УДК 531.36

© 1998 г. В.Н. Тхай

О МЕТОДЕ ЛЯПУНОВА–ПУАНКАРЕ В ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ[1]

Решается задача о периодических движениях системы с малым параметром. Исследуются негрубые случаи, когда задача не решается порождающей системой, полученной при нулевом значении малого параметра. Систематически разрабатывается идея Ляпунова об использовании новой порождающей системы, уже содержащей малый параметр. Исследуются системы общего вида, обратимые системы и системы, близкие к обратимым.

1. Постановка задачи. Рассмотрим достаточно гладкую автономную или 2π-периодическую систему

$$\mathbf{x}^\bullet = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) + \mu\mathbf{X}_1(\mu, \mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

с малым параметром μ. Предположим, что при $\mu = 0$ порождающая система

$$\mathbf{x}^\bullet = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \tag{1.2}$$

допускает периодическое решение $\mathbf{x} = \varphi(t)$, и исследуем вопрос о существовании в системе (1.1) при $\mu \neq 0$ периодического решения, переходящего в решение $\varphi(t)$ при $\mu \to 0$.

Постановка данной задачи принадлежит Пуанкаре [1], основным методом ее решения является метод Пуанкаре [1, 2], предложенный первоначально для задач небесной механики [1] и подробно разработанный для аналитических систем общего вида (1.1) [2]. При решении задачи возникают два случая: а) грубый, когда свойство системы (1.1) иметь периодическое решение определяется только порождающей системой, б) негрубый, когда для решения задачи необходимо привлекать к рассмотрению возмущения $\mu\mathbf{X}_1$. В системах общего вида (1.1) грубым является изолированный по Пуанкаре случай [2].

Порождающая система (1.1) принадлежит определенному классу **K**, например, является консервативной, системой Ляпунова и т.д. Возмущения также рассматриваются из некоторого класса **P**. Система (1.2) из класса **K** может быть грубой в смысле свойства обладать периодическим решением для возмущений из класса $\mathbf{P}_1$ и стать негрубой для возмущений из класса $\mathbf{P}_2$. Классы **K** и **P** определяются содержанием исследуемой конкретной задачи. В теоретическом плане и при решении прикладных задач корректно полагать класс **P**, совпадающим с классом **K**, или возмущения $\mu\mathbf{X}_1$ предполагать более общего вида.

В негрубых случаях обычно привлекаются к анализу возмущения конечного (как правило – первого) по малому параметру порядка [2]. Тем самым фактически (неявно) строится новая порождающая система, уже содержащая малый параметр. Идея выбора такой порождающей системы (в задаче Хилла) принадлежит Ляпунову [3],

[1] Статья посвящена 140-летию со дня рождения А.М. Ляпунова.

однако впоследствии не разрабатывалась. Подход Ляпунова в известных случаях приводит к тем же самым результатам, что и метод Пуанкаре. Такой подход оказывается предпочтительным при анализе ряда негрубых случаев, в частности, для колебательных систем стандартного вида. Это позволяет сформулировать условия существования периодического решения в форме, принятой в методах усреднения.

Ставится задача о систематической разработке идеи Ляпунова в задаче о периодических решениях системы с малым параметром в негрубых случаях. Рассматриваются системы общего вида, обратимые системы и системы, близкие к обратимым.

2. Выбор порождающей системы. Рассмотрим автономную или 2π-периодическую систему

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{X}(\varepsilon, \mathbf{x}, t) + \mu \mathbf{X}_1(\varepsilon, \mu, \mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \tag{2.1}$$

с двумя малыми параметрами ε и μ. Предположим, что при $\mu = 0$ система (2.1) допускает $2T^*(\varepsilon)$-периодическое решение $\mathbf{x} = \varphi(\varepsilon, t)$, $\varphi(\varepsilon, 0) = \mathbf{x}^*$ ($T^*(\varepsilon) = \pi$ для 2π-периодической системы (2.1)). Выясним, в каком классе функций $\mu = \mu(\varepsilon)$ вопрос о существовании в (2.1) периодического движения решается порождающей системой, полученной из (2.1) при $\mu = 0$. Тем самым, очевидно, разрешается вопрос о выборе порождающей системы, содержащей малый параметр.

Обозначим через $\mathbf{x}(\varepsilon, \mu, x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ, t)$ решение системы (2.1) с начальными условиями $x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ$. Тогда необходимые и достаточные условия $2T$-периодичности решения ($T = \pi$ для 2π-периодической системы) имеют вид

$$x_s(\varepsilon, \mu, x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ, 2T) - x_s^\circ = 0 \quad (s = 1, \ldots, m) \tag{2.2}$$

и представляют собой систему m функциональных уравнений относительно $x_1^\circ, \ldots, x_m^\circ$ (и T – в случае автономной системы). Эта система совместна при $\mu = 0$ и имеет решение $\mathbf{x}^\circ = \mathbf{x}^*$, $T = T^*$. Поэтому, вводя приращения $\Delta\mathbf{x}^\circ = \mathbf{x}^\circ - \mathbf{x}^*$, $\Delta T = T - T^*$, систему (2.2) можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{m} [F_{sj}^*(\varepsilon) + F_{sj}]\Delta x_j^\circ + [G_s^*(\varepsilon) + G_s]\Delta T + \mu \Psi_s(\varepsilon, \mu, \Delta\mathbf{x}^\circ, \Delta T) = 0 \quad (s = 1, \ldots, m) \tag{2.3}$$

Функции F_{sj}, G_s зависят от ε, $\Delta\mathbf{x}^\circ$, ΔT и обращаются в нуль при $\Delta\mathbf{x}^\circ = \mathbf{0}$, $\Delta T = 0$.

1°. *Периодическая система.* Здесь $\Delta T = 0$. В случае $\operatorname{rank}\|F_{sj}^*(0)\| = m$ имеем грубый по ε и μ случай, и решение $\mathbf{x} = \varphi(0, t)$ системы (2.1) при $\varepsilon = \mu = 0$ продолжается по параметрам ε и μ [2].

Рассмотрим негрубый случай, когда $\operatorname{rank}\|F_{sj}^*(0)\| = m - k$ $(k > 0)$. Здесь, без ограничения общности, положим

$$F_{\alpha j}^*(\varepsilon) = \varepsilon[a_{\alpha j} + F_{\alpha j}^\circ(\varepsilon)] \quad (\alpha = 1, \ldots, k), \quad \Delta x_s^\circ = \varepsilon \xi_s \quad (s = 1, \ldots, m)$$

причем $a_{\alpha j}$ не зависят от ε, а $F_{\alpha j}^\circ(0) = 0$. Тогда система (2.3) принимает вид

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{m} \left[a_{\alpha j} + F_{\alpha j}^\circ(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} F_{\alpha j}(\varepsilon, \varepsilon\xi)\right]\xi_j + \frac{\mu}{\varepsilon^2}\Psi_\alpha(\varepsilon, \mu, \varepsilon\xi) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, k) \\
\sum_{j=1}^{m} [F_{\beta j}^*(\varepsilon) + F_{\beta j}(\varepsilon, \varepsilon\xi)]\xi_j + \frac{\mu}{\varepsilon}\Psi_\beta(\varepsilon, \mu, \varepsilon\xi) = 0 \quad (\beta = k+1, \ldots, m)
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Если $\mu = O(\varepsilon^{2+\sigma})$, $\sigma > 0$, то система (2.4) при $\varepsilon = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_s = 0 (s = 1, \ldots, m)$ при условии, что

$$\operatorname{rank}\left\| \begin{matrix} a_{\alpha j} \\ F^*_{\beta j}(0) \end{matrix} \right\| = m \tag{2.5}$$

При выполнении условия (2.5) система (2.4) совместна также при достаточно малом $\varepsilon \neq 0$, причем $\xi_s = O(\varepsilon^\sigma)$ ($s = 1,\ldots, m$), если $\Psi_s(0, 0, \mathbf{0}) \neq 0$ ($s = 1,\ldots, m$). Поэтому в общем случае имеем $\Delta \mathbf{x}^\circ = O(\varepsilon^{1+\sigma})$.

Аналогичные рассуждения справедливы и в случае, когда невырожденность матрицы $\| F^*_{sj}(\varepsilon) \|$ проверяется членами порядка ε^ν включительно.

Теорема 1. Пусть в 2π-периодической системе (2.1) при $\mu = 0$ существует 2π-периодическое решение. Тогда в любом классе функций $\mu = O(\varepsilon^{2\nu+\sigma})$, $\sigma > 0$, система (2.1) также имеет 2π-периодическое решение, если $\operatorname{rank} \| F^*_{sj}(\varepsilon) \| = m$, и это условие проверяется полиномами Тейлора порядка ν для функций $F^*_{sj}(\varepsilon)$. При этом начальные условия для периодических решений при $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$ отличаются на величины порядка $\varepsilon^{\nu+\sigma}$.

