УДК 539.3

© 1998 г. В.Э. Вильдеман

О РЕШЕНИЯХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ КОНТАКТНОГО ТИПА ДЛЯ ТЕЛ С ЗОНАМИ РАЗУПРОЧНЕНИЯ

Дается постановка квазистатической задачи механики упругопластических тел с зонами разупрочнения и граничными условиями контактного типа, позволяющими учесть при решении свойства нагружающей системы. При некоторых ограничениях, накладываемых на определяющие соотношения, и с использованием условия устойчивости процесса разупрочнения в локальной зоне доказываются теоремы о единственности решения сформулированной краевой задачи, максимуме и минимуме найденных функционалов при совпадении кинематически либо статически возможных и действительных полей. Приводятся соответствующие обобщенные вариационные принципы.

1. Пусть в произвольной декартовой системе координат определяющие соотношения, связывающие приращения тензора напряжений $d\sigma$ и тензора деформаций $d\varepsilon$ во время непрерывного нагружения элемента материала, задаются в тензорно-линейном виде

$$d\sigma_{ij} = C_{ijmn}(\varepsilon, \chi) d\varepsilon_{mn} \tag{1.1}$$

где χ – параметр, принимающий значение, равное единице, при активном нагружении, когда $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} > 0$, и нулевое значение при разгрузке. В последнем случае поведение материала определяется постоянным тензором модулей упругости $\mathbf{C}^e$. Ограничимся рассмотрением материалов, обладающих мягкими характеристиками [1], для которых

$$\mathbf{C}\,(\varepsilon, \chi = 1) \leqslant \mathbf{C}(\varepsilon = 0, \chi) = \mathbf{C}^e$$

Будем предполагать наличие исходного напряженно-деформированного состояния, т. е. считать, что в момент, предшествующий рассматриваемому, имеют место и известные ненулевые поля напряжений $\sigma(\mathbf{x})$, деформаций $\varepsilon(\mathbf{x})$ и перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Полные деформации, равно как и их приращения, состоят из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$

Примем известную концепцию о существовании предельных поверхностей: поверхности нагружения в пространстве напряжений и поверхности деформирования в пространстве деформаций. Согласно принципу максимума скорости диссипации Мизеса [2]

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p \geqslant 0 \tag{1.2}$$

где σ_{ij} – действительные значения компонент тензора напряжений, соответствующие предельной поверхности при данном значении ε_{ij}^p, σ_{ij}^* – компоненты любого возможного напряженного состояния, допускаемого данной функцией нагружения. Из приведенного неравенства следует, что поверхности нагружения и деформирования являются невогнутыми, а вектор приращения пластической деформации направлен по внешней нормали к предельной поверхности.

Приращения деформаций малы, так что выполняются соотношения Коши, связывающие их с вектором приращения перемещения,

$$d\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(du_i)+\frac{\partial}{\partial x_i}(du_j)\right] \tag{1.3}$$

и справедливы уравнения равновесия среды ($\mathbf{X}$ – заданные объемные силы)

$$d\sigma_{ij,j}+DX_i=0 \tag{1.4}$$

Условия нагружения тела Ω с границей $\Sigma=\Sigma_S+\Sigma_u$ определим с помощью граничных условий контактного типа [3] в форме

$$(d\sigma_{ij}n_j+R_{ij}du_j)|_{\Sigma_S}=d\overset{\circ}{S_i},\quad (du_i+Q_{ij}d\sigma_{jk}n_k)|_{\Sigma_u}=d\overset{\circ}{u_i} \tag{1.5}$$

позволяющей дополнить постановку задачи информацией о характеристиках жесткости $R_{ij}(\mathbf{u},\mathbf{x})$ и податливости $Q_{ij}(\mathbf{S},\mathbf{x})$ нагружающей системы [4], удовлетворяющих следующим условиям:

$$\forall\mathbf{e}\quad R_{ij}e_je_i\geqslant 0,\quad Q_{ij}e_je_i\geqslant 0,\quad R_{ik}Q_{kj}=\delta_{ij} \tag{1.6}$$

