = -1, \delta = 1$. Отсюда при учете вида замены переменных $x, y, p_x, p_y \to q_1, q_2, p_1, p_2$ следует справедливость сформулированного выше утверждения об ограниченности движения точки в окрестности ее неустойчивого положения равновесия $x = y = 0$.

6. Периодические движения спутника, близкие его стационарному вращению. Рассмотрим движение динамически симметричного спутника – твердого тела относительно центра масс на круговой орбите. Пусть $OXYZ$ – орбитальная система координат с началом в центре масс спутника (ось OZ направлена вдоль радиуса-вектора центра масс, OX и OY – соответственно по трансверсали и бинормали к орбите), а $Oxyz$ – жестко связанная со спутником система координат, образованная главными центральными осями инерции (ось Oz направлена вдоль оси симметрии спутника). Ориентацию связанной системы координат относительно орбитальной зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ. Соответствующие обобщенные импульсы обозначим через p_ψ, p_θ, p_φ.

Пусть A и C – экваториальный и полярный моменты инерции спутника, а ω_0 – среднее движение центра масс по орбите. Координата φ является циклической, поэтому $p_\varphi = C\Omega_0 = \mathrm{const}$, где Ω_0 – проекция угловой скорости спутника на его ось симметрии.

Известно [12], что при любом Ω_0 уравнения движения допускают решение $\psi = \pi$, $\theta = \pi/2$, $p_\psi = p_\theta = 0$. Для этого решения ось симметрии спутника перпендикулярна к плоскости орбиты, а спутник вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью Ω_0. Решение задачи об устойчивости этого стационарного вращения спутника зависит от двух безразмерных параметров α, β, ($\alpha = C/A$, $\beta = \Omega_0/\omega_0$).

Эта задача подробно исследована (см. работы [12–14] и приведенную в них библиографию). В частности, была исследована [13] устойчивость на кривой $\alpha\beta - 1 = 0$ (при $2/3 < \alpha \leqslant 2$) и на кривой $\alpha\beta + 3\alpha - 4 = 0$ (при $0 < \alpha \leqslant 2$). Эти кривые разделяют в плоскости α, β области устойчивости и неустойчивости; для значений α и β, принадлежащих этим кривым, характеристическое уравнение линеаризованных уравнений возмущенного движения имеет пару чисто мнимых и пару нулевых корней, которым соответствуют непростые элементарные делители. Показано [13], что на кривой $\alpha\beta - 1 = 0$ при $2/3 < \alpha < 1$ стационарное вращение неустойчиво, а при $1 < \alpha \leqslant 2$ – устойчиво. На кривой $\alpha\beta + 3\alpha - 4 = 0$ при $0 < \alpha < 1$ и $4/3 < \alpha \leqslant 2$ имеет место устойчивость, а при $1 < \alpha < 4/3$ – неустойчивость.

Опираясь на результаты разд. 2–4, рассмотрим периодические движения оси симметрии спутника вблизи нормали к плоскости орбиты для значений параметров α и β, лежащих на упомянутых границах областей устойчивости или вблизи них. Для этого надо получить нормальную форму (1.2) гамильтониана возмущенного движения.

Если ввести возмущения Q_j, P_j, положив

$$\theta = \pi/2 + Q_1, \quad \psi = \pi + Q_2, \quad p_\theta = A\omega_0 P_1, \quad p_\psi = A\omega_0 P_2$$

то функция Гамильтона возмущенного движения запишется в виде ряда, в котором отсутствуют формы нечетных степеней относительно Q_j, P_j $(j = 1,2)$.

