УДК 539.375

© 1998 г. Н.М. Бородачев

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ

Предлагается метод построения пространственной весовой функции основанный на использовании вариационной формулы для упругого тела с трещиной и теории гармонических функций. В отличие от предыдущих результатов [1,2] предлагаемый метод позволяет учитывать переменную кривизну контура трещины. В качестве примера рассматривается плоская внутренняя эллиптическая трещина.

По весовым функциям имеется обзор [3]. Предлагались в общем случае приближенные методы построения весовых функций [4, 5] и применительно к эллиптической трещине [6–8].

1. Рассмотрим плоскую трещину в линейно-упругом теле, занимающем односвязный объем V, ограниченный поверхностью O. В прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3, трещина расположена в плоскости $x_3 = 0$. Положительную ориентацию S^+ поверхности трещины S будем связывать с $x_3 = 0^+$, а отрицательную ориентацию S^- – с $x_3 = 0^-$.

Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва в любой точке M граничного контура трещины Γ (контур Γ – плоская кривая) можно определить по формуле

$$K_1(M) = \iint\limits_{S^+} K_1(M;Q)p(Q)dS, \quad M \in \Gamma, \quad Q \in S^+ \tag{1.1}$$

Таким образом, если известна весовая функция (ВФ) $K_1(M; Q)$, то КИН $K_1(M)$ от произвольного давления $p(Q)$ на поверхности разреза S^+ и S^- можно найти по формуле (1.1).

Рассмотрим вопрос о построении ВФ в общем случае, когда граничный контур трещины Γ – плоская непрерывно дифференцируемая кривая. Применим метод, основанный на использовании вариационной формулы [9, 10]

$$\delta_n u_3(Q) = \frac{\pi(1-\nu)}{2\mu} \int\limits_{\Gamma} K_1(M;Q)K_1(M)\delta n(M)ds \tag{1.2}$$

выражающей вариацию перемещения $\delta_n u_3$ поверхности трещины S^+, вызванную вариацией контура трещины. Здесь u_3 – проекция вектора перемещений на ось x_3, ν – коэффициент Пуассона, μ – модуль сдвига, δn – вариация контура трещины направленная вдоль внешней нормали к кривой Γ.

Введем обозначение

$$K_1(M;Q) = K^{1/2}(M)K_1^*(M;Q) \tag{1.3}$$

где $K(M)$ – кривизна граничной кривой Γ в точке M. Анализ известных ВФ показывает, что кривизна K входит в выражение для ВФ так, как это предусмотрено в (1.3).

Подставляя (1.3) в (1.2), получаем

$$\delta_n u_3(Q) = \int\limits_{\Gamma} f^*(M)K_1^*(M;Q)ds, \quad f^*(M) = \frac{\pi(1-\nu)}{2\mu}K^{1/2}(M)K_1(M)\delta n(M) \tag{1.4}$$

(функция $f^*(M)$ задана на кривой Γ).

Воспользуемся далее формулой, которая выражает гармоническую функцию внутри контура Г, через значения на граничном контуре.

$$U(Q)=\int_{\Gamma} f(M)N(M;Q)ds, \quad N(M;Q)=-\frac{\partial G(M;Q)}{\partial n} \tag{1.5}$$

Здесь $G(M; Q)$ – функция Грина, а производная $\partial/\partial n$ берется по направлению внешней нормали к Г. Формула (1.5) дает решение задачи

$$\Delta U(Q)=0, \quad Q\in S^{+}; \quad U|_{\Gamma}=f(M), \quad M\in\Gamma$$

S^{+} – односвязная область, ограниченная кривой Г.

Если в (1.5) вместо $f(M)$ подставить $f^{*}(M)$, то получим

$$U^{*}(Q)=\int_{\Gamma} f^{*}(M)N(M;Q)ds \tag{1.6}$$

Здесь $U^{*}(Q)$ – гармоническая функция в области S^{+}; $f^{*}(M)$ – предельные значения этой функции на Г.

Возвратимся к формуле (1.4). Ее можно представить в виде

$$U^{*}(Q)=\int_{\Gamma} f^{*}(M)N_1(M;Q)ds, \quad N_1(M;Q)=\frac{K_1^{*}(M;Q)U^{*}(Q)}{\delta_n u_3(Q)} \tag{1.7}$$

Применив оператор Лапласа к обеим частям выражения (1.7), можно сказать, что $N_1(M; Q)$ – гармоническая функция в области S^{+}.

