

УДК 539.3 : 534.1

© 1998 г. М.А. Сумбатян, М. Чарлетта

КОЛЕБАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ДВУХСЛОЙНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

Рассматривается плоская задача о нормальном падении плоской поперечной волны из дальней зоны на свободную поверхность упругого двухслойного полупространства, состоящего из однородного слоя, сцепленного с полубесконечным основанием из другого упругого материала. На границе двух сред имеется система плоских трещин, расположенная периодически вдоль линии раздела и моделирующая зоны разлома на границе между плотными твердыми и мягкими осадочными породами. Изучается влияние разломов на прохождение поперечной сейсмической волны, порожденной глубокофокусным землетрясением, а также связанный с этим характер колебаний свободной поверхности грунта. Показано, что трудно предсказать, усиливает или ослабляет сейсмическую волну имеющаяся зона разлома. Характер влияния системы трещин на колебания свободной поверхности сильно зависит от значений физических и геометрических параметров, в первую очередь – частоты колебания.

1. Пусть плоская поперечная волна падает нормально на периодическую систему плоских трещин, расположенных вдоль границы упругого слоя толщиной d и упругого полупространства, выполненных из различных однородных изотропных материалов (фиг. 1). Рассматриваемая задача моделирует прохождение сейсмической волны, падающей из нижнего полупространства (среда 1) и взаимодействующей с зоной разломов на границе с осадочными породами (среда 2). Расстояние между двумя соседними трещинами равно $2b$, период решетки – $2a$ ($a > b$). Задача рассматривается в плоской постановке.

Использование преобразования Лапласа позволяет свести нестационарную задачу к стационарной с зависимостью от времени в виде $\exp(-i\omega t)$ для каждой частоты ω из реального спектра сейсмической волны.

В обеих средах (нижней и верхней) для вектора перемещений используются представления Ламе [1] (считаем деформацию плоской)

$$u_x = \partial\phi / \partial x + \partial\psi / \partial y, \quad u_y = \partial\phi / \partial y - \partial\psi / \partial x, \quad u_z = 0 \quad (1.1)$$

Напряжения выражаются через потенциалы продольной (ϕ) и поперечной (ψ) волн с использованием обобщенного закона Гука. Как известно, оба потенциала удовлетворяют уравнению Гельмгольца