Здесь n_k – направляющие косинусы вектора нормали к площадке, δ_{ij} – символ Кронекера. Номинально, без учета деформации или сопротивления тела, задаваемые приращения усилий и перемещений на границе связаны соотношениями

$$dS_i^\circ=R_{ij}du_j^\circ,\quad du_i^\circ=Q_{ij}dS_j^\circ \tag{1.7}$$

а из (1.6) следует связь уравнений (1.5), что в общем случае позволяет использовать граничные условия одного вида для всей поверхности. В связи с этим из (1.3)–(1.5) следуют соотношения

$$\int\limits_{\Sigma=\Sigma_S}dS_i^\circ du_id\Sigma=\int\limits_{\Omega}(d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}-dX_idu_i)d\Omega+\int\limits_{\Sigma=\Sigma_S}R_{ij}du_jdu_id\Sigma \tag{1.8}$$

$$\int\limits_{\Sigma=\Sigma_u}dS_idu_i^\circ d\Sigma=\int\limits_{\Omega}(d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}-dX_idu_i)d\Omega+\int\limits_{\Sigma=\Sigma_u}Q_{ij}dS_jdS_id\Sigma \tag{1.9}$$

где $dS_i=d\sigma_{ij}n_j|_\Sigma$.

Уравнения (1.8) и (1.9) аналогичны уравнению виртуальных работ [5] и являются основой доказательства основных теорем механики неупругого деформирования тел с граничными условиями контактного типа. Другим важным соотношением в случае возможного разупрочнения материала, сопровождающегося снижением уровня напряжений при прогрессирующих деформациях

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}<0 \tag{1.10}$$

является условие устойчивости

$$\int\limits_{\Omega}C_{ijmn}(\varepsilon,\chi=1)\delta\varepsilon_{mn}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega+\int\limits_{\Sigma}R_{ij}\delta u_j\delta u_id\Sigma>0 \tag{1.11}$$

Последнее неравенство следует из постулата Друккера [6], примененного к деформируемой и нагружающей системам в совокупности.

Теорема 1.1. Пусть для ограниченного поверхностью Σ тела Ω, содержащего область $\Omega_0\subset\Omega(\Sigma\not\subset\Omega_0)$, выполняются неравенства

$$\Omega-\Omega_0:\quad C_{ijmn}(\varepsilon,\chi=1)h_{mn}h_{ij}>0;\quad \Omega_0:\quad C_{ijmn}(\varepsilon,\chi=1)h_{mn}h_{ij}<0 \tag{1.12}$$

где $\mathbf{h}$ – произвольный симметричный тензор второго ранга, причем множество, где $C_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)h_{mn}h_{ij} = 0$ имеет меру нуль. Тогда неравенство (1.11) является достаточным условием существования не более одного решения задачи (1.1), (1.3)–(1.5).

Доказательство. Предположим противное: существуют два различных решения $du_i^{(1)}, d\varepsilon_{ij}^{(1)}, d\sigma_{ij}^{(1)}$ и $du_i^{(2)}, d\varepsilon_{ij}^{(2)}, d\sigma_{ij}^{(2)}$. В этом случае поля

$$du_i' = du_i^{(1)} - du_i^{(2)}, \quad d\varepsilon_{ij}' = d\varepsilon_{ij}^{(1)} - d\varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad d\sigma_{ij}' = d\sigma_{ij}^{(1)} - d\sigma_{ij}^{(2)}$$

также удовлетворяют всем уравнениям краевой задачи при нулевых массовых силах и граничных условиях

$$(d\sigma_{ij}'n_j + R_{ij}u_j')|_{\Sigma_S} = 0, \quad (du_i' + Q_{ij}d\sigma_{jk}'n_k)|_{\Sigma_u} = 0 \tag{1.13}$$

Граничные условия, как было отмечено, могут быть приведены к единой форме. В данном случае уравнение (1.8) приобретает вид

$$\int_\Omega d\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}'d\Omega = -\int_{\Sigma=\Sigma_S} R_{ij}du_j'du_i'd\Sigma \tag{1.14}$$

Очевидно, что правая часть последнего уравнения не может быть положительной. В случае неединственности решения исходной краевой задачи интеграл по объему должен быть отрицательным, в противном случае оба интеграла равны нулю.