В левых частях выражений (1.6) и (1.7) стоит одна и та же гармоническая функция U^{*}, а под интегралами – одна и та же предельная функция. Следовательно, и гармонические функции N и N_1 также должны быть равны [11], т.е.

$$N(M;Q)=N_1(M;Q) \tag{1.8}$$

Подставляя в (1.8) выражение (1.7) и учитывая соотношение (1.3), получаем

$$K_1(M;Q)=K^{1/2}(M)N(M;Q)\delta_n u_3(Q)/U^{*}(Q) \tag{1.9}$$

т.е. самое общее представление для ВФ $K_1(M; Q)$.

Функции $K(M)$ и $N(M; Q)$, входящие в (1.9), зависят от формы трещины. Чтобы найти функцию $\delta_n u_3/U^{*}$, также входящую в (1.9) и зависящую как от формы трещины, так и от формы упругого тела, нужно иметь решение какой-либо более простой задачи для данного тела V и заданной трещины (пробное решение).

Был предложен [1, 2] довольно общий метод построения ВФ, основанный также на использовании вариационной формулы для тела с трещиной (1.2). Однако этот метод можно применять только для трещин, граничный контур которых имеет постоянную кривизну K. Предлагались [4, 5] приближенные методы построения ВФ для трещины, ограниченной произвольным контуром Г.

Если подставить выражение для ВФ (1.9) в вариационную формулу (1.2), то получим тождество.

2. Формулу (1.9) запишем в виде

$$K_1(M;Q)=K^{1/2}(M)N(M;Q)F(Q), \qquad F(Q)=\delta_n u_3(Q)/U^{*}(Q) \tag{2.1}$$

т.е. функция $F(Q)$ не должна зависеть от вида "пробного" решения, так как функции $K_1(M; Q)$, $K(M)$ и $N(M; Q)$, также не зависят от этого решения. Этот факт проще всего проверить на примере внутренней круговой трещины.

В полярных координатах r, θ для круговой трещины радиуса a получим

$$K_1(\varphi;r,\theta)=\frac{1}{2\pi a^{1/2}}F(r,\theta)\frac{a^2-r^2}{A(r,\varphi-\theta)}, \quad A(r,\varphi-\theta)=a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta) \tag{2.2}$$

Рассмотрим бесконечное упругое изотропное тело и покажем на примерах, что функция $F(r, \theta)$, входящая в (2.2), не зависит от "пробного" решения.

Пример 1. К поверхностям круговой трещины приложено давление $p(r)$, не зависящее от угла θ. Тогда [12]

$$u_z(r,\theta)=\frac{1-\nu}{\mu}\int_r^a \frac{I(t)dt}{(t^2-r^2)^{1/2}},\quad r\leqslant a;\ I(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{r_1 p(r_1)dr_1}{(t^2-r_1^2)^{1/2}}$$

Используя это выражение, находим

$$K_1=\frac{1}{a^{1/2}}I(a),\quad \delta_n u_z(r,\theta)=\frac{1-\nu}{\mu}\frac{a^{1/2}\delta a K_1}{(a^2-r^2)^{1/2}}$$

Далее, на основании (1.4), (1.6), имеем выражения для $f^*(\varphi)$ и $U^*(r, \theta)$, а затем находим

$$F(r,\theta)=\frac{\delta_n u_z(r,\theta)}{U^*(r,\theta)}=\frac{2}{\pi(a^2-r^2)^{1/2}} \tag{2.3}$$

Подставляя это выражение в (2.2), получаем

$$K_1(\varphi;r,\theta)=\frac{1}{\pi^2 a^{1/2}}\frac{(a^2-r^2)^{1/2}}{A(r,\varphi-\theta)} \tag{2.4}$$

что согласуется с известными результатами.

Пример 2. Теперь рассмотрим самый общий случай, когда к поверхностям круговой трещины приложено давление $p(r, \theta)$. В этом случае КИН будет зависеть от угла φ, т.е. $K_1 = K_1(\varphi)$. В предыдущем примере сначала определили функцию $F(r, \theta)$, а затем нашли ВФ $K_1(\varphi; r, \theta)$. Однако можно поступить и наоборот, т.е. взять выражение для ВФ (2.4) и по нему найти формулу для $F(r, \theta)$, которая должна совпасть с (2.3).