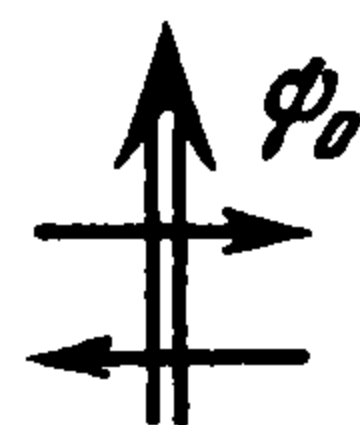
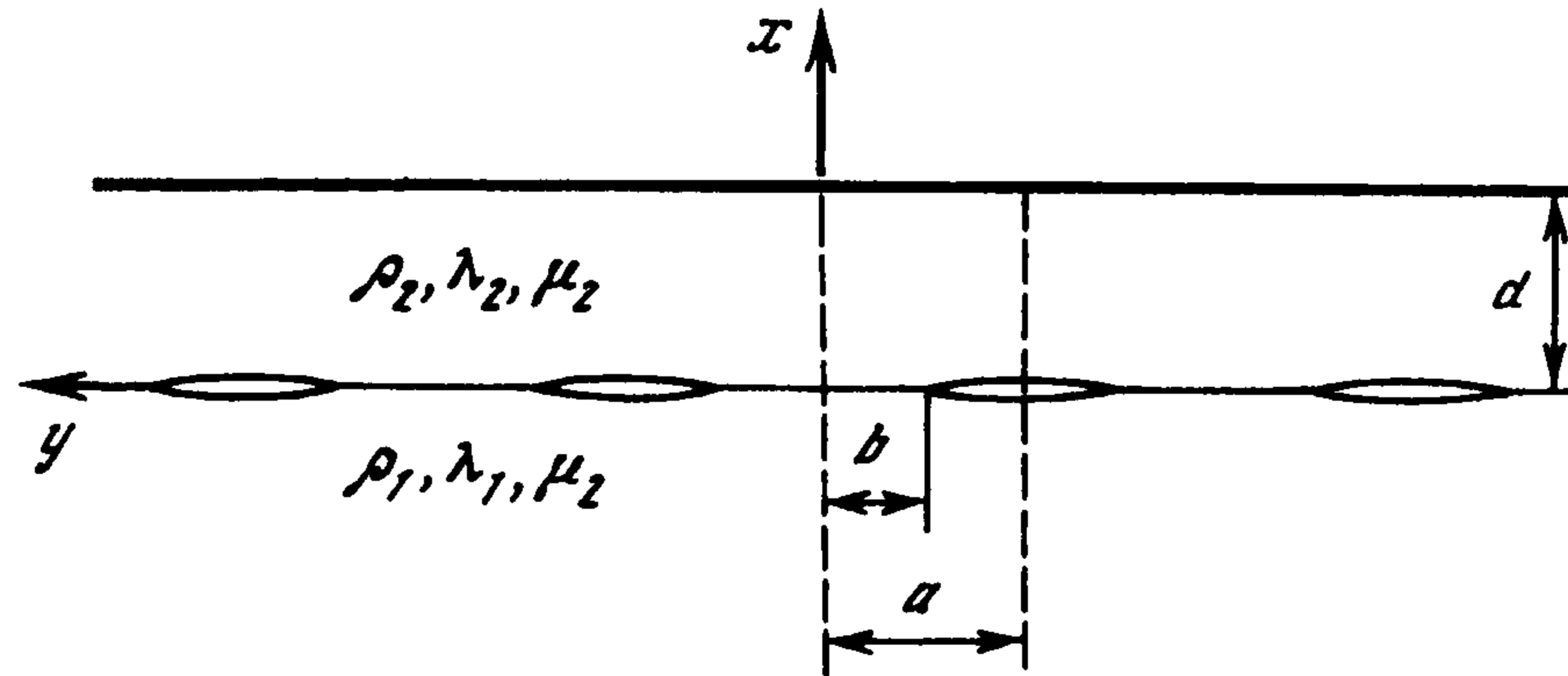
$$\Delta\phi + k_p^2\phi = 0, \quad \Delta\psi + k_s^2\psi = 0 \quad (1.2)$$

Граничные условия имеют вид

$$x = d : \sigma_{xx2} = 0, \quad \tau_{xy2} = 0; \quad -\infty < y < \infty \quad (1.3)$$

$$x = 0 : \sigma_{xx1} = \sigma_{xx2} = 0, \quad \tau_{xy1} = \tau_{xy2} = 0; \quad b < |y| < a \quad (1.4)$$

$$x = 0 : \sigma_{xx1} = \sigma_{xx2}, \quad \tau_{xy1} = \tau_{xy2}, \quad u_{x1} = u_{x2}, \quad u_{y1} = u_{y2}; \quad |y| < b \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Здесь учтено, что в силу естественной периодичности задачи вдоль координаты y достаточно рассмотреть одну полосу $|y| < a$.

При учете той же периодичности имеем следующие представления для потенциалов в первой (нижней) и второй (верхней) среде [2] (всюду далее суммирование ведется по n от 1 до ∞):

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \sum A_n s_n \exp(q_{1n} x), \quad \psi_1 = \psi_0 \exp(ik_{s1} x) + \\ + R \exp(-ik_{s1} x) + \sum B_n c_n \exp(r_{1n} x), \quad -\infty < x < 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\varphi_2 = \sum \left[C_n \operatorname{ch} q_{2n}(x-d) + D_n \frac{\gamma_{2n}}{\alpha_{2n}} \operatorname{sh} q_{2n}(x-d) \right] s_n \quad (1.7)$$

$$\psi_2 = W \sin k_{s2}(x-d) + \sum \left[D_n \operatorname{ch} r_{2n}(x-d) + C_n \frac{\gamma_{2n}}{\beta_{2n}} \operatorname{sh} r_{2n}(x-d) \right] c_n, \quad 0 < x < d$$

Здесь

$$s_n = \sin \Pi_n y, \quad c_n = \cos \Pi_n y, \quad \Pi_n = \pi n / a$$

$$q_{jn} = (\Pi_n^2 - k_{pj}^2)^{1/2}, \quad r_{jn} = (\Pi_n^2 - k_{sj}^2)^{1/2} \quad (1.8)$$

$$\alpha_{jn} = 2\Pi_n q_{jn}, \quad \beta_{jn} = 2\Pi_n r_{jn}, \quad \gamma_{jn} = 2\Pi_n^2 - k_{sj}^2, \quad j = 1, 2$$

где k_{p1} , k_{s1} и k_{p2} , k_{s2} – волновые числа для продольной и поперечной волн соответственно в первой и второй среде.

