УДК 539.3

© 1998 г. **А.С. Космодамианский, Н.М. Нескородев**

СВЯЗЬ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО И ИЗОТРОПНОГО ТЕЛ

Решение плоской задачи теории упругости для изотропного тела приводится к решению задачи для анизотропного тела. В бигармонический оператор задачи теории упругости изотропного тела вводятся малые дополнительные слагаемые, так чтобы полученный обобщенный бигармонический оператор не имел кратных корней. Тогда общее решение представляется через функции обобщенных комплексных переменных и численные исследования для изотропных и анизотропных тел проводятся на основе одних и тех же алгоритмов. Эффективность такой замены выявлена при численных исследованиях для односвязных и многосвязных областей произвольного сечения.

Решение плоской задачи теории упругости для анизотропного тела приводится к интегрированию обобщенного бигармонического уравнения [1]

$$\left[a_0\frac{\partial^4}{\partial x^4}+a_1\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}+a_2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+a_3\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}+a_4\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right]F=0 \tag{1}$$

где $a_0, ..., a_4$ – действительные постоянные, зависящие от упругих свойств рассматриваемого тела.

Решение этого уравнения ищется в форме $F(x, y) = F(z)$, $z = x + \mu y$ и зависит от корней соответствующего характеристического уравнения.

Эти корни либо комплексные, либо чисто мнимые попарно сопряженные:

$$\mu_j=\alpha_j+i\beta_j,\quad \bar{\mu}_j=\alpha_j-i\beta_j,\quad i=1,2 \tag{2}$$

После их нахождения уравнение (1) можно записать в виде

$$\Delta_1\Delta_2F=0,\quad \Delta_j=\mu_j\bar{\mu}_j\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(\mu_j+\bar{\mu}_j)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{3}$$

Если корни μ_j различны, то общим решением уравнения (3) является функция

$$F=\varphi_1+\varphi_2 \tag{4}$$

причем φ_j удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_j\varphi_j=0,\quad j=1,2 \tag{5}$$

Общим действительным решением уравнения (5) будет выражение

$$\varphi_j=F_j(z_j)+\overline{F_j(z_j)} \tag{6}$$

Здесь $F_j(z_j)$ – произвольные аналитические функции обобщенных комплексных переменных $z_j = x + \mu_j y$.

Функция (4) принимает вид

$$F=2\,\mathrm{Re}[F_1(z_1)+F_2(z_2)] \tag{7}$$

В случае изотропного тела характеристическое уравнение имеет двукратные корни i и $-i$.

Операторы уравнения (3) в этом случае принимают вид

$$\Delta_j=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2 \tag{8}$$

а общее действительное решение представляется в форме [2]

$$F=2\,\mathrm{Re}[z\varphi(z)+\chi(z)] \tag{9}$$

В такой же форме запишется решение и в случае попарно равных комплексных корней $\mu_1 = \mu_2 = \alpha + i\beta$. Произведя аффинное преобразование $x_* = x + \alpha y,\ y_* = \beta y$, придем к комплексной переменной $z = z_1 = z_2 = x_* + iy_*$. Этот вариант можно включить в дальнейшее рассмотрение как случай, представляющий собой полную аналогию со случаем изотропного тела.

Решение (9) по форме отличается от общего решения (7), которое отвечает случаю, когда корни μ_j различны. Это не позволяет производить численные исследования задач для изотропных и анизотропных тел по одним и тем же алгоритмам.

Здесь предлагается привести решение задачи для изотропного тела к задаче для анизотропного тела.

Введем в операторы (8) дополнительные слагаемые, чтобы они приняли вид

$$\Delta_1 = (1+\varepsilon)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \Delta_2 = (1-\varepsilon)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

где ε – малый параметр. Тогда бигармонический оператор превращается в обобщенный бигармонический. Корни характеристического уравнения μ_j теперь не являются кратными и имеют вид

$$\mu_1 = (1+\varepsilon)i, \quad \mu_2 = (1-\varepsilon)i, \quad \overline{\mu}_1 = -(1+\varepsilon)i, \quad \overline{\mu}_2 = -(1-\varepsilon)i \tag{10}$$

а функция F запишется в форме (7).

