УДК 593.3

© 1998 г. И.В. Андрианов, В.И. Олевский, С. Токажевский

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ АДОМЯНА

Предлагается модификация метода Адомяна [1–4], основанная на использовании аппроксимант Паде [5]. Рассмотрены примеры: нелинейное дифференциальное уравнение, прямоугольная пластина под действием поперечного давления, а также комбинации поперечного давления с продольным сжатием.

Предлагаемый вариант метода оказывается более эффективным с точки зрения практической сходимости, а также позволяет сделать некоторые теоретические заключения об области сходимости решения и ее скорости. В отличие от метода возмущения [6–8] при декомпозиции не предполагается наличие некоторого малого параметра [1–4, 9], что снимает ряд ограничений типа "слабой" нелинейности или "малых" отклонений области от канонической формы. Вместе с тем решения, полученные этим методом, в ряде случаев требуют обобщенного суммирования, для чего в задачах нелинейной механики успешно используется метод дробно-рационального преобразования Паде [10–13].

1. Начнем изложение с простого примера. Рассмотрим обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение с начальным условием

$$y' + y^3 = 0, \quad y(0) = 1/2 \tag{1.1}$$

Точное решение этой задачи имеет вид

$$y = (2x+4)^{-1/2} \tag{1.2}$$

Приведем решение задачи (1.1) методом декомпозиции [1]

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + \frac{3}{64}x^2 - \ldots \tag{1.3}$$

и методом возмущения [6]

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + \frac{3}{64}x^2 - \frac{5}{256}x^3 + \ldots \tag{1.4}$$

Сравнение членов разложения приближений по методам декомпозиции (1.3) и возмущения (1.4) показывает, что они совпадают с членами разложения точного решения (1.2) в ряд Маклорена до члена с номером, соответствующим номеру приближения. Очевидно, что радиусы их сходимости также будут совпадать с радиусом сходимости разложения точного решения (он равен двум). Таким образом, в данном случае правомерно применение мероморфного продолжения решения по схеме Паде [5]. Для увеличения области сходимости используем аппроксиманты Паде (АП) порядка [0/1] и [1/1]. Они совпадают для точного решения и обоих приближений и имеют вид

$$F[0/1] = \frac{2}{4+x}, \quad F[1/1] = \frac{8+x}{16+6x}$$

Применение указанных АП позволяет расширить область практической применимости полученных результатов более чем в 2 раза при относительной погрешности 10%.

Анализ точного решения, приближений по методам возмущения и декомпозиции, а также их АП для данного примера позволяет сделать следующие заключения, доказательству которых и посвящена настоящая работа.

1°. Компоненты при степенях переменной после суммирования по всем приближениям как в методе декомпозиции, так и в методе возмущения совпадают с разложением точного решения уравнения в ряд Маклорена.

2°. Область сходимости приближений, полученных указанными методами – круг с центром в нуле и радиусом, равным расстоянию до ближайшей особой точки точного решения.

3°. Для мероморфного продолжения решения до ближайшей существенно особой точки истинного решения правомерно использование АП, при этом сходимость существенно улучшается.

2. Перейдем к задаче в более общей постановке. Рассмотрим нелинейную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ в области Ω

$$L_i u_i + R_i(u_1,...,u_n) + N_i(u_i,...,u_n) = g_i, \quad i = 1,...,n \tag{2.1}$$

$$L_i = \frac{\partial^{k_i}}{\partial \xi^{k_i}}, \quad g_i = \sum_{j=0}^{\infty} g_{ij}\xi^j$$

с краевыми условиями на границе области $\partial\Omega$

$$G_j(u_1,...,u_n) = \mu_j, \quad j = 1,...,k, \quad k = k_1 + ... + k_n, \mu_j = \text{const} \tag{2.2}$$