Неотрицательность выражения, стоящего под знаком объемного интеграла, для области $\Omega - \Omega_0$ в случаях активного нагружения либо разгрузки как по одному, так и другому решениям следует из (1.12). Если в указанной области упругая разгрузка имеет место согласно лишь одному решению, например первому, то, положив $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} + d\sigma_{ij}^{(1)}$, из принципа максимума Мизеса (1.2) получим $d\sigma_{ij}^{(1)}d\varepsilon_{ij}^{(2)p} \leqslant 0$. Следовательно, и в этом случае объемный интеграл в выражении (1.14) неотрицателен. Вместе с фактом неположительности правой части (1.14) это свидетельствует о единственности решения краевой задачи для упругопластического упрочняющегося тела ($\Omega_0 = 0$) с граничными условиями в форме (1.5).

Если согласно различным решениям краевой задачи в каждой точке области Ω_0 имеет место активное нагружение ($\chi = 1$), то при выполнении условия устойчивости закритической деформации (1.11) равенство (1.14) невозможно, что свидетельствует о наличии связанного с исходным предположением противоречия.

Однако возможен вариант, когда в некоторой области $\Omega_0' \subseteq \Omega_0$ согласно одному из решений, например первому, имеет место упругая разгрузка. Принимая во внимание, что в этом случае

$$d\sigma_{ij}^{(1)} = C_{ijmn}^e d\varepsilon_{mn}^{(1)}, \quad d\sigma_{ij}^{(2)} = C_{ijmn}^e d\varepsilon_{mn}^{(2)e}$$

для любой точки из указанной области запишем

$$d\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}' = C_{ijmn}^e d\varepsilon_{mn}^{(1)}d\varepsilon_{ij}^{(1)} - 2d\sigma_{ij}^{(2)}d\varepsilon_{ij}^{(1)} - C_{ijmn}^e d\varepsilon_{mn}^{(1)}d\varepsilon_{ij}^{(2)p} + d\sigma_{ij}^{(2)}d\varepsilon_{ij}^{(2)}$$

Следовательно,

$$d\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}' - C_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)d\varepsilon_{mn}'d\varepsilon_{ij}' = [C_{ijmn}^e - C_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)]d\varepsilon_{mn}^{(1)}d\varepsilon_{ij}^{(1)} - d\sigma_{ij}^{(1)}d\varepsilon_{ij}^{(2)p} > 0$$

Знак последнего неравенства определяется условием (1.12) для Ω_0 и направленностью векторов $\mathbf{d\sigma}^{(1)}$ и $\mathbf{d\varepsilon}^{(2)p}$ соответственно внутрь поверхности нагружения и по внешней нормали к ней.

Поэтому, обращаясь к (1.14), запишем

$$\int_\Omega C_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)d\varepsilon_{mn}'d\varepsilon_{ij}'d\Omega + \int_\Sigma R_{ij}du_i'du_j'd\Sigma < 0$$

придя и в этом случае к противоречию с условием (1.11). Теорема доказана.