Подставляя (2.4) в (1.2), имеем выражение для $\delta_n u_z(r, \theta)$. Далее, используя выражения (1.4), (1.6), находим $U^*(r, \theta)$. Отсюда опять приходим к формуле (2.3), т.е. функция $F(r, \theta)$ не зависит от вида "пробного" решения.

3. Применим теперь формулу (2.1) к нахождению ВФ для внутренней эллиптической трещины в упругом теле. Трещина расположена в плоскости $x_3 = 0$ декартовой системы координат x_1, x_2, x_3; a, b – полуоси граничного эллипса, $a \geqslant b$.

Введем в плоскости $x_3 = 0$ эллиптические координаты u, v

$$x_1=c\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\ x_2=c\,\mathrm{sh}\,u\sin v\quad (u\geqslant 0,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$$

$c = ae$, e – эксцентриситет граничного эллипса. Имеем

$$K(t)=ab\Pi^{-3/2}(t),\quad \Pi(t)=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t \tag{3.1}$$

Можно показать, что в данном случае

$$N(M;Q)=N(t;u,v)=\frac{1}{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{ch}\,nu}{\mathrm{ch}\,nu_0}\cos nv\cos nt+\frac{\mathrm{sh}\,nu}{\mathrm{sh}\,nu_0}\sin nv\sin nt\right)\right],\quad \mathrm{th}\,u_0=k'=\frac{b}{a} \tag{3.2}$$

u_0 – граничный эллипс.

Формула (2.1) для эллиптической трещины принимает вид

$$K_1(t;u,v)=K^{1/2}(t)N(t;u,v)F(u,v) \tag{3.3}$$

Функции $K(t)$ и $N(t; u, v)$ определяются соответственно выражениями (3.1) и (3.2), они зависят только от формы трещины. Функция $F(u, v)$, входящая в (3.3), зависит как от формы трещины, так и от конфигурации упругого тела. Чтобы найти $F(u, v)$ нужно иметь "пробное решение".

Рассмотрим вопрос о нахождении функции $F(u, v)$ для бесконечного упругого тела с внутренней эллиптической трещиной. Для этой задачи известно "пробное" решение, когда к поверхностям трещины приложено постоянное давление p.

В плоскости $x_3 = 0$ введем обобщенные полярные координаты ρ, φ

$$x_1 = a\rho\cos\varphi, \quad x_2 = b\rho\sin\varphi \quad (0 \leqslant \rho \leqslant 1, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$$

Если $p(\rho, \varphi) = p = \text{const}$, то [12]

$$u_3(\rho,\varphi) = \frac{(1-\nu)bp}{\mu\mathbf{E}(k)}(1-\rho^2)^{1/2}, \quad \rho \leqslant 1; \quad K_1(\varphi) = \frac{(k')^{1/2}p}{\mathbf{E}(k)}\Pi^{1/4}(\varphi) \tag{3.4}$$

где $k = (1-k'^2)^{1/2}$, $k' = b/a$, $\mathbf{E}(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

На основании первой формулы (3.4) имеем

$$\delta_n u_3(\rho,\varphi) = \frac{(1-\nu)p\delta b}{\mu\mathbf{E}(k)(1-\rho^2)^{1/2}}, \quad \frac{\delta b}{\delta a} = k' \tag{3.5}$$

Далее, используя (1.4), (3.1) и вторую формулу (3.4), находим

$$f^*(t) = \frac{\pi(1-\nu)pab\delta b}{2\mu\mathbf{E}(k)}\Pi^{-1}(t) \tag{3.6}$$

(учтено, что $\delta n(t) = b\delta a / \Pi^{1/2}(t)$).