Здесь L_i – оператор старшей производной i-го уравнения по независимой переменной ξ, R_i – линейный дифференциальный оператор, содержащий производные меньшего порядка, N_i, G_j – нелинейные дифференциальные операторы, содержащие производные меньшего порядка $g_i = g_i(\xi)$ – непрерывная по ξ функция. Будем полагать, что R_i, N_i, G_j – непрерывные операторы от искомых функций и их производных, при этом порядок используемых производных не превосходит k_i и $\max_{i=1,...,n} k_i$ соответственно. Будем полагать также, что R_i, N_i, G_j обращаются в нуль при равенстве нулю искомых функций и их производных и точка $\xi = 0$ лежит внутри Ω. Предположим, что найдено решение $\{\bar{u}_i\}_{i=1}^{n}$ задачи (2.1), (2.2), компоненты которого аналитичны в некоторой окрестности $\xi = 0$ и, следовательно, могут быть представлены в виде рядов Тейлора

$$\bar{u}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_{ij}\xi^j, \quad i = 1,...,n \tag{2.3}$$

Полагая u_i и их производные независимыми аргументами, представим R_i, N_i, G_j в виде обобщенных многомерных рядов Тейлора

$$\begin{gathered}
R_i(u_1,...,u_n) + N_i(u_1,...,u_n) = \\
= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{k_j-1} N_{ijl}\frac{\partial^l u_j}{\partial \xi^l} + \frac{1}{2!}\sum_{j,p=1}^{n}\sum_{l=0}^{k_j-1}\sum_{m=0}^{k_p-1} N_{ijplm}\frac{\partial^l u_j}{\partial \xi^l}\frac{\partial^m u_p}{\partial \xi^m} + ... \\
G_j(u_1,...,u_n) = \sum_{q=1}^{n}\sum_{l=0}^{k_q-1} G_{jql}\frac{\partial^l u_q}{\partial \xi^l} + \frac{1}{2!}\sum_{q,p=1}^{n}\sum_{l=0}^{k_q-1}\sum_{m=0}^{k_p-1} N_{jqplm}\frac{\partial^l u_q}{\partial \xi^l}\frac{\partial^m u_p}{\partial \xi^m} + ...
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Подставляя разложения (2.3) и (2.4) в исходное уравнение (2.1), получим необходимое условие для определения $\bar{u}_{ij}$ в виде бесконечной системы уравнений

$$\bar{u}_{ik_i}=\frac{1}{k_i!}\left(g_{i0}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{k_j-1}N_{ijl}\bar{u}_{jl}l!-\frac{1}{2!}\sum_{j,p=1}^{n}\sum_{m=0}^{k_p-1}\sum_{l=0}^{k_j-1}N_{ijplm}\bar{u}_{jl}l!\bar{u}_{pm}m!-...\right) \tag{2.5}$$

$$\bar{u}_{is}=-\frac{(s-k_i)!}{s!}\Bigg(-g_{is}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{k_j-1}N_{ijl}\bar{u}_{j(l+s-k_i)}\frac{(l+s-k_i)!}{(s-k_i)!}+$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{j,p=1}^{n}\sum_{l=0}^{k_j-1}\sum_{m=0}^{k_p-1}N_{ijplm}\sum_{q=l}^{l+s-k_i}\bar{u}_{jq}\bar{u}_{p(l+m-q+s-k_i)}\times$$

$$\times\frac{q!}{(q-l)!}\frac{(l+m-q+s-k_i)!}{(l-q+s-k_i)!}+...\Bigg),\quad s=k_i+1,\ k_i+2,...;\ i=1,...,n$$

Таким образом, каждая из компонент $\bar{u}_{is}$, начиная с $s=k_i$, определяется рекуррентно согласно формулам (2.5) по компонентам $\bar{u}_{i0},...,\bar{u}_{i(k_1-1)}$. Для определения последних имеется k граничных условий, которые нельзя разделить по компонентам при ξ^k.

Подставляя разложения (2.3) и (2.4) в граничные условия (2.2), получим

$$\sum_{q=1}^{n}\sum_{l=0}^{k_q-1}G_{igl}\sum_{p=l}^{\infty}\bar{u}_{qp}(\xi^0)\frac{p!}{(p-l)!}+\frac{1}{2!}\sum_{q,p=1}^{n}\sum_{l=0}^{k_q-1}\sum_{m=0}^{k_p-1}G_{iqplm}\sum_{s=l}^{\infty}\bar{u}_{qs}(\xi^0)^{s-l}\frac{s!}{(s-l)!}\times$$

$$\times\sum_{r=m}^{\infty}\bar{u}_{pr}(\xi^0)^{r-m}\frac{r!}{(r-m)!}+...=\mu_j,\quad j=1,...,k \tag{2.6}$$

Вид полученной системы (2.5) и граничных условий (2.6) позволяет рассматривать и случай бесконечного числа искомых функций ($n=\infty$), при этом число уравнений также бесконечно ($k=\infty$), а их вид не изменяется.