2. Рассмотрим деформируемое тело Ω с границей Σ и в отдельности от него некоторую фиктивную ограниченную двусвязную область упругого материала Ω' с жестко закрепленной внешней границей и внутренней поверхностью Σ', мало отличающейся от Σ. В каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega'$ также справедливы уравнения (1.3), (1.4) и (1.1) с некоторым постоянным тензором модулей упругости. К точкам поверхности Σ' приложим усилия – dS_i°, такие, что вызванные ими перемещения – du_i° граничных точек обеспечат совпадение конфигураций поверхностей Σ' и Σ. Связь указанных величин описывается уравнениями [7]

$$du_i^\circ(\mathbf{x}') = \int\limits_{\Sigma} G_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})\, dS_j^\circ(\mathbf{x}) d\Sigma \tag{2.1}$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ – тензор Грина для области Ω'. Можно записать и обратные соотношения

$$dS_i^\circ(\mathbf{x}') = \int\limits_{\Sigma} N_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})\, du_j^\circ(\mathbf{x}) d\Sigma \tag{2.2}$$

Тензор $\mathbf{N}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$, как и тензор Грина, однозначно определяется упругими свойствами и геометрией тела Ω'.

Мысленно поместим внутрь области Ω' тело Ω без деформации последнего. Идеально скрепив тела по границе раздела, снимем усилия – dS_i°. В результате совместной деформации двух областей на границе $\Sigma \in \Omega$ возникнут усилия

$$dS_i(\mathbf{x}') = dS_i^\circ(\mathbf{x}') - \int\limits_{\Sigma} N_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})\, du_j(\mathbf{x}) d\Sigma \tag{2.3}$$

а точки границы раздела претерпят перемещения

$$du_i(\mathbf{x}') = du_i^\circ(\mathbf{x}') - \int\limits_{\Sigma} G_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})\, dS_j(\mathbf{x}) d\Sigma \tag{2.4}$$

В случае представления связи величин dS_i° и du_i° в тензорно-линейной записи (1.7) соответствующие коэффициенты пропорциональности $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и $Q_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$ находятся из (2.1) и (2.2) с учетом (1.7).

Если принять допущение, что величины $(dS_i^\circ - dS_i)$ в произвольной точке границы с текущей координатой $\mathbf{x}$ не зависят от величин $(du_i^\circ - du_i)$ во всех точках границы, кроме рассматриваемой, а изменение коэффициентов жесткости $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ на интервале от $\mathbf{du}^\circ$ до $\mathbf{du}$ пренебрежимо мало, то уравнения (2.3) для всех $\mathbf{x} \in \Sigma$ можно представить в упрощенном варианте:

$$dS_i^\circ(\mathbf{x}) - dS_i(\mathbf{x}) = R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{du}^\circ) du_j(\mathbf{x}) \tag{2.5}$$

В результате принятия аналогичных упрощающих гипотез из (2.4), (2.1) и (1.7) следуют уравнения

$$du_i^\circ(\mathbf{x}) - du_i(\mathbf{x}) = Q_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{dS}^\circ) dS_j(\mathbf{x}) \tag{2.6}$$

которые, как и предыдущие, по существу совпадают с граничными условиями (1.5).

Таким образом, если внутренняя граница Σ' области Ω' в недеформированном состоянии отличается от Σ в каждой точке на соответствующий вектор смещения $\mathbf{du}^\circ(\mathbf{x})$, принимаемый в качестве номинально задаваемого приращения перемещений для точек поверхности Σ, а свойства области Ω' таковы, что для совпадения границ требуется приложение в точках Σ' усилий, отличающихся лишь знаком от номинально задаваемых $\mathbf{dS}^\circ(\mathbf{x})$, то в результате описанной процедуры стыковки тела Ω и фиктивной области Ω' на общей границе устанавливаются условия типа (1.5), а тело Ω' может служить моделью нагружающей системы.

Поля $\mathbf{du}(\mathbf{x})$, $\mathbf{d}\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mathbf{d}\sigma(\mathbf{x})$ в теле Ω, вызванные несовпадением исходных границ областей Ω и Ω', удовлетворяют уравнениям (1.1), (1.3) и (1.4) при условиях (1.5). Допустим существование области разупрочнения Ω_0 и выполнение условий (1.11) и (1.12). Поля, удовлетворяющие всем указанным уравнениям и неравенствам, будем называть действительными.