Заметим, что выражения (1.7) автоматически удовлетворяют граничному условию на свободной поверхности (1.3).

2. Для дальнейшего понадобятся выражения для перемещений и напряжений на границе раздела двух сред (при $x = 0$)

$$u_{x1} = \sum (q_{1n} A_n - \Pi_n B_n) s_n \quad (2.1)$$

$$u_{y1} = ik_{s1}(R - \psi_0) + \sum (\Pi_n A_n - r_{1n} B_n) c_n$$

$$\sigma_{xx1} / \rho_1 = c_{s1}^2 \Sigma(\gamma_{1n} A_n - \beta_{1n} B_n) s_n \quad (2.2)$$

$$\tau_{xy1} / \rho_1 = \omega^2 (\psi_0 + R) + c_{s1}^2 \Sigma(\alpha_{1n} A_n - \gamma_{1n} B_n) c_n$$

$$u_{x2} = \Sigma(-\delta_n C_n + \zeta_n D_n) s_n \quad (2.3)$$

$$u_{y2} = -k_{s2} W \cos k_{s2} d + \Sigma(-\gamma_n C_n + \mu_n D_n) c_n$$

$$\sigma_{xx2} / \rho_2 = c_{s2}^2 \Sigma[\epsilon_n C_n - D_n \xi_n / (2\Pi_n q_{2n})] s_n \quad (2.4)$$

$$\tau_{xy2} / \rho_2 = -\omega^2 W \sin k_{s2} d + c_{s2}^2 \Sigma[C_n \eta_n / (2\Pi_n r_{2n}) + \epsilon_n D_n] c_n$$

Здесь

$$\delta_n = q_{2n} \operatorname{sh} q_{2n} d - \frac{\gamma_{2n}}{2r_{2n}} \operatorname{sh} r_{2n} d$$

$$\epsilon_n = \gamma_{2n} (\operatorname{ch} q_{2n} d - \operatorname{ch} r_{2n} d), \quad \zeta_n = \frac{\gamma_{2n}}{2\Pi_n} \operatorname{ch} q_{2n} d - \Pi_n \operatorname{ch} r_{2n} d$$

$$\xi_n = \gamma_{2n}^2 \operatorname{sh} q_{2n} d - \alpha_{2n} \beta_{2n} \operatorname{sh} r_{2n} d, \quad \eta_n = \gamma_{2n}^2 \operatorname{sh} r_{2n} d - \alpha_{2n} \beta_{2n} \operatorname{sh} q_{2n} d \quad (2.5)$$

$$\mu_n = r_{2n} \operatorname{sh} r_{2n} d - \frac{\gamma_{2n}}{2q_{2n}} \operatorname{sh} q_{2n} d, \quad \nu_n = \frac{\gamma_{2n}}{2\Pi_n} \operatorname{ch} r_{2n} d - \Pi_n \operatorname{ch} q_{2n} d$$

Для определения постоянных A_n, B_n, C_n, D_n введем две новые неизвестные функции $g^\sigma(y)$ и $g^\tau(y)$, связанные с нормальным и тангенциальным напряжением на просвете (1.5)

$$\sigma_{xx1} = \sigma_{xx2} = \begin{cases} g^\sigma(y), & |y| < b \\ 0, & b < |y| < a \end{cases}, \quad x = 0 \quad (2.6)$$

$$\tau_{xy1} = \tau_{xy2} = \begin{cases} g^\tau(y), & |y| < b \\ 0, & b < |y| < a \end{cases}, \quad x = 0$$