Для того чтобы условия (2.5), (2.6) стали достаточными для определения решения краевой задачи, необходимо предположить единственность $\{\bar{u}_i\}_{i=1}^{n}$ в некоторой круговой окрестности $\xi=0$ с ненулевым радиусом, что естественно для большинства механических задач. В силу единственности решения и того, что соотношения (2.5) однозначно определяют связь между первыми k_i членами разложения искомых функций и всеми последующими по построению, определение первых компонент из (2.6) также однозначно. Таким образом, соотношения (2.5), (2.6) полностью и однозначно определяют решение краевой задачи (2.1), (2.2). Это позволяет считать, что если решение системы (2.1) с граничными условиями (2.2) существует, единственно и аналитично в окрестности точки $\xi=0$, то необходимым и достаточным условием того, что ряд (2.3) есть разложение этого решения в ряд Маклорена по ξ, является выполнение для его компонент равенств (2.5), (2.6).

3. Переформулируем теперь исходную краевую задачу как задачу теории возмущений, вводя искусственный малый параметр ε_1, следуя Дородницыну [6] (в вычислительной математике аналогичная схема называется методом продолжения по параметру).

Рассмотрим решение краевой задачи (2.1), (2.2) по схеме метода возмущения с искусственным малым параметром ε_1 в следующей форме:

$$L_iu_i=-\varepsilon_1(R_i(u_1,...,u_n)+N_i(u_1,...,u_n)-g_i),\quad i=1,...,n \tag{3.1}$$

Отметим, что при $\varepsilon_1=1$ результаты применения данного метода возмущения совпадают с результатами, полученными методом декомпозиции в форме Адомяна [1]. Представляя искомое решение в виде

$$u_i=\sum_{j=0}^{\infty}u_{ij}\varepsilon_1^j,\quad i=0,1,... \tag{3.2}$$

подставляя разложение (3.2) в уравнение (3.1) и граничные условия (2.2) и расщепляя систему по степеням ε_1, получим последовательность предельных краевых задач

$$\varepsilon_1^0: \ L_i u_{i0} = 0, i = 1,...,n; \ G_j(u_{10},...,u_{n0}) = \mu_j, \ j = 1,...,k \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_1^j: \ L_i u_{ij} = -(R_i(u_{1(j-1)},...,u_{n(j-1)}) +$$

$$+N_i(u_{10},...,u_{n0},...,u_{1(j-1)},...,u_{n(j-1)}) - g_i), \ i = 1,...,n \tag{3.4}$$

$$G_j(u_{10},...,u_{n0},...,u_{1(j-1)},...,u_{n(j-1)}) = 0, \ j = 1,...,k$$

где N_i и G_j – компоненты уравнения (2.1) и граничных условий (1.2) при ε_1^j. При подстановке разложения (2.4) в соотношения (2.1) и (2.2) эти компоненты могут быть представлены в виде обобщенных рядов Тейлора по искомым функциям и их производным.

Компоненты решения в нулевом приближении имеют вид полинома, поэтому

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_1^j \sum_{m=0}^{R_j} u_{ijm}\xi^m, i, j = 0,1,... \tag{3.5}$$

Из краевых задач (3.3), (3.4) получаем коэффициенты u_{ijm}.

Подставляя их в ряд (3.5) и меняя порядок суммирования при $\varepsilon_1 = 1$ (это допустимо, если решение сходится в некоторой окрестности $\xi = 0$ с ненулевым радиусом, что естественно для механических задач), получим

$$u_i = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \sum_{j=0}^{\infty} u_{ijm} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m u_{im} \tag{3.6}$$

$$u_{is} = -\frac{(s-k_i)!}{s!}\left(\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k_r-1} \frac{(s-k_i+2l)!}{(s-k_i)!} N_{irl} u_{r(s-k_i+l)} + \right.$$

$$+\frac{1}{2!} \sum_{q,p=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k_q-1} \sum_{m=0}^{k_p-1} N_{iqplm} \sum_{t=m}^{s+m-k_i} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{j-1} u_{p(j-1-r)t} \times \right.$$