Случай $\operatorname{rank} \| F^*_{sj}(0) \| = m - k$ возникает, в частности, когда решение $\mathbf{x} = \varphi(0, t)$ принадлежит k-семейству, т.е. система (2.1) при $\varepsilon = \mu = 0$ допускает k-семейство 2π-периодических решений. В этом случае функции $F_{\alpha j}$($\alpha = 1,\ldots,k$) в (2.3) обращаются в нуль вместе с ε. Поэтому система (2.3) разрешима при более слабом условии $\mu = O(\varepsilon^{1+\sigma})$, $\sigma > 0$.

Теорема 2. Пусть в 2π-периодической системе (2.1) при $\mu = 0$ существует 2π-периодическое решение $\mathbf{x} = \varphi(\varepsilon, t)$, которое при $\varepsilon = 0$ принадлежит некоторому семейству. Тогда в любом классе функций $\mu = O(\varepsilon^{1+\sigma})$, $\sigma > 0$, система (2.1) также имеет 2π-периодическое решение, если $\operatorname{rank} \| F^*_{sj}(\varepsilon) \| = m$, и это условие проверяется с учетом линейных по ε членов в матрице $\| F^*_{sj}(\varepsilon) \|$. При этом начальные условия для периодических движений при $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$ отличаются на величины порядка ε^σ.

2°. *Автономная система*. В этом случае ΔT может отличаться от нуля, и при анализе совместности системы (2.3) матрицу $\| F^*_{sj}(\varepsilon) \|$ следует заменить на матрицу $\| F^*_{sj}(\varepsilon),\ G^*_s(\varepsilon) \|$.

Теорема 3. Пусть в автономной системе (2.1) при $\mu = 0$ существует $2T^*$-периодическое решение. Тогда в любом классе функций $\mu = O(\varepsilon^{2\nu+\sigma})$, $\sigma > 0$, система (2.1) также имеет $2T(\varepsilon)$-периодическое решение, если только $\operatorname{rank} \| F^*_{sj}(\varepsilon), G^*_s(\varepsilon) \| = m$, и это условие проверяется полиномами Тейлора порядка ν для функций $F^*_{sj}(\varepsilon), G^*_s(\varepsilon)$. В этом случае начальные условия для периодических решений при $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$ отличаются на величины порядка $\varepsilon^{\nu+\sigma}$ так же, как и их периоды. Если при этом $\operatorname{rank} \| F^*_{sj}(\varepsilon) \| = m$, то при $\mu \neq 0$ в системе (2.1) обязательно существует также $2T^*(\varepsilon)$-периодическое решение.

Аналогично, как и в периодической системе имеет место важный частный случай.

Теорема 4. Пусть в автономной системе (2.1) при $\mu = 0$ существует $2T^*$-периодическое решение $\mathbf{x} = \varphi(\varepsilon, t)$, принадлежащее при $\varepsilon = 0$ некоторому семейству. Тогда в любом классе функций $\mu = O(\varepsilon^{1+\sigma})$, $\sigma > 0$, система (2.1) также имеет $2T(\varepsilon)$-периодическое решение, если только $\operatorname{rank} \| F^*_{sj}(\varepsilon),\ G^*_s(\varepsilon) \| = m$, и это условие проверяется с учетом линейных по ε членов в матрице $\| F^*_{sj}(\varepsilon), G^*_s(\varepsilon) \|$. В этом случае начальные условия для периодических движений при $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$ отличаются на величины порядка $O(\varepsilon^\sigma)$, так же, как и их периоды. Если при этом $\operatorname{rank} \| F^*_{sj}(\varepsilon) \| = m$, то при $\mu \neq 0$ в системе обязательно существует также $2T^*(\varepsilon)$-периодическое решение.

Замечания. 1. Очевидно, условия теорем 1–4 гарантируют единственность периодического решения системы (2.1) при $\mu = 0$ для каждого $\varepsilon \neq 0$; порождающая система, полученная из (2.1), при $\mu = 0$, является грубой. В системе (2.1) с одним малым параметром μ имеет место изолированный по Пуанкаре случай.

2. В теоремах 1–4 не требуется знания периодического решения системы (2.1) при $\mu = 0$; достаточно уметь строить периодическое с точностью ε^ν решение.

3. Конструктивно условия $\operatorname{rank}\| F_{sj}^*(\varepsilon)\| = m$, $\operatorname{rank}\| F_{sj}^*(\varepsilon),\ G_s^*(\varepsilon)\| = m$ проверяются путем вычисления (с необходимой по ε точностью) характеристических показателей системы уравнений в вариациях в окрестности решения $\mathbf{x} = \varphi(\varepsilon, t)$ системы (2.1) при $\mu = 0$.

4. В автономном случае (теоремы 2,4) предполагается, что семейство определяется не только произвольной постоянной, добавляемой в решении ко времени.

3. Система стандартного вида. Предположим, что порождающая система

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(\varepsilon, \mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \tag{3.1}$$

полученная из (2.1) при $\mu = 0$, допускает при $\varepsilon = 0$ семейство от k параметров $A_1,\ldots, A_k (k \leqslant m)$ периодических решений, причем $\operatorname{rank}\| \partial x_s^\circ / \partial A_j \| = k$. Выберем в качестве новых переменных задачи $y_\alpha = A_\alpha$, $z_\beta (\alpha = 1,\ldots, k;\ \beta = k + 1,\ldots,m)$ так, чтобы преобразование $(x_\alpha, x_\beta) \to (y_\alpha, z_\beta)$ было невырожденным. Например, в качестве переменных z_β можно сохранить переменные x_β. Тогда, как правило, приходим к задаче о периодических движениях системы стандартного вида

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}^\bullet = \varepsilon\mathbf{Y}(\varepsilon, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \mu\mathbf{Y}_1(\varepsilon, \mu, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \\ &\mathbf{z}^\bullet = \mathbf{Z}_0(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \varepsilon\mathbf{Z}(\varepsilon, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \mu\mathbf{Z}_1(\varepsilon, \mu, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

представляющей самостоятельный интерес.

Отметим, что в случае автономной системы (2.1) среди параметров $A_1,\ldots, A_k$ нет произвольной постоянной, добавляемой в решении к t, а в случае зависимости периода от $A_1,\ldots, A_k$ введением новой независимой переменной приходим к периодической системе вида (3.2) с периодом, не зависящим от этих постоянных.

Исследуем более общую, чем (3.2), систему

$$y_\alpha^\bullet = \varepsilon^{p_\alpha} Y_\alpha(\varepsilon, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \mu_\alpha(\mu) Y_{1\alpha}(\varepsilon, \mu, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\alpha = 1, \ldots, k) \tag{3.3}$$

$$z_\beta^\bullet = Z_{0\beta}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \varepsilon Z_\beta(\varepsilon, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \mu Z_{1\beta}(\varepsilon, \mu, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\beta = k+1, \ldots, m)$$

$(p_\alpha \in \mathbb{N}, \mu_\alpha(0) = 0;\ \alpha = 1, \ldots, k)$ с 2π-периодическими по t правыми частями в предположении, что система

$$z_\beta^\bullet = Z_{0\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{z}, t), \quad \mathbf{A} = \text{const} \quad (\beta = k+1, \ldots, m) \tag{3.4}$$

допускает 2π-периодическое решение $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{A}, t)$.

Необходимые и достаточные условия 2π-периодичности решения системы (3.3) имеют вид

$$\begin{aligned} &y_\alpha(\varepsilon, \mu, \mathbf{y}^\circ, \mathbf{z}^\circ, 2\pi) - y_\alpha^\circ = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, k) \\ &z_\beta(\varepsilon, \mu, \mathbf{y}^\circ, \mathbf{z}^\circ, 2\pi) - z_\beta^\circ = 0 \quad (\beta = k+1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{3.5}$$

($\mathbf{y}^\circ$, $\mathbf{z}^\circ$ – начальные условия для $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ соответственно), причем первая группа уравнений в (3.5) удовлетворяется тождественно по $\mathbf{y}^\circ$, $\mathbf{z}^\circ$ при $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$. Поэтому, учитывая пропорциональность скорости изменения переменной y_α величине ε^{p_α}, систему

(3.5) запишем в виде

$$\xi_\alpha(\mathbf{y}^\circ,\mathbf{z}^\circ)+\xi_{1\alpha}(\varepsilon,\mathbf{y}^\circ,\mathbf{z}^\circ)+\mu_\alpha\varepsilon^{-p_\alpha}f_\alpha(\varepsilon,\mu,\mathbf{y}^\circ,\mathbf{z}^\circ)=0 \quad (\alpha=1,\ldots,k)$$
$$\eta_\beta(\mathbf{y}^\circ,\mathbf{z}^\circ)+\eta_{1\beta}(\varepsilon,\mathbf{y}^\circ,\mathbf{z}^\circ)+\mu g_\alpha(\varepsilon,\mu,\mathbf{y}^\circ,\mathbf{z}^\circ)=0 \quad (\beta=k+1,\ldots,m) \tag{3.6}$$

где функции $\xi_{1\alpha}(\varepsilon, \mathbf{y}^\circ, \mathbf{z}^\circ)$, $\eta_{1\beta}(\varepsilon, \mathbf{y}^\circ, \mathbf{z}^\circ)$ обращаются в нуль при $\varepsilon = 0$. Отсюда следует, что при выборе $\mu_\alpha = o(\varepsilon^{p_\alpha})$, $\mu = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, система (3.6) совместна при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$, если решения системы уравнений

$$\xi_\alpha(\mathbf{y}^\circ,\mathbf{z}^\circ)=0,\ \eta_\beta(\mathbf{y}^\circ,\mathbf{z}^\circ)=0 \quad (\alpha=1,\ldots,k;\beta=k+1,\ldots,m) \tag{3.7}$$

существуют и являются простыми.

