УДК 539.3:534.1

© 1998 г. С.Д. Светличная, Е.Г. Янютин

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГИХ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ФОРМУ КОЛЬЦЕВОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА

В рамках динамической теории упругости исследуется нестационарное деформирование тел цилиндрической формы. Указываются частные случаи общего решения. Приводятся численные результаты, отражающие специфику напряженного состояния бесконечно длинного толстостенного цилиндра, находящегося в условиях плоского неосесимметричного нагружения. Способ исследования нестационарных волновых процессов в цилиндрических телах аналогичен предложенному ранее [1–3].

1. Постановка задачи и соотношения общего вида. Рассматривается в общем случае изотропное упругое тело в цилиндрических координатах (r, θ, z), ограниченное цилиндрическими поверхностями $r = R_0$ и $r = R_1$, плоскостями $z = 0$ и $z = z_0$, полуплоскостями $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ $(R_0 \leqslant r \leqslant R_1;\ 0 \leqslant z \leqslant z_0;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0)$. Систему начальных условий предполагаем нулевой.

При отсутствии массовых сил уравнения Ламе, описывающие движение однородной изотропной упругой среды, эквивалентны в круговых цилиндрических координатах следующей системе уравнений [4]:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta\psi_\alpha = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial t^2}, \quad \alpha = 1,2 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}(\psi_1\mathbf{e}_z) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\psi_2\mathbf{e}_z) \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещения, φ, ψ_1, ψ_2 – скалярные потенциалы перемещений, $\mathbf{e}_z$ – орт оси Z, a, b – соответственно скорости распространения продольных и поперечных волн деформаций в упругой среде.

В рассматриваемой задаче импульсного деформирования цилиндрического тела решение волновых уравнений (1.1) ищется в виде двойных разложений по осевой и угловой координатам (суммирование ведется по n и k от нуля до бесконечности)

$$\begin{gathered}
\varphi = \sum R_{nk}^0(r,t)\, w_n(\theta) v_k(z) \\
\psi_1 = \sum R_{nk}^1(r,t)\frac{1}{\mu_n}\frac{dw_n(\theta)}{d\theta} v_k(z) \\
\psi_2 = \sum R_{nk}^2(r,t)\, w_n(\theta)\frac{1}{\nu_k}\frac{dv_k(z)}{dz} \\
\mu_n = n\pi/\theta_0, \quad \nu_k = k\pi/z_0
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $w_n(\theta)$, $v_k(z)$ – известные функции соответствующих координат, а $R_{nk}^\beta(r, t)$, $(\beta = 0, 1, 2)$ подлежат определению. Конкретные выражения для функций $w_n(\theta)$, $v_k(z)$ приводятся далее.

Разложения (1.3) аналогичны приведенным в [5].

Подставляя разложения (1.3) в выражения (1.2), получаем формулы для компонент вектора перемещения.

На торцевых поверхностях цилиндрической панели, при выборе координатных функций w_n, v_k в виде

$$w_n = \cos\mu_n\theta, \quad v_k = \cos\nu_k z \tag{1.4}$$

выполняются следующие граничные условия:

$$\begin{gathered}
\sigma_{z\theta} = 0, \quad \sigma_{zr} = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, z_0 \\
\sigma_{\theta z} = 0, \quad \sigma_{\theta r} = 0, \quad u_\theta = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \theta_0
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Если же их выбрать в форме $w_n = \sin \mu_n\theta$, $v_k = \sin \nu_k z$, то тогда должны выполняться такие условия:

$$\sigma_z = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\theta = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, z_0$$

$$\sigma_\theta = 0, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \theta_0$$

В дальнейшем ограничимся видом функций w_n, v_k согласно (1.4) и соответственно граничными условиями на торцах (1.5).