Тогда с использованием ортогональности тригонометрических функций и непрерывности напряжений (1.5) при переходе через границу раздела двух сред выразим все неизвестные коэффициенты через введенные выше функции (всюду далее интегрирование ведется по отрезку $[-b, b]$)

$$A_n = E_{1n} (\gamma_{1n} G_n^\sigma - \beta_{1n} G_n^\tau), \quad B_n = E_{1n} (\alpha_{1n} G_n^\sigma - \gamma_{1n} G_n^\tau)$$

$$C_n = E_{2n} \beta_{2n} (\alpha_{2n} \epsilon_n G_n^\sigma - \xi_n G_n^\tau), \quad D_n = E_{2n} \alpha_{2n} (-\eta_{2n} G_n^\sigma + \beta_{2n} \epsilon_n G_n^\tau) \quad (2.7)$$

$$E_{jn} = (a \rho_j c_{sj}^2 \Delta_{jn})^{-1}, \quad j = 1, 2$$

$$\Delta_{1n} = \gamma_{1n}^2 - \alpha_{1n} \beta_{1n}, \quad \Delta_{2n} = \alpha_{2n} \beta_{2n} \epsilon_n^2 + \xi_n \eta_n$$

$$G_n^\sigma = \int g^\sigma(\eta) s_n d\eta, \quad G_n^\tau = \int g^\tau(\eta) c_n d\eta$$

(величина Δ_{1n} связана с функцией Релея).

Теперь удовлетворение оставшимся условиям непрерывности перемещений (1.5) приводит к системе двух интегральных уравнений первого рода с разностными ядрами

относительно функций $g^\sigma(y)$ и $g^\tau(y)$:

$$\int K_{j1}(y-\eta)g^\tau(\eta)d\eta + \int K_{j2}(y-\eta)g^\sigma(\eta)d\eta = L_j, \quad j=1,2; \quad |y| < b \quad (2.8)$$

$$L_1 = 2ik_{s1}\psi_0 - DG^\tau, \quad L_2 = 0$$

где

$$G^\tau = \int g^\tau(\eta)d\eta, \quad D = \frac{ik_{s1}}{2a\rho_1\omega^2} - \frac{k_{s2}}{2a\rho_2\omega^2} \operatorname{ctg} k_{s2}d \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\Sigma [E_{1n}k_{s1}^2 r_{1n} - E_{2n}\beta_{2n}(v_n\xi_n - \mu_n\alpha_{2n}\epsilon_n)]c_n \\ K_{12} &= \Sigma [E_{1n}\Pi_n(2q_{1n}r_{1n} - \gamma_{1n}) + E_{2n}\alpha_{2n}(v_n\beta_{2n}\epsilon_n + \mu_n\eta_n)]s_n \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$K_{21} = -\Sigma [E_{1n}\Pi_n(2q_{1n}r_{1n} - \gamma_{1n}) + E_{2n}\beta_{2n}(\zeta_n\alpha_{2n}\epsilon_n - \delta_n\xi_n)]s_n$$

$$K_{22} = -\Sigma [E_{1n}k_{s1}^2 q_{1n} - E_{2n}\alpha_{2n}(\delta_n\beta_{2n}\epsilon_n + \zeta_n\eta_n)]c_n$$

3. Рассмотрим систему интегральных уравнений, отличающуюся от (2.8) тем, что $L_1 = 1$ (далее будем называть ее вспомогательной системой). Тогда

$$g^v(y) = (2ik_{s1}\psi_0 - DG^\tau)h^v(y), \quad v = \tau, \sigma \quad (3.1)$$

Отсюда получается следующее соотношение между интегральными характеристиками:

$$G^\tau = 2ik_{s1}\psi_0 H^\tau / (1 + DH^\tau), \quad H^\tau = \int h^\tau(\eta)d\eta \quad (3.2)$$

Введем передаточную функцию, равную отношению амплитуды колебания свободной поверхности $u_y(x=d, y)$ к амплитуде колебания $u_0 = -ik_{s1}\psi_0$ в падающей волне,

$$F(\omega, y) = -\frac{2}{1 + DH^\tau} \left[\frac{H^\tau}{2a\omega\rho_2 C_{s2} \sin k_{s2}d} + k_{s2}^2 \Sigma E_{2n}r_{2n}(\alpha_{2n}\gamma_{2n}\epsilon_n H_n^\sigma + \xi_n H_n^\tau)c_n \right] \quad (3.3)$$

$$H_n^\sigma = \int h^\sigma(\eta)s_n d\eta, \quad H_n^\tau = \int h^\tau(\eta)c_n d\eta$$