Пусть $d\sigma^*_{ij}$ – статически возможные приращения напряжений в области Ω, удовлетворяющие уравнениям равновесия (1.4) и статическим условиям сопряжения

$$dS^*_i\Big|_\Sigma \equiv d\sigma^*_{ij} n_j\Big|_\Sigma = -dS^*_i\Big|_{\Sigma'}, \tag{2.7}$$

но такие, что соответствующие им, согласно определяющим соотношениям (1.1), возможные приращения деформаций $d\varepsilon^*_{ij}$ не обязательно выражаются через непрерывные перемещения. В области Ω' соотношения Коши выполняются, отклонение статически возможных полей от действительных возникает вследствие отличия возможных и действительных усилий и перемещений на общей границе.

Теорема 2.1. Абсолютный минимум функционала

$$W^* = \int_\Omega d\sigma^*_{ij} d\varepsilon^*_{ij} d\Omega - \int_\Sigma Q_{ij}\left(2dS^\circ_j dS^*_i - dS^*_j dS^*_i - \frac{1}{2} dS^\circ_j dS^\circ_i\right) d\Sigma \tag{2.8}$$

определенного для всех статически возможных полей, отвечает действительному полю приращений напряжений.

Доказательство. Рассмотрим следующие равенства:

$$\int_{\Omega+\Omega'} (d\sigma^*_{ij} - d\sigma_{ij}) d\varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Sigma(\Omega)} (dS^*_i - dS_i) du_i d\Sigma +$$

$$+ \int_{\Sigma(\Omega')} (dS^*_i - dS_i)(du^\circ_i - du_i) d\Sigma = \int_\Sigma (dS^*_i - dS_i) du^\circ_i d\Sigma \tag{2.9}$$

полученные при использовании последовательно соотношений Коши применительно к действительному полю деформаций, уравнений равновесия и теоремы Гаусса – Остроградского.

Представим подынтегральное выражение в левой части (2.9) в виде

$$(d\sigma^*_{ij} - d\sigma_{ij}) d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(d\sigma^*_{ij} d\varepsilon^*_{ij} - d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}) - \frac{1}{2}(d\sigma^*_{ij} - d\sigma_{ij})(d\varepsilon^*_{ij} - d\varepsilon_{ij}) \tag{2.10}$$

С учетом возможной разгрузки имеем

$$\int_\Omega (d\sigma^*_{ij} - d\sigma_{ij})(d\varepsilon^*_{ij} - d\varepsilon_{ij}) d\Omega \geqslant \int_\Omega C_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)[d\varepsilon^*_{mn} - d\varepsilon_{mn}][d\varepsilon^*_{ij} - d\varepsilon_{ij}] d\Omega \tag{2.11}$$

что справедливо в силу обладания рассматриваемым материалом мягкой характеристикой и следует из аналогичного неравенства, полученного для области Ω_0 при доказательстве теоремы 1.1.

Далее

$$\int_{\Omega'} (d\sigma^*_{ij} - d\sigma_{ij})(d\varepsilon^*_{ij} - d\varepsilon_{ij}) d\Omega =$$

$$= \int_\Sigma (dS^*_i - dS_i)[(du^\circ_i - du^*_i) - (du^\circ_i - du_i)] d\Sigma = \int_\Sigma R_{ij}(du^*_j - du_j)(du^*_i - du_i) d\Sigma \tag{2.12}$$

Возвращаясь к (2.9) с учетом (2.10)–(2.12) и условия (1.11), получим

$$\int\limits_{\Omega+\Omega'} (d\sigma^*_{ij} d\varepsilon^*_{ij} - d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}) d\Omega \geqslant 2\int\limits_{\Sigma} (dS^*_i - dS_i) du^\circ_i d\Sigma$$

Равенство имеет место при совпадении статически возможных и действительных полей.