$$\left.\left. \times u_{qr(s-k_i+l-t+m)} \right\} \frac{t!}{(t-m)!} \frac{(s-k_i+l-t+m)!}{(s-k_i-t+m)!} + ... \right) + \frac{(s-k_i)!}{s!} g_{is} \tag{3.7}$$

$$i = 1,2,...; \ s = k_i, \ k_i + 1,...$$

После преобразования суммы, заключенной в фигурных скобках в (3.7) аналогично изображению свертки при интегральном преобразовании Лапласа [14] выражение (3.7) полностью совпадает с (2.5), т.е. решение, найденное по предложенному методу возмущения, удовлетворяет необходимому условию для компонентов ряда Тейлора точного решения. Таким образом, одномерные нелинейные задачи могут быть эффективно решены как методом декомпозиции в форме Адомяна, так и по аналогичной схеме методом возмущения; при этом полученное решение будет иметь вид разложения Маклорена решения исходной задачи.

4. Полученное заключение содержит важную информацию об области и характере сходимости полученного решения. Поскольку ряд $\sum_{j=0}^{\infty} u_{ijm}$ в (3.7) имеет смысл коэффициента ряда Маклорена u_i по ξ, то $\varepsilon_1 = 1$ принадлежит кругу сходимости для всех ξ, лежащих внутри круга сходимости по этой переменной. Поэтому изменение порядка суммирования в (3.7) допустимо при сходимости решения по ξ в окрестности $\xi = 0$ с ненулевым радиусом и в силу свойств степенных рядов [14] суммой ряда (3.6) является непрерывная функция $a(\varepsilon_1)$, совпадающая при $\varepsilon_1 = 1$ с решением исходной краевой задачи, для которой ряд (3.6) представляет собой разложение Маклорена. Обобщенное суммирование при помощи АП осуществляет мероморфное продолжение решения [5], что справедливо как при преобразовании по ξ, так и по ε_1. В силу

Таблица 1

$\frac{\tau_0\pi}{a}$	$\tau/\tau_0 = 1{,}00$		1,01		1,10	
	[0/1]	[1/1]	[0/1]	[1/1]	[0/1]	[1/1]
1	0,0	0,0	0,2	0,2	9,5	2,5
2	0,1	0,0	0,7	0,6	3,1	7,0
3	0,4	0,7	0,5	0,8	6,9	9,3
4	1,0	0,3	0,5	0,6	6,8	9,7
5	2,1	0,9	1,5	0,3	5,0	8,5
6	3,4	2,3	2,8	1,6	2,8	4,9

Таблица 2

N_x	$\frac{\tau_0\pi}{a}$	$\tau/\tau_0 = 1{,}00$		1,01		1,10	
		[0/1]	[1/1]	[0/1]	[1/1]	[0/1]	[1/1]
$\frac{T_*}{3}$	2	0,1	0,0	0,3	0,4	6,8	3,8
	3	0,2	0,1	0,2	0,7	0,8	5,1
	4	0,5	0,9	1,0	0,7	1,1	5,0
	5	1,6	0,2	2,0	0,4	2,1	3,5
$\frac{2T_*}{3}$	2	0,0	0,0	3,0	1,2	60,0	5,0
	3	1,0	0,0	1,3	1,0	25,0	7,0
	4	1,5	0,0	1,5	0,9	23,5	3,1
	5	2,5	1,0	5,0	0,7	29,0	60,0

этого свойства последовательность АП решения, найденного по предложенному методу, по переменным ξ или ε_1 с возрастанием порядка числителя сходится равномерно к истинному решению в круге с центром в нуле, внутри которого решение мероморфно по соответствующей переменной, а суммарный порядок полюсов равен порядку знаменателя аппроксимант, за исключением самих полюсов.

Таким образом, предложенный метод в пределе позволяет получить решение краевой задачи в области его мероморфности.

5. Рассмотрим схему решения двумерных задач. Поскольку многие задачи теории пластин и оболочек являются периодическими по одной из переменных (обозначим ее η) или могут быть сведены к периодическим, а разложение искомых и заданных величин в тригонометрические ряды позволяет полностью удовлетворить условиям периодичности и задает вид функций и их производных по η, будем считать η параметром и задачу – одномерной.