Задание граничных условий на цилиндрических поверхностях может быть реализовано в двух формах. В случае задания граничных напряжений имеют место такие выражения:

$$\begin{aligned} &\sigma_r(R_0,\theta,z) = F_1(\theta,z,t), \quad \sigma_r(R_1,\theta,z,t) = F_4(\theta,z,t) \\ &\sigma_{r\theta}(R_0,\theta,z,t) = F_2(\theta,z,t), \quad \sigma_{r\theta}(R_1,\theta,z,t) = F_5(\theta,z,t) \\ &\sigma_{rz}(R_0,\theta,z,t) = F_3(\theta,z,t), \quad \sigma_{rz}(R_1,\theta,z,t) = F_6(\theta,z,t) \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $F_1(\theta, z, t) - F_6(\theta, z, t)$ – известные функции.

В случае задания граничных условий в перемещениях должны выполняться аналогичные соотношения.

При выборе функций w_n, v_k в виде (1.4) разложения (1.3) превращаются в двойные ряды Фурье по переменным θ, z.

Для удовлетворения граничным условиям (1.6) необходимо, чтобы функции $F_j(\theta, z, t)$ ($j = 1, 2, ..., 6$) также были разложимы в аналогичные ряды Фурье.

2. Основные соотношения в пространстве изображений по Лапласу. Для дальнейшего построения решения необходимо определить функции R_{nk}^{β}, входящие в формулы (1.3). Для этого волновые уравнения (1.1) запишем в пространстве изображений по Лапласу, пометив изображения верхним индексом L. Подставив в полученные уравнения представления для φ, ψ_1 и ψ_2 из формул (1.3) при учете (1.4), получим модифицированные уравнения Бесселя относительно $R_{nk}^{\beta L}$ ($\beta = 0, 1, 2$). Их общие решения записываются следующим образом:

$$R_{nk}^{\beta L} = A_\beta^{nkL}(S)\, I_{\mu_n}(r(\nu_k^2 + S^2/c_\beta^2)^{1/2}) + B_\beta^{nkL}(S)\, K_{\mu_n}(r(\nu_k^2 + S^2/c_\beta^2)^{1/2}) \tag{2.1}$$

$$\beta = 0, 1, 2; \quad c_0 = a, \quad c_1 = c_2 = b$$

Здесь $A_\beta^{nkL}(S)$, $B_\beta^{nkL}(S)$ – произвольные функции параметра преобразования S, $I_\lambda(x)$ – модифицированная функция Бесселя мнимого аргумента с индексом λ, $K_\lambda(x)$ – функция Макдональда.

3. Запись основных соотношений в пространстве оригиналов. Осуществим теперь переход в пространство оригиналов. Для этого воспользуемся следующими формулами [6]:

$$\begin{aligned} &I_\mu((S^2+\gamma^2)^{1/2})(2\pi)^{1/2}(S^2+\gamma^2)^{-\mu/2}e^{-S} = \\ &= L\begin{cases} \gamma^{1/2-\mu}(2t-t^2)^{\mu/2-1/4} I_{\mu-1/2}(\gamma(2t-t^2)^{1/2}), & 0<t<2 \\ 0, & t>2 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{e^{\varkappa S} K_\mu(\varkappa(S^2+\alpha^2)^{1/2})}{(S^2+\alpha^2)^{\mu/2}} = \\ &= L\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \alpha^{1/2-\mu}(t^2+2\varkappa t)^{\mu/2-1/4}\varkappa^{-\mu} J_{\mu-1/2}(\alpha(t^2+2\varkappa t)^{1/2})\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\operatorname{Re}\mu > 1/2, \quad |\arg \varkappa| < \pi$$

где $J_\rho(x)$ – функция Бесселя первого рода с индексом ρ.