Вторая группа уравнений в (3.7) при любом $\mathbf{y}^\circ = \mathbf{A}$ допускает решение $\mathbf{z}^\circ = \varphi(\mathbf{A}, 0)$. Поэтому задача отыскания корней уравнений (3.7) приводит к совместности системы

$$\xi_\alpha(\mathbf{A},\varphi(\mathbf{A},0))=0 \quad (\alpha=1,\ldots,k) \tag{3.8}$$

Функции ξ_α в (3.8) определяются в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\dot\xi_\alpha = Y_\alpha(0,\mathbf{A},\varphi(\mathbf{A},t),t) \quad (\alpha=1,\ldots,k)$$

на отрезке $[0, 2\pi]$. Следовательно, корни уравнений (3.8) вычисляются из системы амплитудных уравнений

$$I_\alpha(\mathbf{A})=\int_0^{2\pi} Y_\alpha(0,\mathbf{A},\varphi(\mathbf{A},t),t)dt=0 \quad (\alpha=1,\ldots,k) \tag{3.9}$$

Каждому простому корню $\mathbf{A}^*$ этих уравнений, удовлетворяющему условию $\det\|\partial\eta_\beta / \partial y_j^\circ\|\neq 0$ при $\mathbf{y}^\circ = \mathbf{A}^*$, $\mathbf{z}^\circ = \varphi(\mathbf{A}^*, 0)$, отвечает при достаточно малом $\varepsilon \neq 0$ единственное решение системы (3.6). Тем самым доказывается существование 2π-периодических движений в системе (3.3). Эти движения описываются формулами

$$y_\alpha = A_\alpha^* + \varepsilon^{p_\alpha}\int_0^t Y_\alpha(0,\mathbf{A}^*,\varphi(\mathbf{A}^*,t),t)dt+o(\varepsilon^{p_\alpha}) \quad (\alpha=1,\ldots,k)$$
$$z_\beta=\varphi_\beta(\mathbf{A}^*,t)+O(\varepsilon) \quad (\beta=k+1,\ldots,m) \tag{3.10}$$

Теорема 5. Каждому простому корню $\mathbf{A}^*$ амплитудного уравнения (3.9), для которого уравнения в вариациях для системы (3.4) при $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ не имеют равных единице корней характеристического уравнения, отвечает единственное 2π-периодическое решение системы (3.3), если $\mu_\alpha = o(\varepsilon^{p_\alpha})$, $\mu = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Замечания. 1. В случае, когда правые части системы (3.3) являются 2π-периодическими по переменным $z_{l+1},\ldots, z_m (l \geqslant k)$, теорема 5 устанавливает также существование вращательных движений, 2π-периодических на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^{m-l}$ ($\mathbb{T}^{m-l}$ – тор размерности $m - l$). Для таких движений решение $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{A}, t)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi_i(\mathbf{A},t+2\pi)=\varphi_i(\mathbf{A},t),\quad \varphi_j(\mathbf{A},t+2\pi)-\varphi_j(\mathbf{A},t)=0(\mathrm{mod}\,2\pi)$$
$$(i=k+1,\ldots,l;j=l+1,\ldots m)$$

2. Теорема 5 допускает обобщение на случай, когда уравнение (3.4) при фиксированных значениях p параметров $A_1 = A_1^*,\ldots,A_p = A_p^*$ и произвольных значениях остальных пара-

метров $A_{p+1},\ldots, A_k$ допускает семейство от $B_1,\ldots, B_p$ 2π-периодических решений $\mathbf{z} = \varphi(A_1^*,\ldots,A_p^*,A_{p+1},\ldots,A_k,B_1,\ldots,B_p,t)$.

Следствие. Каждому простому корню $\mathbf{A}^*$ амплитудного уравнения

$$\mathbf{I(A)} \equiv \int_0^{2\pi} \mathbf{Y}(0,\mathbf{A},t)dt = \mathbf{0} \tag{3.11}$$

2π-периодической системы

$$\mathbf{y}^{\bullet} = \mu\mathbf{Y}(\mu,\mathbf{y},t), \quad \mathbf{y}\in\mathbb{R}^m \tag{3.12}$$

отвечает при достаточно малом $\mu \neq 0$ единственное 2π-периодическое решение

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^* + \mu\int_0^t \mathbf{Y}(0,\mathbf{A}\ \ ,t)dt + o(\mu)$$

системы (3.12).

Пример. Квазилинейная система с одной степенью свободы.
1°. *Автономная система*

$$x^{\bullet\bullet} + \omega^2 x = \mu F(\mu,x,x^{\bullet}); \quad \omega = \mathrm{const} > 0 \tag{3.13}$$

При $\mu = 0$ имеем однопараметрическое от A семейство $2\pi/\omega$-периодических по t решений $x = A\cos\varphi$. Перейдем к переменным Ван-дер-Поля: A, φ. В результате получим систему, которую запишем в виде одного уравнения

$$\frac{dA}{d\varphi} = -\frac{\mu}{\omega}\frac{F(\mu,A\cos\varphi,-A\omega\sin\varphi)\sin\varphi}{\omega-\mu(\omega A)^{-1}F(\mu,A\cos\varphi,-A\omega\sin\varphi)\cos\varphi}$$

с 2π-периодической по φ правой частью. Из следствия теоремы 5 выводим [2]: каждому простому корню A^* амплитудного уравнения

$$\int_0^{2\pi} F(0,A\cos\varphi,-A\omega\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi = 0$$

отвечает единственное 2π-периодическое по φ решение

$$A = A^* + \mu\int_0^{\varphi} F(0,\ A\cos\varphi,\ -A\omega\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi + o(\mu)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \frac{\mu}{\omega A^*}\int_0^{\lambda} F(0,A\cos\varphi,\ -A\omega\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi + o(\mu)$$

уравнения (3.13).
2°. *Периодическая система при главном резонансе*

$$x^{\bullet\bullet} + \omega^2 x = \mu F(\mu,x,x^{\bullet},t), \quad F(\mu,x,x^{\bullet},t+2\pi) = F(\mu,x,x^{\bullet},t), \quad \omega^2 = 1-\mu a \tag{3.14}$$

При $\mu = 0$ уравнение (3.14) допускает двухпараметрическое от A и B семейство 2π-периодических решений

$$x = A\cos t + B\sin t, \quad x^{\bullet} = -A\sin t + B\cos t$$

Выполним в (3.12) замену: $(x,x^{\bullet}) \to (A,B)$. В результате получим

$$A^{\bullet} = -\mu F^*(\mu,A,B,t)\sin t, \quad B^{\bullet} = \mu F^*(\mu,A,B,t)\cos t$$

$$F^*(\mu,A,B,t) \equiv a + F(\mu,A\cos t + B\sin t,\ -A\sin t + B\cos t,t)$$

Согласно следствию теоремы 5 каждому простому корню (A^*, B^*) амплитудного уравнения

$$P(A,B) \equiv \int_0^{2\pi} F^*(0,A,B,t)\sin t dt = 0, \quad Q(A,B) \equiv \int_0^{2\pi} F^*(0,A,B,t)\cos t dt = 0$$

$$\partial(P,Q)/\partial(A,B)|_{(A^*,B^*)} \neq 0$$

отвечает единственное 2π-периодическое решение

$$x = \left[A^* - \mu\int_0^t F^*(0,A^*,B^*,t)\sin t dt\right]\cos t + \left[B^* + \mu\int_0^t F^*(0,A^*,B^*,t)\cos t dt\right]\sin t + o(\mu)$$

системы (3.14).

4. Вырожденные системы.

1°. *Резонансная система.* К исследованию системы (3.12) приводит также задача о вращательных движениях системы в резонансном случае.