На фиг. 2 приведен пример прямого численного расчета модуля передаточной функции $|F(\omega, 0)|$, вычисленной для некоторых реальных параметров первичного и осадочного слоев при $y = 0$ ($\rho_1 = 2,2$ г/см, $c_{p1} = 1,80$ км/с, $c_{s1} = 1,10$ км/с, $\rho_2 = 2,0$ г/см, $c_{p2} = 0,36$ км/с, $c_{s2} = 0,21$ км/с). Численное решение для $d/a = 1$, $b/a = 0,5$ (штриховая линия) сравнивается с классическим решением [3] одномерной задачи без трещин (сплошная линия, $b/a = 1$). Последнее легко получается как частный случай из развитого здесь метода. В самом деле, если $b = a$, то в силу ортогональности тригонометрических функций в представлениях ядер (2.10) решение системы (2.8) имеет вид

$$g^\tau(y) \equiv g^\tau = ik_{s1}\psi_0 / (bD), \quad g^\sigma(y) \equiv 0 \quad (3.4)$$

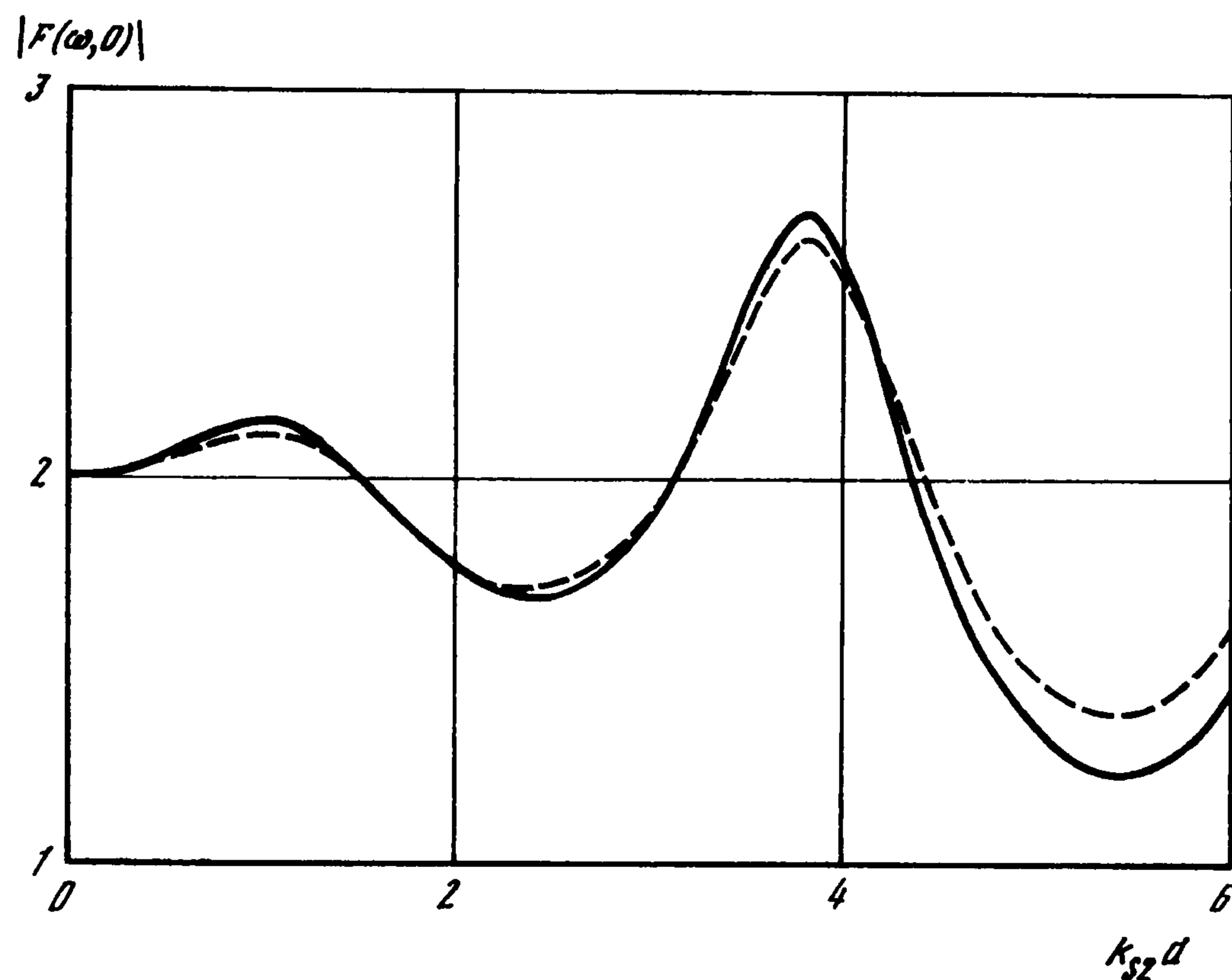
Тогда $H_n^\tau = H_n^\sigma = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Кроме того, из равенства (3.1) при $v = \tau$ следует, что