После разложения по тригонометрическим функциям искомых величин, подстановки их в исходные уравнения и переобозначения получим бесконечную систему вида (2.1) с граничными условиями вида (2.2) относительно компонент разложения ($n = k = \infty$). Решение этой граничной задачи рассматриваемым в настоящей работе методом имеет вид (3.6), (3.7).

6. Исследуем практическую сходимость метода на модельных задачах. В качестве первого примера рассмотрим в линейной постановке изгиб шарнирно-опертой прямоугольной пластины под действием равномерного давления. При построении приближенного решения форма границы подвергалась искусственному возмущению путем увеличения длины пластины от τ_0 до τ. Полученное на основе предложенного метода решение сравнивалось с точным [15], а погрешность вычислялась в процентном отношении к значению прогиба для точного решения. При проведении численного эксперимента варьировались соотношение длин сторон пластины и величина амплитуды возмущения формы границы. Представление о зависимости погрешности вычисления максимального прогиба в процентах от указанных параметров дает табл. 1. Для сравнения использовались АП порядков [0/1] и [1/1]. Анализ числовых данных показывает, что приближенное решение обеспечивает удовлетворительную точность вычислений для широкого диапазона пластин. При этом АП [0/1] является предпочтительной, поскольку обеспечивает одинаковую или большую по сравнению с [1/1] точность при меньшем количестве вычислений. Аналогичные результаты получаются и при анализе нелинейной модели деформирования прямоугольной пластины под действием поперечного давления при учете мембранных усилий. В этом примере кроме ранее введенных параметров варьировалась также величина усилия равномерного продольного сжатия пластины N_x. Полученные результаты показаны в табл. 2, где представлена зависимость относительной погрешности в процентах от параметров пластины и величины продольной нагрузки. Отметим, что увеличение величины N_x от трети до двух третей критической нагрузки осевого сжатия T_* не приводит к существенному ухудшению результатов. Однако при реализации в этом случае возмущения вида границы необходимо использовать не менее трех приближений и АП порядка [1/1].

Для обоих примеров характерно повышение точности расчетов для пластин, близких к квадратным. Это позволяет рассматривать данный метод как дополнительный к традиционным асимптотическим методам, необходимым условием применения которых является существенное различие геометрических размеров конструкции.

Работа была частично поддержана международной соросовской программой поддержки образования в области точных наук (N SPU061002).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Adomian G.* A revuew of the decomposition method in applied mathematics // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 135. N 2. P. 501–544.
2. *Adomian G.* Decomposition solution for Duffing and Van der Pol. oscillators // Intern. J. Math. Sci. 1986. V. 9. N 4. P. 731–732.
3. *Adomian G.* Solving frontier problems of physics: the decomposition method. Dordrecht. Boston: Kluwer, 1994. 352 p.
4. *Bellomo N., Monaco R.* A comparison between Adomian's decomposition methods and perturbation techniques for nonlinear random differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1985. V. 110. N 2. P. 495–502.
5. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимация Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
6. *Каюк Я.Ф.* Некоторые вопросы методов разложения по параметру. Киев: Наук. думка, 1980. 166 с.
7. *Найфе А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
8. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
9. *Пшеничнов Г.И.* Метод декомпозиции решения уравнений и краевых задач. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 792–794.
10. *Андрианов И.В., Буланова Н.С.* Об одном методе улучшения сходимости рядов теории возмущений в механике // Прикладная механика. 1984. Вып. 20. № 5. С. 119–122.
11. *Андрианов И.В., Иванков А.О.* Применение Паде-аппроксимант в методе введения параметра при исследовании бигармонического уравнения со сложными граничными условиями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Вып. 27. № 2. С. 296–301.
12. *Андрианов И.В., Иванков А.О.* Решение смешанных задач теории изгиба пластин модифицированным методом возмущения вида граничных условий // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 1. С. 33–36.
13. *Андрианов И.В., Олевский В.И.* Нелинейное деформирование и устойчивость прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек с периодическим возмущением формы торца // Тез. докл. 4-й Всесоюзн. конф. "Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов". Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1991. С. 86.
14. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1977. 831 с.
15. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.

Днепропетровск, Варшава

Поступила в редакцию
8.VIII.1995