Согласно уравнению виртуальных работ, а также условиям сопряжения (2.7) и (2.6)

$$\int\limits_{\Omega'} d\sigma^*_{ij} d\varepsilon^*_{ij} d\Omega = \int\limits_{\Sigma} dS^*_i (du^\circ_i - du^*_i) d\Sigma = \int\limits_{\Sigma} Q_{ij} dS^*_j dS^*_i d\Sigma$$

$$\int\limits_{\Omega'} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega = \int\limits_{\Sigma} dS_i (du^\circ_i - du_i) d\Sigma = \int\limits_{\Sigma} Q_{ij} dS_j dS_i d\Sigma$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega} d\sigma^*_{ij} d\varepsilon^*_{ij} d\Omega - \int\limits_{\Sigma} (2dS^*_i du^\circ_i - Q_{ij} dS^*_j dS^*_i) d\Sigma \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega - \int\limits_{\Sigma} (2dS_i du^\circ_i - Q_{ij} dS_j dS_i) d\Sigma = \int\limits_{\Sigma} dS_i du^\circ_i d\Sigma \qquad (2.13)$$

Справедливость сформулированного экстремального принципа доказана.

В частом случае, когда на части Σ_u поверхности Σ заданы условия жесткого нагружения ($Q_{ij} = 0$), а на другой части поверхности Σ_S – условия мягкого нагружения ($R_{ij} = 0$) и требуется, чтобы статически возможные поля удовлетворяли равенству

$$d\sigma^*_{ij} n_j \Big|_{\Sigma_S} = dS^\circ_i$$

соотношение (2.13) приобретает вид

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} d\sigma^*_{ij} d\varepsilon^*_{ij} d\Omega - \int\limits_{\Sigma_u} dS^*_i du_i d\Sigma \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega - \int\limits_{\Sigma_u} dS_i du_i d\Sigma =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_S} dS_i du_i d\Sigma - \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_u} dS_i du_i d\Sigma$$

и совпадает с выражением известного экстремального принципа, полученного с использованием традиционных граничных условий [8].

Для статически допустимых полей, отличающихся бесконечно мало от действительного ($d\sigma^*_{ij} = d\sigma_{ij} + \delta(d\sigma_{ij})$), функционал W^* принимает экстремальное значение при выполнении условия его стационарности по отношению к вариациям $\delta(d\sigma_{ij})$, удовлетворяющим уравнениям равновесия. В этом случае уравнение

$$\int\limits_{\Omega} \delta(d\sigma_{ij}) d\varepsilon_{ij} d\Omega - \int\limits_{\Sigma} \delta(dS_i)[du^\circ_i - Q_{ij} dS_j] d\Sigma = 0$$

выражает модифицированный вариационный принцип для упругопластических тел с возможными зонами разупрочнения и граничными условиями контактного типа.

3. Второй экстремальный принцип касается кинематически возможных приращений деформаций $d\bar{\varepsilon}_{ij}$, связанных с приращениями перемещений $d\bar{u}_i$ соотношениями Коши и удовлетворяющих на границе областей Ω и Ω' кинематическим условиям сопряжения

$$d\bar{u}_i \,|_{\Sigma} = d\bar{u}_i \,|_{\Sigma'} \qquad (3.1)$$

но таких, что соответствующие им согласно определяющим соотношениям возможные приращения напряжений $d\bar{\sigma}_{ij}$ в области Ω не обязательно удовлетворяют уравнениям равновесия.