Рассмотрим 2π-периодическую по t систему

$$\dot{y}_\alpha = \mu Y_\alpha(\mu, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\alpha = 1,\ldots,k)$$

$$\dot{z}_\beta = \omega_\beta + \mu Z_\beta(\mu, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t), \quad \omega_\beta = \text{const} \quad (\beta = k+1,\ldots,m) \tag{4.1}$$

в которой правые части являются 2π-периодическими также по переменным z_β. Предположим, что система (4.1) резонансна, т.е. $\omega_\beta = p_\beta/q_\beta - a_\beta\mu$ $(\beta = k + 1,\ldots,m)$, где $p_\beta, q_\beta \in \mathbb{Z}(q_\beta \neq 0)$, $a_\beta = \text{const}$. В этом случае введением новых переменных $\zeta_\beta = z_\beta - (p_\beta/q_\beta)t$ $(\beta = k + 1,\ldots, m)$ получим $2\pi l$-периодическую по t (l – наименьшее общее кратное чисел $|q_{k+1}|, \ldots, |q_m|$) систему

$$\dot{y}_\beta = \mu Y_\beta(\mu, y_1,\ldots,y_k,\ \zeta_{k+1} + (p_{k+1}/q_{k+1})t,\ldots,\zeta_m + (p_m/q_m)t, t)$$

$$\dot{\zeta}_\beta = \mu[a_\beta + Z_\beta(\mu, y_1,\ldots,y_k,\zeta_{k+1} + (p_{k+1}/q_{k+1})t,\ldots,\zeta_m + (p_m/q_m)t, t)] \tag{4.2}$$

$$(\alpha = 1,\ldots,k; \beta = k+1,\ldots,m)$$

вида (3.12). Согласно следствию теоремы 5 каждому простому корню $(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*)$ амплитудного уравнения

$$\int_0^{2\pi l} \mathbf{Y}(0,\mathbf{A},\mathbf{B} + (\mathbf{p}/\mathbf{q})t, t)dt = \mathbf{0}, \quad \int_0^{2\pi l} [\mathbf{a} + \mathbf{Z}(0,\mathbf{A},\mathbf{B} + (\mathbf{p}/\mathbf{q})t, t)dt = \mathbf{0}$$

отвечает единственное $2\pi l$-периодическое решение системы (4.2). Соответствующее решение системы (4.1) имеет вид

$$y_\alpha = A_\alpha^* + \mu\int_0^t Y_\alpha(0,\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^* + (\mathbf{p}/\mathbf{q})t, t)dt + o(\mu) \quad (\alpha = 1,\ldots,k)$$

$$z_\beta = \omega_\beta t + B_\beta^* + \mu\int_0^t Z_\beta(0,\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^* + (\mathbf{p}/\mathbf{q})t, t)dt + o(\mu) \quad (\beta = k+1,\ldots,m)$$

2°. *Случай кратных корней амплитудного уравнения.* Предположим, что в 2π-периодической системе (3.12) амплитудное уравнение (3.11) имеет кратный корень $\mathbf{A}^*$, причем

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial \mathbf{I}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}}\right\|_{\mathbf{A}^*} = m - k \tag{4.3}$$

и корню $\mathbf{A}^*$ отвечают в (4.3) простые элементарные делители. В этом случае выполним в системе (3.12) замену

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^* + \mu^{\sigma}\mathbf{z} + \mu\mathbf{f}(t) \quad (0 < \sigma \leq 1), \quad \mathbf{f}(t) = \int_0^t \mathbf{Y}(0, \mathbf{A}^*, t)dt$$

В результате получим

$$\mathbf{z}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mu\{\mathbf{P}_1(t)[\mathbf{z} + \mu^{1-\sigma}\mathbf{f}(t)] + \mu^{\sigma}\mathbf{P}_2(t)[\mathbf{z} + \mu^{1-\sigma}\mathbf{f}(t)]^2 + \mu^{1-\sigma}\partial\mathbf{Y} / \partial\mu + \ldots\}$$

$$\mathbf{P}_1(t) = \partial\mathbf{Y}(0, \mathbf{A}, t) / \partial\mathbf{A}, \quad 2\mathbf{P}_2(t) = \partial^2\mathbf{Y}(0, \mathbf{A}, t) / \partial\mathbf{A}^2$$

где все частные производные вычислены при $\mu = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.

Предположим сначала, что матрица $\mathbf{P}_1(t)$ – постоянная. В этом случае условие (4.3) и простые элементарные делители в (4.3) гарантируют существование невырожденного линейного преобразования $\mathbf{z} \to (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ с постоянными коэффициентами, такого, что в новых переменных система принимает вид

$$\begin{aligned}
\xi_{\alpha}^{\boldsymbol{\cdot}} &= \mu^{1+\sigma}[\Xi_{0\alpha}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) + \mu^{\sigma}\Xi_{1\alpha}(\mu, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) + \mu^{1-2\sigma}\Xi_{0\alpha}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) + \mu^{1-\sigma}\Xi_{1\alpha}^*(\mu, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t)] \\
\eta_{\beta}^{\boldsymbol{\cdot}} &= \mu\left[\sum_{j=k+1}^{m} Q_{\beta j}\eta_j + \mu^{\sigma}H_{0\beta}(\mu, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) + \mu^{1-2\sigma}\mathrm{H}_{1\beta}(\mu, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t)\right] \\
&(\alpha = 1, \ldots, k; \beta = k+1, \ldots, m)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

причем линейная система $\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}$ имеет единственное (нулевое) 2π-периодическое решение.

Очевидно, (4.4) – система вида (3.3) с $p_{\alpha} = 1 + \sigma$, $p_{\beta} = 1$.

Рассмотрим систему из k уравнений

$$\int_0^{2\pi} [\Xi_{0\alpha}(\mathbf{B}, \mathbf{0}, t) + \Xi_{0\alpha}^*(\mathbf{B}, \mathbf{0}, t)]dt = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, k) \tag{4.5}$$

относительно k постоянных $B_1, \ldots, B_k$. Пусть $\mathbf{B}^*$ – простой корень этой системы. Тогда положим в (4.4) $\sigma = 1/2$ и на основании теоремы 5 выводим существование в системе (4.4) единственного 2π-периодического решения

$$\xi_{\alpha} = B_{\alpha}^* + \mu^{3/2}\int_0^t [\Xi_{0\alpha}(\mathbf{B}^*, \mathbf{0}, t) + \Xi_{0\alpha}^*(\mathbf{B}^*, \mathbf{0}, t)]dt + o(\mu^{3/2}), \quad \eta_{\beta} = o(\mu)$$

при $\mu \neq 0$. Следовательно, система (3.12) при достаточно малом $\mu \neq 0$ имеет единственное 2π-периодическое решение, отличающееся от порождающего постоянного решения $\mathbf{A}^*$ на величину порядка $\mu^{1/2}$.

Случай кратных корней системы уравнений (4.5) сводится по изложенной выше схеме к анализу новой системы амплитудных уравнений. В случае, когда интегралы в (4.5) тождественно обращаются в нуль, необходимо привлекать к анализу вторые производные от функции $\mathbf{Y}(\mu, \mathrm{y}, t)$ по μ и выбрать $\sigma = 1/3$. В результате устанавливается существование периодического решения в $O(\mu^{1/3})$ – окрестности порождающего решения $\mathbf{A}^*$. Аналогично исследуются другие вырожденные случаи (см. также [5–7]).

В случае периодической матрицы $\mathbf{P}_1(t)$, изложенная схема не претерпевает какихлибо заметных изменений, если линейная система $\mathbf{z}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{P}_1(t)\mathbf{z}$ имеет k – семейство 2π-периодических решений. Это имеет место, например, при $m = k = 1$.

5. Периодические решения в μ^{σ}-окрестности порождающего решения (общий случай). В разд. 2–4 рассмотрены предельные случаи, когда свойство системы имеет периодическое решение, определяется только порождающей системой (разд. 2) или только возмущениями (разд. 3, 4). В то же время исследование случая кратных корней амплитудного уравнения (разд. 4, п. 2°) показывает, что в общем случае за существование периодического решения отвечают все слагаемые в правой части (1.1). Другая важная особенность связана с тем, что при исследовании негрубых случаев заранее не всегда известен факт принадлежности периодического решения $\mathbf{x} = \varphi(t)$ порождающей системы (1.2) некоторому семейству. Указанные обстоятельства дают основание рассматривать в общем случае вместо уравнений (1.1) следующую систему:

$$\mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y} + \mathbf{Y}(\mathbf{y},t) + \mu\mathbf{X}_1(\mu, \mathbf{w}(t)+\mathbf{y},t), \qquad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \tag{5.1}$$

полученную в результате перехода $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \varphi(t)$ в окрестность периодического решения $\varphi(t)$.

Предположим, что матрица $\mathbf{P}(t)$ и функции $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}_1$ являются 2π-периодическими по t, а линейная система

$$\mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y} \tag{5.2}$$

допускает k-параметрическое от $B_1,..., B_k$ семейство

$$\mathbf{y} = B_1\boldsymbol{\theta}_1(t) + \ldots + B_k\boldsymbol{\theta}_k(t) \equiv \varphi(\mathbf{B},t) \tag{5.3}$$

2π-периодических решений. Тем самым охватывается как случай семейства периодических решений порождающей системы (1.2), так и случай, когда неизвестно о принадлежности решения $\mathbf{x} = \varphi(t)$ некоторому семейству.

Отметим, что условие существования семейства (5.3) выполнено при наличии ровно k простых нулевых характеристических показателей, а последнее условие конструктивно проверяется. Этот случай исследуется ниже.