На граничном контуре эллипса, т.е. при $u = u_0$

$$\sin^2\varphi + (k')^2\cos^2\varphi = \sin^2 t + (k')^2\cos^2 t; \quad d\varphi = dt$$

Подставляя (3.6) в (1.6), получаем

$$U^*(u,v) = \frac{\pi(1-\nu)pab\delta b}{2\mu\mathbf{E}(k)}U_0(u,v), \quad U_0(u,v) = \int_0^{2\pi} N(t;u,v)\Pi^{-1/2}(t)dt \tag{3.7}$$

Теперь на основании (3.5) и (3.7) имеем

$$F(u,v) = \frac{\delta_n u_3}{U^*} = \frac{2}{\pi ab(1-\rho^2)^{1/2}U_0(u,v)} \tag{3.8}$$

Подставляя (3.1) и (3.8) в выражение (3.3), окончательно имеем

$$K_1(t;u,v) = \frac{2N(t;u,v)}{\pi(ab)^{1/2}\Pi^{3/4}(t)(1-\rho^2)^{1/2}U_0(u,v)} \tag{3.9}$$

$$1-\rho^2 = 1-\left(\frac{k}{k'}\right)^2(\operatorname{sh}^2 u\sin^2 v + k'^2\operatorname{ch}^2 u\cos^2 v)$$

Формула (3.9) определяет ВФ для неограниченного упругого тела с внутренней эллиптической трещиной. В случае круговой трещины ($a = b$), формула (3.9) переходит в (2.4).

ВФ $K_1(t;\, u,\, v)$ представляет собой КИН от действия единичных сосредоточенных нормальных сил, приложенных к поверхностям трещины в точке с координатами u, v,

Рассмотрим частный случай, когда единичные сосредоточенные силы приложены к поверхностям трещины в центре эллипса. В этом случае $u = 0$, $v = \pi/2$ и формула (3.9) принимает вид

$$K_1\left(t;0,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi(ab)^{1/2}\Pi^{3/4}(t)U_1}N\left(t;0,\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.10}$$

$$N\left(t;0,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi/2}{\operatorname{ch} nu_0}\cos nt\right), \quad U_1 = \int_0^{2\pi} N\left(t;0,\frac{\pi}{2}\right)\Pi^{-1/2}(t)dt$$

Пусть далее эллиптическая трещина мало отличается от круговой. В этом случае полуоси эллипса равны соответственно $(1+\varepsilon)b$ и b, $\varepsilon \ll 1$. Тогда формула (3.10) сильно упрощается и принимает вид

$$K_1\left(t;0,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi^2 b^{3/2}}\left[1-\frac{\varepsilon}{4}(3+5\cos 2t)\right]+O(\varepsilon^2)$$

что согласуется с известным результатом [13], полученным другим способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бородачев А.Н.* Об одном методе построения весовых функций для круговой трещины // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 1022–1030.
2. *Бородачев А.Н.* Общий метод построения пространственных весовых функций для упругих тел с трещинами // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 120–127.
3. *Rice J.R.* Weight function theory for three-dimensional elastic crack analysis // Fracture Mechanics, ASTM STP 1020. Philadelphia, 1989. P. 29–57.
4. *Oore M., Burns D.J.* Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol. 1980. V. 102. N 2. P. 202–211.
5. *Орыняк И.В., Бородий М.В.* Инженерный метод построения весовой функции для плоских трещин нормального отрыва в трехмерных телах // Проблемы прочности. 1992. № 10. С. 14–22.
6. *Banks-Sills L.* A three-dimensional weight function method // Fracture Mechanics: 19-th Nat. Symp., San Antonio, 1986. Philadelphia, 1988. P. 620–636.
7. *Sham T-L., Zhou Y.* Computation of three-dimensional weight functions for circular and elliptical cracks // Intern J. Fracture. 1989. V. 41. N 1. P. 51–75.
8. *Орыняк И.В., Бородий М.В., Тороп В.М.* Построение весовой функции для эллиптической трещины нормального отрыва в бесконечном теле // Проблемы прочности. 1993. № 5. С. 60–69.
9. *Rice J.R.* First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52. N 3. P. 571–579.
10. *Бородачев Н.М.* Об одном вариационном методе решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоской трещиной // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 4. С. 71–76.
11. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М: Наука, 1974. Т. 2. 655 с.
12. *Kassir M.K., Sih G.C.* Three- dimensional crack problems. Leyden: Noordhoff, 1975. 452 p.
13. *Бородачев Н.М.* Метод возмущений для смешанных пространственных задач теории упругости со сложной линией раздела краевых условий // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 628–634.

Киев

Поступила в редакцию
24.II.1997