Используя формулы перехода (3.1), (3.2), а также некоторые стандартные правила операционного исчисления, придем к выражениям для функций R_{nk}^{β} ($\beta = 0, 1, 2$) в пространстве оригиналов

$$R_{nk}^{\beta}=H\left(t-\frac{R_1-r}{c_\beta}\right)\int\limits_0^{t-(R_1-r)/c_\beta} A_\beta^{nk}(\tau)\,h_{\mu_n}^{\beta 1}\left(r,t-\frac{R_1-r}{c_\beta}-\tau\right)d\tau+$$

$$+H\left(t-\frac{r-R_0}{c_\beta}\right)\int\limits_0^{t-(r-R_0)/c_\beta} B_\beta^{nk}(\tau)\,g_{\mu_n}^{\beta 1}\left(r,t-\frac{r-R_0}{c_\beta}-\tau\right)d\tau \tag{3.3}$$

где приняты следующие обозначения:

$$h_{\mu_n}^{\beta 1}(r,t)=\int\limits_0^t h_{\mu_n}^{\beta}(r,\tau)\,d\tau,\quad g_{\mu_n}^{\beta 1}(r,t)=\int\limits_0^t g_{\mu_n}^{\beta}(r,\tau)\,d\tau$$

$H(t)$ – функция Хевисайда, величины c_β описаны в (2.1), причем

$$h_{\mu_n}^{\beta}(r,t)=0,\quad t>\frac{2r}{c_\beta}$$

$$h_{\mu_n}^{\beta}(r,t)=\nu_k^{1/2-\mu_n}r^{1-\mu_n}(tc_\beta)^{\mu_n/2-1/4}\times$$

$$\times(2r-tc_\beta)^{\mu_n/2-1/4}I_{\mu_n-1/2}(\nu_k(tc_\beta)^{1/2}(2r-tc_\beta)^{1/2}),\quad 0<t<\frac{2r}{c_\beta}$$

$$g_{\mu_n}^{\beta}(r,t)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\nu_k^{1/2-\mu_n}c_\beta^{3/4-\mu_n/2}\times$$

$$\times r^{-\mu_n}(t^2c_\beta+2rt)^{\mu_n/2-1/4}J_{\mu_n-1/2}(\nu_k(t^2c_\beta^2+2rtc_\beta)^{1/2})$$

4. Получение системы интегральных уравнений. Подставляем формулы (3.3) в упомянутые выражения для компонент вектора перемещения, а последние в граничные условия (1.6). Тогда соотношения (1.6) после отделения координат θ и z превратятся в систему шести интегральных уравнений Вольтерры во времени для неизвестных функций $A_\beta^{nk}(t)$, $B_\beta^{nk}(t)$ (β = 0, 1, 2). Для решения указанных уравнений применяется численный подход, суть которого состоит в подстановке в них аппроксимирующих выражений для искомых функций следующего вида [3]:

$$A_j^{nk}(t)=\sum_{p=1}^{m}A_{jp}^{nk}\Delta_pH,\quad B_j^{nk}(t)=\sum_{p=1}^{m}B_{jp}^{nk}\Delta_pH,$$

$$\Delta_pH=H(t-t_{p-1})-H(t-t_p) \tag{4.1}$$

$$A_{jp}^{nk}=\text{const},\quad B_{jp}^{nk}=\text{const},\quad t_p=p\,\Delta t$$

где Δt – "шаг" по времени, $t<m\,\Delta t$, $m=1, 2, \ldots$

Подставляя выражения (4.1) в упомянутые интегральные уравнения, приходим к рекуррентной по индексу m системе алгебраических уравнений для определения величин A_{jm}^{nk}, B_{jm}^{nk} (j = = 1, 2, 3, m = 1, 2, ...), которые аппроксимируют искомые функции времени.