Введем заменой $\mathbf{y} \to \varepsilon\mathbf{y}$ еще один малый параметр $\varepsilon = \mu^\sigma$ $(0 < \sigma \leqslant 1)$, характеризующий малость отклонения решений систем (1.1) и (1.2) друг от друга. В результате получим

$$\begin{gathered}\mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y} + \varepsilon^\lambda[\mathbf{Y}_0(\mathbf{y},t) + \varepsilon\mathbf{Y}_1(\varepsilon,\mathbf{y},t)] + \mu^{1-\sigma}[\mathbf{X}_1(0,\varphi(t),t) + \varepsilon\mathbf{Q}(t)\mathbf{y} + \\ + \mu\mathbf{R}(t) + \mathbf{X}_2(\mu,\varepsilon,\mathbf{y},t)]; \quad \mathbf{Q}(t) = \left(\frac{\partial\mathbf{X}_1(\mu,\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{x}}\right)_*, \quad \mathbf{R}(t) = \left(\frac{\partial\mathbf{X}_1(\mu,\mathbf{x},t)}{\partial\mu}\right)_*\end{gathered} \tag{5.4}$$

где $\lambda \geqslant 1$ $(\lambda \in \mathbb{N})$, матрица $\mathbf{Q}(t)$ и вектор $\mathbf{R}(t)$ вычислены при $\mathbf{x} = \varphi(t)$, $\mu = 0$, а функция $\mathbf{X}_2$ $(\mu, \varepsilon, \mathbf{y}, t)$ обращается в нуль при $\varepsilon = \mu = 0$ и имеет порядок выше первого относительно ε и μ.

Обозначим через $\{z_{s\alpha}(t)\}$ систему 2π-периодических решений линейной системы, сопряженной с системой (5.2), и приведем (5.2) заменой $\mathbf{y} \to (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ к системе с постоянными коэффициентами. Тогда

$$\begin{gathered}\xi_\alpha^{\cdot} = \sum_{s=1}^m \left\{\varepsilon^\lambda(Y_{0s} + \varepsilon Y_{1s}) + \mu^{1-\sigma}\left[X_{1s}(0,\varphi(t),t) + \varepsilon\sum_{j=1}^m Q_{sj}y_j + \mu R_s + X_{2s}\right]\right\} z_{s\alpha}(t) \\ \boldsymbol{\eta}^{\cdot} = \mathbf{G}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{H}(\varepsilon,\mu,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},t) \quad (\alpha = 1,...,k; \ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{m-k})\end{gathered} \tag{5.5}$$

и среди собственных значений матрицы $\mathbf{G}$ нет равных il $(l \in \mathbb{Z})$.

Предположим сначала, что на решении $\varphi(t)$ выполнены условия

$$\int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^m X_{1s}(0,\varphi(t),t) z_{s\alpha}(t)dt = 0 \quad (\alpha = 1,\ldots,k) \tag{5.6}$$

которые являются необходимыми для существования 2π-периодического с точностью до линейных по μ членов решения в системе (1.1). Тогда в результате преобразования

$$\xi_\alpha \to \xi_\alpha + \mu^{1-\sigma}\int_0^t \sum_{s=1}^m X_{1s}(0,\varphi(t),t) z_{s\alpha}(t)dt$$

получим систему вида (5.5), в которой уже $X_{1s}(0, \varphi(t), t) \equiv 0$. Эта система относится к типу (3.3), и вопрос о существовании в ней периодического решения сводится к анализу амплитудного уравнения.

Рассмотрим следующие системы амплитудных уравнений:

$$I_\alpha(\mathbf{B}) \equiv \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{m} Q_{sj}(t)\psi_j(\mathbf{B},t) z_{s\alpha}(t) \right] dt = 0 \quad (\alpha = 1,\dots,k) \tag{5.7}$$

$$I_\alpha(\mathbf{B}) + \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{m} Y_{0s}(\psi(\mathbf{B},t),t) z_{s\alpha}(t) dt = 0 \quad (\alpha = 1,\dots,k) \tag{5.8}$$

$$I_\alpha(\mathbf{B}) + \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{m} R_s(t) z_{s\alpha}(t) dt = 0 \quad (\alpha = 1,\dots,k) \tag{5.9}$$

$$I_\alpha(\mathbf{B}) + \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{m} [Y_{0s}(\psi(\mathbf{B}),t) + R_s(t)] z_{s\alpha}(t) dt = 0 \quad (\alpha = 1,\dots,k) \tag{5.10}$$

Система (5.7) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений и при ненулевом определителе Δ имеет единственное (нулевое) решение. В этом случае, полагая в системе (5.5) $1/\lambda < \sigma < 1$, приходим на основании теоремы 5 к существованию в (1.1) при $\lambda > 1$ единственного 2π-периодического решения

$$\mathbf{x} = \varphi(t) + \mu\varphi_1(t) + o(\mu) \tag{5.11}$$

Если известно, что в порождающей системе (1.2) решение $\varphi(t)$ принадлежит семейству $\varphi(\mathbf{A}, t)$ от параметров $A_1,\dots, A_k$, то уравнения (5.6) служат для определения значения $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ в порождающем решении. Достаточное условие продолжения решения по μ доставляет $\Delta \neq 0$.

В случае существования простого корня $\mathbf{B}^*$ системы (5.8) положим $\sigma = 1/\lambda$. Тогда на основании теоремы 5 делаем вывод о существовании в (1.1) при $\lambda > 1$ 2π-периодического решения

$$\mathbf{x} = \varphi(t) + \mu^\sigma \varphi(\mathbf{B}^*, t) + o(\mu^\sigma), \quad \sigma = 1/\lambda \tag{5.12}$$

Очевидно, такая ситуация возможна как при $\Delta \neq 0$, так и при $\Delta = 0$.

При $\Delta \neq 0$ уравнения (5.9) также имеют единственное, в общем случае – ненулевое решение $\mathbf{B}^*$. При $\lambda > 1$ выберем $\sigma = 1$ и на основании теоремы 5 делаем вывод о существовании в (1.1) 2π-периодического решения

$$\mathbf{x} = \varphi(t) + \mu[\varphi_1(t) + \psi(\mathbf{B}^*, t)] + o(\mu) \tag{5.13}$$

При $\lambda = 1$ периодическое решение также имеет вид (5.13), если система (5.10) имеет простое решение $\mathbf{B}^*$. Это возможно как при $\Delta \neq 0$, так и при $\Delta = 0$. В случае, когда в порождающей системе решение $\varphi(t)$ принадлежит семейству $\varphi(\mathbf{A}, t)$ от параметров $A_1,\dots, A_k$, уравнение (5.10) приобретает вид (5.9), и достаточное условие продолжения периодического решения по μ доставляет $\Delta \neq 0$.

Предположим теперь, что условия (5.6) не выполнены. В этом случае положим $\sigma = 1/(1 + \lambda)$ и на основании теоремы 5 делаем вывод о существовании периодического решения

$$\mathbf{x} = \varphi(t) + \mu^\sigma \psi(\mathbf{B}^*, t) + o(\mu^\sigma), \quad \sigma = 1/(1+\lambda) \tag{5.14}$$

отвечающего простому корню $\mathbf{B}^*$ амплитудного уравнения

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{m} [Y_{0s}(\psi(\mathbf{B},t),t) + X_{1s}(0,\varphi(t),t] z_{s\alpha}(t) dt = 0 \quad (\alpha = 1,\dots,k) \tag{5.15}$$

Теорема 6. Каждому простому корню $\mathbf{B}^*$ любой из систем амплитудных уравнений (5.7)–(5.10), (5.15) отвечает одно 2π-периодическое решение системы (1.1), если только μ достаточно мало. При этом периодические решения в случаях (5.7)–(5.10) существуют при выполнении условий (5.6) и имеют соответственно вид (5.11)–(5.13), случаям (5.9), (5.10) отвечает решение вида (5.13), и возможно рождение одновременно всех трех типов (5.11)–(5.13) периодических решений. Периодическое решение в случае (5.15) имеет вид (5.14), существует, когда условия (5.6) не выполнены, и отличается от периодического решения порождающей системы на величину порядка μ^{σ} ($\sigma = 1/(1+\lambda)$).

6. Обратимая система. Теория периодических движений для обратимой системы разрабатывалась [8–14]. Ниже дано развитие этой теории.

1°. *Движение на неподвижном множестве*. Справедливо утверждение.

Теорема 7. Всякое движение 2π-периодической обратимой системы

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}(\mathbf{u},t), \quad \mathbf{U}(\mathbf{u},t+2\pi) = \mathbf{U}(\mathbf{u},t), \quad \mathbf{U}(\mathbf{u},-t) = -\mathbf{U}(\mathbf{u},t); \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l \tag{6.1}$$

является 2π-периодическим или положением равновесия.