Пусть $\alpha\beta - 1 = \varepsilon\Delta_1$, $\Delta_1 = \operatorname{sign}(\alpha\beta - 1)$. Тогда, как показывают вычисления, в нормальной форме (1.2) имеем

$$\begin{gathered}\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = \operatorname{sign}(\alpha - 1), \quad \Omega = \sqrt{3\alpha - 2} + O(\varepsilon) \\ \varkappa = 3\Delta_1|\alpha - 1|\Omega^{-2} + O(\varepsilon), \quad \gamma = 9/8(\alpha - 1)^2\Omega^{-4} + O(\varepsilon) \\ \delta = -27/4\delta_2(\alpha - 1)^2\Omega^{-5} + O(\varepsilon)\end{gathered} \tag{6.1}$$

Если же $\alpha\beta + 3\alpha - 4 = \varepsilon\Delta_2$, $\Delta_2 = \operatorname{sign}(\alpha\beta + 3\alpha - 4)$, то коэффициенты нормальной формы (1.2) будут такими:

$$\begin{gathered}\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -\operatorname{sign}(\alpha - 1), \quad \Omega = \sqrt{9\alpha^2 - 15\alpha + 7} + O(\varepsilon) \\ \varkappa = 3\Delta_2|\alpha - 1|\Omega^{-2} + O(\varepsilon), \quad \gamma = 9/8(\alpha - 1)^2(4 - 3\alpha)\Omega^{-4} + O(\varepsilon) \\ \delta = 9/4\delta_2(\alpha - 1)^2(72\alpha^2 - 111\alpha + 44)\Omega^{-5} + O(\varepsilon)\end{gathered} \tag{6.2}$$

Выражения (6.1), (6.2) на основании результатов разд. 2–4 дают подробную картину, описывающую характер нелинейных колебаний оси симметрии спутника вблизи нормали к плоскости орбиты для значений параметров α, β, лежащих в окрестности кривых $\alpha\beta - 1 = 0$ и $\alpha\beta + 3\alpha - 4 = 0$. Остановимся для краткости только на случае точного резонанса (т.е., когда в (6.1) и (6.2) $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$).

На кривой $\alpha\beta - 1 = 0$ при $2/3 < \alpha < 1$ (где стационарное вращение неустойчиво) существует одно семейство орбитально неустойчивых периодических движений с периодом, близким $2\pi/\Omega$ (фиг., *е*); если же $1 < \alpha \leqslant 2$ (когда стационарное вращение устойчиво), то существуют два семейства орбитально устойчивых периодических движений и одно орбитально неустойчивое (фиг., *в*).

На кривой $\alpha\beta + 3\alpha - 4 = 0$ при $0 < \alpha < 1$ и $4/3 < \alpha \leqslant 2$ (где стационарное вращение устойчиво) существует одно семейство орбитально устойчивых периодических движений (фиг., *а*). Если же $1 < \alpha < 4/3$, то существует два семейства орбитально неустойчивых и одно семейство орбитально устойчивых периодических движений (фиг., *г*).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сокольский А.Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 24–33.
2. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1956. Т. 2. С. 7–263.
3. *Henrard J.* Lyapunov's center theorem for resonant equilibrium // J. Different. Equat. 1973. V. 14. № 3. P. 431–441.
4. *Schmidt D.S.* Periodic solutions near a resonant equilibrium of a hamiltonian system // Celest. Mech. 1974. V. 9. № 1. P. 81–103.
5. *Meyer K.R.* Bibliographic notes on generic bifurcations in hamiltonian systems // Contemp. Math. 1986. № 56. P. 373–381.

6. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 295 с.
7. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414 с.
8. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
9. *Борн М.* Лекции по атомной механике. Харьков; Киев: Гос. научн.-техн. изд-во Украины, 1934. 312 с.
10. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
11. *Нейштадт А.И.* Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1016–1025.
12. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.:Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
13. *Сокольский А.Г.* К задаче об устойчивости регулярных прецессий симметричного спутника // Космич. исследования. 1980. Т. 18. Вып. 5. С. 698–706.
14. *Маркеев А.П.* Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника // Космич. исследования. 1967. Т. 5. Вып. 3. С. 365–375.

Поступила в редакцию
31.III.1997

Москва