$$H^\tau = \frac{G^\tau}{2ik_{s1}\psi_0 - DG^\tau} \rightarrow \infty \quad \text{при } b \rightarrow a \quad (3.5)$$

поскольку знаменатель последней дроби в силу равенства (3.4) стремится к нулю. В результате выражение (3.3) принимает вид

$$F(\omega, y) = 2(\cos k_{s2}d - i \frac{\rho_{s2}c_{s2}}{\rho_{s1}c_{s1}} \sin k_{s2}d)^{-1} \quad (3.6)$$

что совпадает с классическим результатом, известным в сейсмологии [3].



Фиг. 3

переменной u и принимает вид

$$F(\omega) = 2H^\tau \left[H^\tau \exp(-ik_{s2}d) - 2a\omega\rho_2 c_{s2} \sin k_{s2}d \right]^{-1} \quad (4.2)$$

$$H^\tau = \int h^\tau(\eta) d\eta = -(a_{11} \ln \xi_0)^{-1}$$

Это и есть явное приближенное аналитическое представление для передаточной функции в случае однородной среды с подповерхностными трещинами.

Оказывается, что приближение (4.2) обладает удивительно высокой точностью для всех $k_{s2}d$ (не только малых), если $d/a \geq 2$. Один из примеров ($\rho_1 = \rho_2 = 2,2$ г/см³, $c_{p1} = c_{p2} = 1,8$ км/с, $c_{s1} = c_{s2} = 1,1$ км/сек, $d/a = 2,5$, $b/a = 0,5$) отражен на фиг. 3, где точное численное решение (сплошная линия) сравнивается с аналитическим (штриховая линия). При $d/a \geq 3$ точность аналитической аппроксимации не хуже 5% равномерно по $k_{s2}d \in (0, 2\pi]$.

Сделаем некоторые выводы из полученного явного приближения (4.1).

1°. При $k_{s2}d = \pi m$ ($m = 0, 1, \dots$) имеем $|F(\omega)| = 2$, т.е. при этих фиксированных частотах амплитуда осцилляций свободной поверхности такая же, как и в одномерной задаче без трещин, независимо от значения относительной величины просвета b/a .

2°. При уменьшении просвета между трещинами $b/a \rightarrow 0$ имеем $\ln \xi_0 \rightarrow -\infty$. Следовательно, $H^\tau \rightarrow 0$. Поэтому вне окрестности частот, отмеченных выше, $|F(\omega)|$ стремится к нулю. Однако в силу свойств логарифмической функции процесс этот происходит очень медленно. Таким образом, при реальных значениях геометрических параметров трудно надеяться, что присутствие периодической системы трещин способно защитить границу от приходящей сейсмической волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Angel Y.C., Achenbach J.O. Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52. N1. P. 33–41.
3. Окамото Ш. Сейсмостойкость инженерных сооружений. М.: Стройиздат, 1980. 342 с.
4. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.

Ростов-на-Дону, Салерно (Италия)

Поступила в редакцию
19.IV.1995