Действительно, каждое решение $\mathbf{u}_1 = \varphi(\mathbf{u}^{\circ}, t)$ определяется значением $\mathbf{u}^{\circ}$ переменной $\mathbf{u}$ в момент времени $t = 0$. Свойство обратимости гарантирует существование вместе с решением $\varphi(\mathbf{u}^{\circ}, t)$ также решения $\mathbf{u}_2 = \varphi(\mathbf{u}^{\circ}, -t)$. Из 2π-периодичности системы (6.1) вытекает существование еще одного решения $\mathbf{u}_3 = \varphi(\mathbf{u}^{\circ}, 2\pi - t)$. Далее имеем

$$\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}^{\circ}, \quad \mathbf{u}_1(\pi) = \mathbf{u}_3(\pi) = \varphi(\mathbf{u}^{\circ}, \pi)$$

Следовательно, $\mathbf{u}_1(t)$, $\mathbf{u}_2(t)$ и $\mathbf{u}_3(t)$ описывают одно и то же решение. Это решение будет 2π-периодическим, ибо $\mathbf{u}_1(2\pi) = \mathbf{u}_3(0) = \mathbf{u}^{\circ}$. В частном случае оно вырождается в положение равновесия $\mathbf{u}^*$, определяемое из уравнения $\mathbf{U}(\mathbf{u}^*, t) = \mathbf{0}$.

Замечание. Все решения автономной обратимой системы (6.1) являются положениями равновесия.

Следствия. 1. В обратимой 2π-периодической системе

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mu\mathbf{U}(\mu,\mathbf{u},t), \quad \mathbf{U}(\mu,\mathbf{u},-t) = -\mathbf{U}(\mu,\mathbf{u},t); \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$$

с малым параметром μ, при $\mu \neq 0$ из каждого положения равновесия рождается 2π-периодическое движение, если уравнение $\mathbf{U}(\mu, \mathbf{u}^*, t) = 0$ не имеет постоянных решений $\mathbf{u}^*$.

2. Все движения автономной или 2π-периодической обратимой системы

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{v},t), \quad \mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{V}(\mathbf{u},\mathbf{v},t); \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

целиком принадлежащие неподвижному множеству $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$, являются 2π-периодическими или положениями равновесия.

3. Линейная 2π-периодическая система

$$\mathrm{x}^{\cdot} = \mathrm{P}(t)\mathrm{x}, \quad \mathrm{P}(-t) = -\mathrm{P}(t); \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^m$$

устойчива и имеет только 2π-периодические или постоянные решения.

2°. *Метод Чезари*. Рассмотрим 2π-периодическую обратимую систему

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{v},t) + \mu\mathbf{U}_1(\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t), \quad \mathbf{v}^{\cdot} = \mu\mathbf{V}_1(\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t); \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \tag{6.2}$$

с неподвижным множеством $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ и малым параметром μ. При $\mu = 0$ система (6.2) допускает l-семейство 2π-периодических движений

$$\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{A},t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \varphi^{\cdot} = \mathbf{U}(\varphi,\mathbf{0},t) \tag{6.3}$$

принадлежащих неподвижному множеству (теорема 7). Выясним вопрос о существовании в системе (6.2) при $\mu \neq 0$ $2\pi k$-периодического движения, переходящего в одно из движений (6.3) при $\mu = 0$.

Пусть $\mathbf{u}(\mu, \mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ, t)$, $\mathbf{v}(\mu, \mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ, t)$ – общее решение системы (6.2) с начальными условиями $\mathbf{u}^\circ$, $\mathbf{v}^\circ$ при $t = 0$. Тогда необходимые и достаточные условия $2\pi k$-периодичности симметричного относительно неподвижного множества решения имеют вид [9]

$$v_s(\mu, u_1^\circ, \ldots, u_l^\circ, 0, \ldots, 0, \pi k) = 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$$

Эта система удовлетворяется тождественно при $\mu = 0$ и любом $k \in \mathbb{N}$. Поэтому систему (6.3) можно представить в виде

$$f_s(\mathbf{u}^\circ, \pi k) + \mu g_s(\mu, \mathbf{u}^\circ, \pi k) = 0, \quad f_s(\mathbf{u}^\circ, \pi k) \equiv \left.\frac{\partial v_s(\mu, \mathbf{u}^\circ, t)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0, t=\pi k} \tag{6.4}$$

($s = 1, \ldots, n$) и в случае корня $\mathbf{u}^*$ системы уравнений $f_s(\mathbf{u}^\circ, \pi k) = 0$ ($s = 1, \ldots, n$), удовлетворяющего условию $\operatorname{rank}\|\partial f_s/\partial \mathbf{u}_j^*\| = n$, система (6.4) допускает решение при достаточно малых $\mu \neq 0$. Частные производные в (6.4) определяются из уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v_s}{\partial \mu}\right) = v_{1s}(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} v_{1s}(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{6.5}$$

при нулевых начальных условиях. Подставляя в правые части (6.5) общее решение системы (6.2) и полагая $\mu = 0$, получим

$$\frac{\partial v_s(0, \mathbf{u}^\circ, \mathbf{0}, t)}{\partial \mu} = \int_0^{2\pi} v_{1s}(0, \mathbf{u}^\circ, \mathbf{0}, t)\,dt \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{6.6}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 8. Каждому корню $\mathbf{A}^*$ амплитудного уравнения

$$\mathbf{I}(\mathbf{A}) \equiv \int_0^{\pi k} \mathbf{V}_1(0, \varphi(\mathbf{A}, t), \mathbf{0}, t)\,dt = \mathbf{0}$$

для которого $\operatorname{rank}\|\partial \mathbf{I}(\mathbf{A}^*)/\partial \mathbf{A}^*\| = n$, отвечает $2\pi k$-периодическое, симметричное относительно неподвижного множества $\mathbf{M}$ решение

$$\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{A}^*, t) + \mu \int_0^t \left[\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{v}}\right)_* \psi(t) + \mathbf{U}_1(0, \varphi(\mathbf{A}^*, t))\right] dt + o(\mu)$$

$$\mathbf{v} = \mu \psi(t) + o(\mu), \quad \psi(t) = \int_0^t \mathbf{V}_1(0, \varphi(\mathbf{A}^*, t), t)\,dt$$

(звездочка означает вычисление при $\mu = 0$, $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{A}^*, t)$) системы (6.2).

Замечания. 1. Очевидно, условия теоремы 8 могут удовлетворяться только при $l \geqslant n$. При $l > n$ теорема 8 устанавливает существование $(l - n)$-семейства $2\pi k$-периодических движений.

2. Теорема 8 устанавливает существование периодических движений в μ-окрестности неподвижного множества.

3. В методе Чезари [15, 16] рассматривается случай $\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \equiv 0$.

3°. *Система стандартного вида.* Рассмотрим обратимую 2π-периодическую систему

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mu \mathbf{U}_1(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad \mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{V}(\mathbf{u}) + \mu \mathbf{V}_1(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t); \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \tag{6.7}$$

с неподвижным множеством $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ и малым параметром μ. Предположим, что правые части являются также 2π-периодическими по $\mathbf{v}$.

При $\mu = 0$ система (6.7) допускает семейство симметричных относительно **M** решений

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}, \ \mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{A})t \tag{6.8}$$

Рассмотрим те из решений (6.8), которые удовлетворяют условиям

$$v_s(\mathbf{A}) = p_s / q_s + \mu\alpha_s; \quad p_s \in \mathbb{Z}, \quad q_s \in \mathbb{N}, \quad \alpha_s = \text{const} \quad (s = 1,\dots,n) \tag{6.9}$$

для чего выполним замену

$$u_j = A_j + \xi_j, \quad v_s = (p_s / q_s)t + \eta_s \quad (j = 1,\dots,l; \ s = 1,\dots,n)$$

В результате получим систему

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{\cdot} &= \mu\mathbf{U}_1(\mu, \mathbf{A} + \boldsymbol{\xi}, (\mathbf{p}/\mathbf{q})t + \boldsymbol{\eta}, t) \\ \boldsymbol{\eta}^{\cdot} &= \mathbf{P}(\mathbf{A})\boldsymbol{\xi} + \mathbf{H}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}) + \mu[\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{V}_1(\mu, \mathbf{A} + \boldsymbol{\xi}, (\mathbf{p}/\mathbf{q})t + \boldsymbol{\eta}, t) \end{aligned} \tag{6.10}$$

(**H** – нелинейные по $\boldsymbol{\xi}$ члены) с $2\pi q$-периодическими по t правыми частями; q – наименьшее общее кратное чисел $q_1,\dots, q_n$.