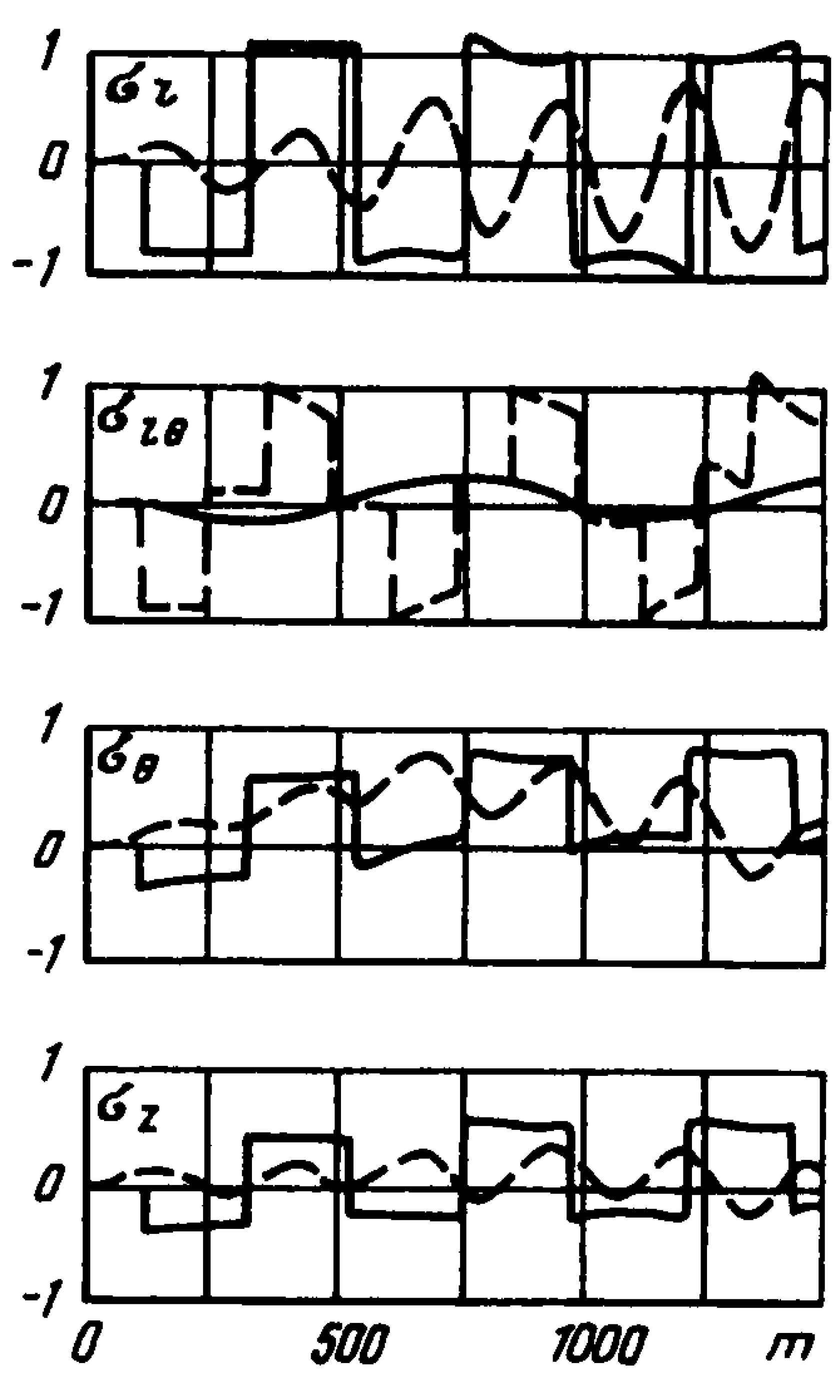
Отметим, что сведение к упомянутой системе алгебраических уравнений с использованием аппроксимаций искомых функций при анализе интегральных уравнений Вольтерры относится к одной из разновидностей способов численного решения этих уравнений. Аппроксимация (4.1) естественным образом определяет скачкообразное изменение напряжений, развивающихся в упругом теле при действии на него импульсных нагрузок, и обеспечивает устойчивость численного решения интегральных уравнений с непрерывными или интегрируемыми ядрами.

Преобразовывая с учетом аппроксимаций (4.1) формулы, найденные для коэффициентов разложений перемещений и напряжений, получаем соотношения, удобные для численной реализации.

5. Различные варианты деформирования цилиндрических тел.

Вариант 1. Используя приведенные ранее формулы, можно рассчитать произвольное импульсное воздействие на толстостенную цилиндрическую панель.