Теорема 3.1. Абсолютный максимум функционала

$$\overline{W} = \int_{\Sigma} R_{ij}\left(2du_j^{\circ}d\bar{u}_i - d\bar{u}_j d\bar{u}_i - \frac{1}{2}du_j^{\circ}du_i^{\circ}\right)d\Sigma - \int_{\Omega} d\bar{\sigma}_{ij}d\bar{\varepsilon}_{ij}d\Omega \qquad (3.2)$$

определенного для всех кинематически возможных полей, отвечает действительному полю приращений деформаций.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Omega+\Omega'} (d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\varepsilon_{ij})d\sigma_{ij}d\Omega = \int_{\Sigma(\Omega)} (d\bar{u}_i - du_i)dS_i d\Sigma +$$

$$+ \int_{\Sigma(\Omega')} [(du_i^{\circ} - d\bar{u}_i) - (du_i^{\circ} - du_i)]dS_i d\Sigma = 0 \qquad (3.3)$$

и тождество

$$2(d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\varepsilon_{ij})d\sigma_{ij} \equiv f_1 - f_2$$

$$f_1 = d\bar{\sigma}_{ij}d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}, \quad f_2 = d\bar{\varepsilon}_{ij}(d\bar{\sigma}_{ij} - d\sigma_{ij}) + d\sigma_{ij}(d\varepsilon_{ij} - d\bar{\varepsilon}_{ij})$$

Определим знак следующей величины:

$$\int_{\Omega+\Omega'} Ad\Omega = \int_{\Omega+\Omega'} (f_2 - f_3)d\Omega, \quad f_3 = C_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)[d\bar{\varepsilon}_{mn} - d\varepsilon_{mn}][d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\varepsilon_{ij}]$$

В областях активного нагружения по всем кинематически возможным и действительному продолжениям процесса $A = 0$. В зонах упругого деформирования и разгрузки, производимой как $d\bar{\sigma}_{ij}$, так и $d\sigma_{ij}$ имеем

$$A = [C^e_{ijmn} - C_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)](d\bar{\varepsilon}_{mn} - d\varepsilon_{mn})(d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\varepsilon_{ij}) \geqslant 0$$

что определяется отмеченными ранее свойствами рассматриваемых материалов. К аналогичному выражению для величины A придем и при рассмотрении случая, когда $d\sigma_{ij}$ вызывают нагружение, а $d\bar{\sigma}_{ij}$ – разгрузку.

Если согласно кинематически возможному приращению деформаций $d\bar{\varepsilon}_{ij}$ имеет место активное нагружение, а упругая разгрузка соответствует действительным приращениям $d\varepsilon_{ij}$, то

$$A = [C^e_{ijmn} - C_{ijmn}(\varepsilon, \chi = 1)]d\varepsilon_{mn}d\varepsilon_{ij} - 2d\sigma_{ij}d\bar{\varepsilon}^p_{ij} > 0$$

Истинность подобного неравенства уже была обоснована при доказательстве теоремы 1.1.

Согласно уравнению виртуальных работ для области Ω' и условию (1.11) при $d\bar{\varepsilon}_{ij} \neq d\varepsilon_{ij}$ получим

$$\int_{\Omega+\Omega'} f_3 d\Omega = \int_{\Omega} f_3 d\Omega + \int_{\Sigma} R_{ij}(d\bar{u}_j - du_j)(d\bar{u}_i - du_i)d\Sigma > 0$$

Таким образом, доказано, что

$$\int_{\Omega+\Omega'} [d\bar{\varepsilon}_{ij}(d\bar{\sigma}_{ij} - d\sigma_{ij}) + d\sigma_{ij}(d\varepsilon_{ij} - d\bar{\varepsilon}_{ij})]d\Omega \geqslant 0$$

а следовательно,

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega+\Omega'} (d\bar{\sigma}_{ij}d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij})d\Omega \geqslant \int_{\Omega+\Omega'} (d\bar{\varepsilon}_{ij} - d\varepsilon_{ij})\, d\sigma_{ij}d\Omega \qquad (3.4)$$

Согласно условиям сопряжения (3.1) и уравнениям (2.5) имеем равенство

$$\int\limits_{\Omega'} d\bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega = \int\limits_{\Sigma} (dS_i^{\circ} - R_{ij} d\bar{u}_j)(du_i^{\circ} - d\bar{u}_i) d\Sigma =$$

$$= \int\limits_{\Sigma} (dS_i^{\circ} du_i^{\circ} - 2dS_i^{\circ} d\bar{u}_i + R_{ij} d\bar{u}_j d\bar{u}_i) d\Sigma$$

и аналогичное равенство, соответствующее замене $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ и $\bar{u}_i$ на σ_{ij}, ε_{ij} и u_i.