Пусть $\operatorname{rank}\mathbf{P} = k \leqslant n$. Тогда существуют числа $\varkappa_{1\nu},\dots, \varkappa_{n\nu}$ ($\nu = k + 1,\dots, n$), такие, что

$$\varkappa_{1\nu}p_{1j} + \dots, + \varkappa_{n\nu}p_{nj} = 0 \quad (j = 1,\dots,l; \ \nu = k+1,\dots,n)$$

Поэтому линейным преобразованием с постоянными коэффициентами всегда можно последние $n - k$ уравнений привести к виду, в котором при $\mu = 0$ отсутствуют линейные по ξ члены. Теперь выполним замену $(\boldsymbol{\xi}, \eta_1,\dots,\eta_k, \eta_{k+1},\dots,\eta_n) \to$ $\to (\mu^\sigma\boldsymbol{\xi}, \mu^\sigma\eta_1,\dots,\mu^\sigma\eta_k, \eta_{k+1},\dots,\eta_n)$, $1/2 < \sigma < 1$. Тогда уравнения (5.10) примут вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{\cdot} &= \mu^{1-\sigma}\mathbf{U}_1(\mu, \mathbf{A} + \mu^\sigma\boldsymbol{\xi}, \ \frac{p_1}{q_1}t + \mu^\sigma\eta_1,\dots, \frac{p_k}{q_k}t + \mu^\sigma\eta_k, \ \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}t + \eta_{k+1},\dots, \frac{p_n}{q_n}t + \eta_n, t) \\ \eta_\lambda^{\cdot} &= \sum_{j=1}^{l} p_{\lambda j}(\mathbf{A})\xi_j + \mu^{-\sigma}\,\mathrm{H}_\lambda(\mathbf{A}, \mu^\sigma\boldsymbol{\xi}) + \mu^{1-\sigma}[\alpha_\lambda + V_{1\lambda}(\dots)] \quad (\lambda = 1,\dots,k) \\ \eta_\nu^{\cdot} &= \mathrm{H}_\nu(\mathbf{A}, \mu^\sigma, \boldsymbol{\xi}) + \mu[\alpha_\nu + V_{1\nu}(\dots)] \quad (\nu = k+1,\dots,n) \end{aligned} \tag{6.11}$$

(аргументы в скобках в двух последних группах уравнений ясны из вида (6.10) и (6.11)). Теперь, используя необходимые и достаточные условия [9] существования $2\pi q$-периодического симметричного решения и проводя для (6.11) такие же, как и в п. 2° разд. 6 рассуждения, приходим к выводу, что справедлива следующая

Теорема 9. В резонансном случае (6.9) при достаточно малом $\mu \neq 0$ в системе (6.7) существует $(l - n + k)$ семейство от $l - n + k$ величин из $A_1,\dots, A_n$, симметричных относительно неподвижного множества **M** $2\pi q$-периодических решений на торе

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} + \mu\int_0^t \mathbf{U}_1(0, \mathbf{A}, (\mathbf{p}/\mathbf{q})t, t)dt + o(\mu), \quad \mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{A})t + \mu\int_0^t \mathbf{V}_1(0, \mathbf{A}, (\mathbf{p}/\mathbf{q})t, t) + o(\mu)$$

если

$$\begin{gathered} I_\nu(\mathbf{A}) \equiv \int_0^{\pi q} [\alpha_\nu + V_{1\nu}(0, \mathbf{A}, (\mathbf{p}/\mathbf{q})t, t)]dt = 0 \quad (\nu = k+1,\dots,n) \\ \operatorname{rank}\mathbf{P} = k, \quad \operatorname{rank}\|\partial\mathbf{I}(\mathbf{A}) / \partial\mathbf{A}\|_* = n - k \end{gathered} \tag{6.12}$$

(звездочка означает вычисление для значений **A**, удовлетворяющих уравнениям (6.12)).

Следствие. Если $\operatorname{rank}\mathbf{P} = n$, то в системе (6.7) в резонансном случае (6.9) существует l-семейство $2\pi q$-периодических симметричных решений.

4°. *Существование l-семейства периодических решений.* Рассмотрим 2π-периодическую обратимую систему

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mu\mathbf{U}_1(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad \mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) + \mu\mathbf{V}_1(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t); \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \tag{6.13}$$

с неподвижным множеством $\mathbf{M}$. При $\mu = 0$ имеем

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}(\text{const}), \quad \mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{V}(\mathbf{A}, \mathbf{v}, t) \tag{6.14}$$

Предположим, что уравнение для $\mathbf{v}$ в (6.14) допускает нечетное 2π-периодическое решение $\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}, t)$, $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, -t) = -\boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, t)$ и выполним замену: $\mathbf{u} = \mathbf{A} + \mathbf{p}$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, t) + \mathbf{q}$. Тогда получим

$$\mathbf{p}^{\cdot} = \mu\mathbf{U}_1(\mu, \mathbf{A} + \mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, t) + \mathbf{q}, t) \tag{6.15}$$

$$\mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{B}_-(\mathbf{A}, t)\mathbf{q} + \mathbf{B}_+(\mathbf{A}, t)\mathbf{p} + \mathbf{Q}_1(\mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, t) + \mu\mathbf{V}_1(\mu, \mathbf{A} + \mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, t) + \mathbf{q}, t)$$

где индекс плюс (минус) означает матрицу с четными (нечетными) функциями, а $\mathbf{Q}_1$ – нелинейная по $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ функция.

Рассмотрим сначала линейную систему

$$\mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{B}_-(\mathbf{A}, t)\mathbf{q} + \mathbf{B}_+(\mathbf{A}, t)\boldsymbol{\alpha} \quad (\boldsymbol{\alpha} = \text{const}) \tag{6.16}$$

При $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ система (6.16) обратима и имеет только четные, 2π-периодические решения (следствие 3 теоремы 7), которые образуют фундаментальную систему $\mathbf{q}^+(t, \tau)$; $\mathbf{q}^+(\tau, \tau) = \mathbf{I}_n$ – единичная матрица начальных условий (при $t = \tau$). Поэтому при $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ нечетное решение системы (6.16) имеет вид

$$\mathbf{q}^-(t) = \int_0^t \mathbf{q}^+(t, \tau)\mathbf{B}_+(\mathbf{A}, t)\,\boldsymbol{\alpha}\, d\tau$$

Согласно полученным ранее результатам [9] условие $\operatorname{rank}\mathbf{q}^-(\pi) = n$ является достаточным для продолжения по параметру μ всего семейства от $\mathbf{A}$ периодических решений $\mathbf{u} = \mathbf{A}$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, t)$ порождающей системы. В этом случае имеем

$$\begin{gathered}\mathbf{u} = \mathbf{A} + \mu[\mathbf{p}^\circ + \boldsymbol{\theta}(t)] + o(\mu), \quad \boldsymbol{\theta}(t) = \int_0^t \mathbf{U}_1(0, \mathbf{A}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, t), t)dt \\ \mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, t) + \mu\int_0^t \mathbf{q}^+(t, \tau)\{\mathbf{B}_+(\mathbf{A}, \tau)[\mathbf{p}^\circ + \boldsymbol{\theta}(\tau)] + \mathbf{V}_1(0, \mathbf{A}, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, \tau), \tau)\}d\tau + o(\mu)\end{gathered} \tag{6.17}$$

Постоянные $\mathbf{p}^\circ$ выбираются из условия равенства нулю интеграла для $\mathbf{v}$ при $t = \pi$. Последнее всегда возможно при условии $\operatorname{rank}\mathbf{q}^-(\pi) = n$.

Теорема 10. При достаточно малом $\mu \neq 0$ система (6.13) допускает l-семейство от $\mathbf{A}$ симметричных, 2π-периодических движений (6.17), если $\operatorname{rank}\mathbf{q}^-(\pi) = n$.

Замечание. При $\mu = 0$ система (6.13) может иметь периодическое решение вида (6.14) только при фиксированном $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$. В этом случае условие $\operatorname{rank}\mathbf{q}^-(\pi) = n$ гарантирует существование только некоторых (при $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$) движений вида (6.17).

Пример. Предположим, что 2π-периодическая система второго порядка

$$x^{\cdot} = \mu X(\mu, x, y, t), \quad y^{\cdot} = x + \mu Y(\mu, x, y, t) \tag{6.18}$$

обратима с неподвижным множеством $\{x, y : y = 0\}$. При $\mu = 0$ имеем единственное (нулевое) периодическое решение. Матрица $\mathbf{q}^-(t)$ состоит из одного элемента $q^-(t)$ и вычисляется интегрированием системы (6.18) при $\mu = 0$ с начальными условиями $x^\circ = 1$, $y^\circ = 0$. Имеем

$q^{-}(t) = t,\ q^{-}(\pi) = \pi \neq 0$. Следовательно, в окрестности нуля система (6.18) имеет единственное 2π-периодическое решение

$$x = \mu\left[x^\circ + \int_0^t X(0,0,0,t)dt\right] + o(\mu), \quad y = \mu\int_0^t\left[x^\circ + \int_0^\tau X(0,0,0,\nu)d\nu + Y(0,0,0,\tau)\right]d\tau + o(\mu)$$

$$\pi x^\circ + \int_0^\pi\left[\int_0^\tau X(0,0,0,\nu)d\nu + Y(0,0,0,\tau)\right]d\tau = 0$$

7. Системы, близкие к обратимым системам. Рассмотрим 2π-периодическую систему

$$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{v},t) + \mu\mathbf{U}_1(\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t) \qquad (7.1)$$

$$\mathbf{v}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{V}(\mathbf{u},\mathbf{v},t) + \mu\mathbf{V}_1(\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t); \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^l, \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ (l \geqslant n)$$

Предположим, что при $\mu = 0$ система (7.1) является обратимой с неподвижным множеством $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ и допускает симметричное 2π-периодическое решение

$$\mathbf{u} = \varphi(t), \quad \mathbf{v} = \psi(t); \quad \varphi(-t) = \varphi(t), \quad \psi(-t) = -\psi(t) \qquad (7.2)$$

а возмущения $\mu\mathbf{U}_1$, $\mu\mathbf{V}_1$ не относятся к классу обратимых. Исследуем задачу о 2π-периодических решениях системы (7.1) при $\mu \neq 0$ в случаях, когда порождающая система (при $\mu = 0$) является грубой для возмущений из класса обратимых.