Вместе с тем могут представить интерес частные случаи, определяемые конкретными значениями n и k в рядах (1.3) для потенциалов перемещений.



Вариант 2. Пусть в рядах (1.3) все коэффициенты равны нулю, кроме отвечающих $n = 0$, $k = 0$. Как следует из формул для разложений вектора перемещения в двойные ряды Фурье, этот случай соответствует чисто радиальному смещению $u^{00} \equiv$ $\equiv u = \partial R^0/\partial r$, зависящему только от радиальной координаты и времени. Этот случай эквивалентен плоскому осесимметричному деформированию замкнутого кольцевого цилиндрического слоя.

Вариант 3. Допустим, что в рядах (1.3) отличны от нуля только коэффициенты с индексами $k = 0$, $n \neq 0$. Тогда $u_z \equiv 0$, а остальные компоненты вектора перемещения не зависят от координаты z. Этот случай эквивалентен плоскому неосесимметричному деформированию замкнутого кольцевого цилиндрического слоя.

Вариант 4. Случай неравенства нулю коэффициентов с индексами $n = 0$, $k \neq 0$ отвечает тому, что $u_\theta \equiv 0$, а остальные компоненты не зависят от переменной θ. Указанный вариант соответствует осесимметричному деформированию замкнутого кольцевого цилиндрического слоя конечной длины.

6. Численные результаты. Приводятся численные результаты для плоского неосесимметричного деформирования толстостенного цилиндра, отвечающего случаю задания граничных напряжений на граничных поверхностях (вариант 3). Предполагается, что в рядах (1.3) отличными от нуля являются коэффициенты с индексами $n = 2$, $k = 0$. На фигуре представлены зависимости от времени безразмерных напряжений σ_r^{20}, $\sigma_{r\theta}^{20}$, σ_θ^{20}, σ_z^{20}, рассчитанных в средней по толщине точке толстостенного цилиндра, имеющего следующие параметры: $R_0 = 0{,}09$ м, $R_1 =$ $= 0{,}105$ м, $E = 2{,}058 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $\nu = 0{,}3$, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, где E, ν, ρ – постоянные материала.

Предполагается, что внешняя граничная поверхность свободна от нагружения, а к внутренней поверхности прикладываются в виде конечного импульса либо радиальная нагрузка: $\sigma_r^{20}(R_0, t) = -\sigma_0 H(\omega_0 - t)$, $\sigma_{r\theta}^{20}(R_0, t) = 0$, где $\omega_0 = (R_1 - R_0)/a$ (соответствующие результаты представлены сплошными линиями), либо касательная нагрузка: $\sigma_r^{20}(R_0, t) = 0$, $\sigma_{r\theta}^{20}(R_0, t) =$ $= -\sigma_0 H(\omega_0 - t)$ (штриховые линии). Вдоль временной горизонтальной оси отложено число "шагов" m во времени, в первом случае $\Delta t = 1{,}13 \cdot 10^{-8}$ с, а во втором случае $\Delta t = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ с.

Хорошо прослеживаются скачки в значениях напряжений, обусловленные скачкообразным характером поведения нагрузки, а также наложением волн деформаций, отражающихся от граничных поверхностей цилиндра. Видна также специфика деформирования в случае задания радиальных либо касательных граничных напряжений.

В заключение укажем на возможность обобщения описанной методики на решение задач импульсного деформирования многослойных цилиндрических тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов В.И.* Решение предельных задач теории упругости в случае круга и сферы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14. № 2. С. 69–72.
2. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Бабаев А.Э.* Гидроупругость систем оболочек. Киев: Вищ. шк., 1984. 207 с.
3. *Янютин Е.Г.* Импульсное деформирование упругих элементов конструкций. Киев: Наук. думка, 1993. 145 с.
4. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
5. *Фридман Л.И.* Динамическая задача теории упругости для тел канонической формы // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 12. С. 102–108.
6. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 466 с.

Харьков

Поступила в редакцию
11.XI.1996