Если устремить величину ε к нулю, то определенная комбинация решений вида (7) дает решение бигармонического уравнения вида (9). Раскладывая функции $F_j(z_j) = (-1)^{j+1}F(z_j) + i\varepsilon\Psi_j(z_j)$, где $z_1 = z + i\varepsilon y$, $z_2 = z - i\varepsilon y$, $z = x + iy$, в ряд по параметру ε найдем

$$F_j(z_j) = (-1)^{j+1}[F(z) + (-1)^{j+1} i\varepsilon y F'(z) + \ldots] + i\varepsilon[\Psi_j(z) + (-1)^{j+1} i\varepsilon y \Psi_j'(z) + \ldots], \quad j = 1,2$$

Отсюда получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[F_1(z_1) - F_2(z_2)] = F(z) + F(z) \tag{11}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{F_1(z_1) + F_2(z_2)}{i\varepsilon}\right] = y[F'(z) + F'(z)] + \Psi_1(z) + \Psi_2(z)$$

Первое соотношение (11) дает гармоническую, а второе – бигармоническую и гармоническую составляющие решения (9). Добавляя к ним аналогичные комбинации для функций $\overline{F_1(z_1)}$ и $\overline{F_2(z_2)}$, получим решение вида (9). Таким образом, решение (7) с параметрами (10) содержит в себе бигармоническое решение (9), которое можно выделить указанным выше способом при $\varepsilon \to 0$. Это означает, что при малых значениях ε решение (7) можно использовать для определения напряженно-деформированного состояния изотропных сред.

В случае обобщенного плоского напряженного состояния пластинки перемещения и напряжения в ней определяются по известным формулам [1] через функции $\Phi_j(z_j)$ и параметры p_j, q_j ($j = 1,2$), причем

$$\Phi_j(z_j) = dF_j / dZ_j, \quad p_j = a_{11}\mu_j^2 + a_{12}, \quad q_j = a_{12}\mu_j + a_{22}/\mu_j$$

a_{11}, a_{22}, a_{12} – коэффициенты деформации изотропной пластинки.

При заданных внешних усилиях X_n и Y_n граничные условия для определения функций $\Phi_j(z_j)$ принимают вид

$$2\,\mathrm{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] = -\int_0^s Y_n ds + c_1$$

$$2\,\mathrm{Re}[\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)] = \int_0^s X_n ds + c_2$$

Если же заданы перемещения u^* и v^*, то они получаются такими:

$$2\,\mathrm{Re}[p_1\Phi_1(z_1) + p_2\Phi_2(z_2)] = u^* + \omega y - u_0$$

$$2\,\mathrm{Re}[q_1\Phi_1(z_1) + q_2\Phi_2(z_2)] = v^* - \omega x - v_0$$

В качестве примера рассмотрим пластинку с эллиптическим отверстием. Пластинка растягивается усилиями интенсивности p вдоль оси x. В этом случае в сплошной пластинке

$$\sigma_x^0 = p, \quad \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0 \tag{12}$$

Решение, учитывающее влияние эллиптического отверстия в пластинке, получается с помощью функций [3]

$$\Phi_j(z_j) = \frac{a_j}{\zeta_j}, \quad a_1 = -a_2 = \frac{pb}{2i(\mu_1 - \mu_2)} \tag{13}$$

Величина ζ_j связана с z_j соотношением

$$z_j = \frac{a - i\mu_j b}{2}\zeta_j + \frac{a + i\mu_j b}{2}\zeta_j^{-1}$$

(a и b – полуоси эллипса).

Напряжения вблизи контура отверстия вычисляются по формуле

$$\sigma_\theta^\varepsilon = \sigma_x^0 + \sigma_y^0 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}(1+\mu_j^2)\Phi_j'(z_j) \tag{14}$$

После подстановки решения (13) в формулу (14) и ряда преобразований получим

$$\sigma_\theta^\varepsilon = p\left[1 - 2\,\mathrm{Re}\, b\frac{2[(a+b)\sigma^2 - (a-b)] - \varepsilon^2 b(\sigma^2+1)}{[(a+b)\sigma^2 - (a-b)]^2 - \varepsilon^2 b^2(\sigma^2+1)^2}\right] \tag{15}$$

Здесь $\sigma = \cos\theta + i\sin\theta$, θ – полярный угол.

Решение этой задачи, полученное в рамках теории упругости изотропного тела, имеет вид [2]

$$\sigma_\theta = p\left[1 - \mathrm{Re}\frac{4b}{(a+b)\sigma^2 - (a-b)}\right] \tag{16}$$

Сопоставление формул (15) и (16) показывает, что при $\varepsilon = 0$ они совпадают.

Проведя вычисления, убеждаемся, что

$$|\sigma_\theta^\varepsilon - \sigma_\theta| / p \leqslant 2b\varepsilon^2 \tag{17}$$

Таким образом, метод замены бигармонического уравнения указанным обобщенным бигармоническим позволяет построить приближение с точностью порядка ε^2.

В заключение отметим, что аналогичные результаты справедливы и для уравнений изгиба тонких плит.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. *Космодамианский А.С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Киев; Донецк: Вищ. шк., 1976. 200 с.

Донецк

Поступила в редакцию
2.IV.1997