Возвращаясь к неравенству (3.4) с учетом (3.3) и последних соотношений, получим

$$\int\limits_{\Omega} d\bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega - \int\limits_{\Sigma} (2dS_i^{\circ} d\bar{u}_i - R_{ij} d\bar{u}_j d\bar{u}_i) d\Sigma \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega - \int\limits_{\Sigma} (2dS_i^{\circ} du_i - R_{ij} du_j du_i) d\Sigma = -\int\limits_{\Sigma} dS_i^{\circ} du_i d\Sigma \qquad (3.5)$$

Экстремальный принцип доказан.

В частном случае, когда

$$R_{ij}\Big|_{\Sigma_S} = 0, \quad Q_{ij}\Big|_{\Sigma_u} = 0, \quad \bar{u}_i\Big|_{\Sigma_u} = u_i\Big|_{\Sigma_u} = u_i^{\circ}$$

неравенство (3.5) имеет вид

$$\int\limits_{\Sigma_S} dS_i d\bar{u}_i d\Sigma - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} d\bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Sigma_S} dS_i du_i d\Sigma - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_S} dS_i du_i d\Sigma - \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_u} dS_i du_i d\Sigma$$

и совпадает с выражением известного экстремального принципа, полученного с использованием традиционных граничных условий [8].

При рассмотрении кинематически допустимых полей, отличающихся бесконечно мало от действительного ($d\bar{\varepsilon}_{ij} = d\varepsilon_{ij} + \delta(d\varepsilon_{ij})$), функционал $\overline{W}$ принимает экстремальное значение при выполнении условия его стационарности по отношению к вариациям $\delta(d\varepsilon_{ij})$, удовлетворяющим соотношениям Коши. В этом случае уравнение

$$\int\limits_{\Omega} d\sigma_{ij} \delta(d\varepsilon_{ij}) d\Omega - \int\limits_{\Sigma} \delta(du_i)[dS_i^{\circ} - R_{ij} du_j] d\Sigma = 0$$

выражает второй модифицированный вариационный принцип для упругопластических тел с возможными зонами разупрочнения и граничными условиями контактного типа.

Согласно сформулированным принципам,

$$W^* \geqslant W \geqslant \overline{W}$$

где

$$W = \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} dS_i^{\circ} - dS_i \right) du_i^{\circ} d\Sigma = \int\limits_{\Sigma} \left(du_i - \frac{1}{2} du_i^{\circ} \right) dS_i^{\circ} d\Sigma$$

что создает условия для получения верхней и нижней границ в приближенном решении краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
2. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
3. *Победря Б.Е.* О разрешимости задач теории упругости контактного типа // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 4. С. 760–763.
4. *Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.* Краевая задача механики деформирования и разрушения поврежденных тел с зонами разупрочнения // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 6. С. 122–132.
5. *Koiter W.T.* General theorems for elastic-plastic solids // Progress in solid mechanics. V. 1. Edited by I. N. Sneddon and R. Hill. Amsterdam: North-Holland. 1960.; *Койтер В.Т.* Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 79 с.
6. *Друккер Д.* О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. № 3. С. 115–128.
7. *Победря Б.Е., Шешенин С.В.* О матрице влияния // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1979. № 6. С. 76–81.
8. *Hill R.* The mathematical theory of plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950; *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

Пермь

Поступила в редакцию
12.XII.1996