1°. *Грубость в классе возмущений общего вида*. Выполним в (7.1) замену: $\mathbf{u} = \varphi(t) + \mathbf{p}$, $\mathbf{v} = \psi(t) + \mathbf{q}$. В результате получим

$$\mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{A}_-(t)\mathbf{p} + \mathbf{A}_+(t)\mathbf{q} + \mathbf{P}(\mathbf{p},\mathbf{q},t) + \mu\mathbf{U}_1(\mu,\varphi(t)+\mathbf{p},\psi(t)+\mathbf{q},t) \qquad (7.3)$$

$$\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{B}_+(t)\mathbf{p} + \mathbf{B}_-(t)\mathbf{q} + \mathbf{Q}(\mathbf{p},\mathbf{q},t) + \mu\mathbf{V}_1(\mu,\varphi(t)+\mathbf{p},\psi(t)+\mathbf{q},t)$$

где плюс(минус) означает матрицу с четными(нечетными) функциями, а $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ – нелинейные по $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ члены.

Фундаментальная матрица решений линейного по $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ приближения при $\mu = 0$ имеет вид [9]

$$\mathbf{S}(t) = \begin{Vmatrix} \mathbf{p}^+(t) & \mathbf{p}^-(t) \\ \mathbf{q}^-(t) & \mathbf{q}^+(t) \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{I}_{l+n}$$

($\mathbf{I}_j$ – единичная j-матрица). Кроме того, если $\mathbf{q}^+(2\pi)$ не имеет собственных значений, равных единице, то $\mathbf{S}(2\pi)$ имеет [14] ровно $l - n$ собственных значений, равных единице. Поэтому справедлива

Теорема 11. Если в системе (7.1) имеем $l = n$, $\det(\mathbf{q}^+(2\pi) - \mathbf{I}_n) \neq 0$, то при достаточно малых $\mu \neq 0$ в (7.1) существует единственное 2π-периодическое решение, обращающееся в симметричное решение (7.2) при $\mu = 0$.

2°. *Случай $l > n$*. По-прежнему полагаем, что матрица $\mathbf{q}^+(2\pi)$ не имеет собственных значений, равных единице. Тогда в матрице $\mathbf{S}(t)$ в последних n столбцах нет 2π-периодических решений [14], а k-семейство ($k = l - n$) 2π-периодических решений

$$p_j \equiv \varphi_j^*(\mathbf{B},t) = B_1\varphi_{j1}^*(t) + \ldots + B_k\varphi_{jk}^*(t) \quad (j = 1,\ldots,l) \qquad (7.4)$$

$$q_s \equiv \psi_s^*(\mathbf{B},t) = B_1\psi_{s1}^*(t) + \ldots + B_k\psi_{sk}^*(t) \quad (s = 1,\ldots,n)$$

симметрично относительно множества $\{\mathbf{p}, \mathbf{q} : \mathbf{q} = 0\}$. Если ввести в системе (7.3) малый параметр $\varepsilon = \mu^\sigma$ заменой $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (\varepsilon\mathbf{p}, \varepsilon\mathbf{q})$ и воспользоваться системой $\{\theta_{\alpha\nu}^-(t), \chi_{\beta\nu}^+(t)\}$ 2π-периодических решений сопряженной линейной системы, то уравнения для

$B_1, \ldots, B_k$ имеют вид

$$B_\nu^{\cdot} = \varepsilon^\lambda F_\nu(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{q}, t) + \varepsilon^{-1}\mu F_{1\nu}(\mu, \boldsymbol{\varphi}(t) + \varepsilon\mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}(t) + \varepsilon\mathbf{q}, t) \quad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{7.5}$$

$$F_\nu \equiv \varepsilon^{-1}\left[\sum_{\alpha=1}^{l} P_\alpha(\varepsilon\mathbf{p}, \varepsilon\mathbf{q}, t)\theta_{\alpha\nu}^{-}(t) + \sum_{\beta=1}^{n} Q_\beta(\varepsilon\mathbf{p}, \varepsilon\mathbf{q}, t)\chi_{\beta\nu}^{+}(t)\right]$$

$$F_{1\nu} \equiv \sum_{\alpha=1}^{l} U_{1\alpha}(\mu, \boldsymbol{\varphi}(t) + \varepsilon\mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}(t) + \varepsilon\mathbf{q}, t)\theta_{\alpha\nu}^{-}(t) +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{n} V_{1\beta}(\mu, \boldsymbol{\varphi}(t) + \varepsilon\mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}(t) + \varepsilon\mathbf{q}, t)\chi_{\beta\nu}^{+}(t) \quad (\lambda \in \mathbb{N}, \ \lambda \geqslant 1)$$

Дальнейший анализ требует составления амплитудного уравнения и определения его простых корней. При этом возможны все случаи разд. 5. Ниже ограничимся рассмотрением только одного из этих случаев.

Пусть решение (7.2) принадлежит k-семейству 2π-периодических решений $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}, t)$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, t)$. В этом случае амплитудное уравнение имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{F}_1(0, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}, t), \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A}, t), t)dt = \mathbf{0} \tag{7.6}$$

Теорема 12. Каждому простому корню амплитудного уравнения (7.6) отвечает при достаточно малом $\mu \neq 0$ единственное 2π-периодическое решение системы (7.1), отличающееся от симметричного на величину $O(\mu)$.

Замечание. Амплитудное уравнение (7.6) отвечает случаю (5.7). Очевидно, несложно выписать амплитудные уравнения и в случаях, соответствующих (5.8)–(5.10).

3°. *Случай* $\operatorname{rank}\mathbf{q}^-(\pi) = n$. В этом случае у линейной по $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ при $\mu = 0$ части системы (7.3) имеется $(l - n)$-семейство симметричных относительно множества $\{\mathbf{p}, \mathbf{q} : \mathbf{q} = \mathbf{0}\}$ 2π-периодических решений. При $\operatorname{rank}\mathbf{p}^-(\pi) = n$ приходим к случаю 2°. Если $\operatorname{rank}\mathbf{p}^-(\pi) = \varkappa < n$, то указанная линейная система имеет также $(n - \varkappa)$-семейство симметричных относительно множества $\{\mathbf{p}, \mathbf{q} : \mathbf{p} = \mathbf{0}\}$ 2π-периодических решений. Воспользовавшись периодическими решениями сопряженной линейной системы, приходим к системе вида (7.5), в которой ν меняется от 1 до $l - \varkappa$.

Таким образом, только при $l = n$ обратимая порождающая система может быть грубой в смысле свойства иметь периодическое движение, если возмущения рассматриваются общего вида. Отметим также, что более вырожденные случаи, когда обратимая порождающая система не является грубой даже при возмущениях из класса обратимых, при возмущениях общего вида исследуется аналогично, как и рассмотренные здесь случаи. При этом необходимо использовать известные результаты [14] по исследованию обратимых систем, а также изложенное в разд. 5. Эти случаи опущены за недостатком места.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96051, 97-01-00538).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
2. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
3. *Ляпунов А.М.* О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 1. С. 418–446.

4. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
5. *Проскуряков А.П.* Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 256 с.
6. *Копнин Ю.М.* Колебания автономных систем с одной степенью свободы // Инж. журн. 1962. Т. 2. № 3. С. 3–8.
7. *Копнин Ю.М.* Периодические колебания нелинейных неавтономных систем со многими степенями свободы // Инж. журн. 1965. Т. 5. Вып. 2. С. 217–226.
8. *Heinbockel J.H., Struble R.A.* Periodic solutions for differential systems with symmetries // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1965. V. 13. N 2. P. 425–440.
9. *Тхай В.Н.* Нелинейные колебания обратимых систем // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 38–50.
10. *Тхай В.Н.* Симметричные периодические орбиты задачи многих тел. Резонансность и парад планет // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 355–365.
11. *Тхай В.Н.* Симметричные периодические орбиты третьего рода в N-планетной задаче. Резонансность и парад планет // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 1. С. 52–55.
12. *Тхай В.Н.* Неподвижные множества и симметричные периодические движения обратимых механических систем // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 959–971.
13. *Тхай В.Н.* Симметричные периодические орбиты в ограниченной задаче трех тел // Космические исслед. 1997. Т. 35. № 2. С. 164–171.
14. *Тхай В.Н.* О продолжении периодических движений обратимой системы в негрубых случаях // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 56–72.
15. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с.
16. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. 230 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.VII.1997