

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, О.Н. Лапина

ДИФРАКЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ МОД В СОСТАВНЫХ И СТУПЕНЧАТЫХ УПРУГИХ ВОЛНОВОДАХ

Предлагается метод расчета дифракции волн Лэмба на вертикальных границах соединения упругих волноводов, эффективность которого обеспечивается учетом характера особенности решения в угловых точках. Ключевую роль играет свойство обобщенной ортогональности нормальных мод, позволяющее выразить коэффициенты разложения волнового поля по модам через перемещения и напряжения на линии стыка. Приводятся численные результаты, показывающие зависимость коэффициентов прохождения и распределения энергии от высоты ступеньки и частоты для ступенчатого волновода, приклеенного к недеформируемой подложке.

Наряду с прямыми численными схемами и асимптотическими разложениями основным полуаналитическим методом решения задач дифракции упругих волн на поверхностных ступеньках, линиях стыка полуполос, вертикальных трещинах и т.п. является разложение по нормальным модам (метод суперпозиции или кусочно-однородных решений) [1–6]. Однако возникающие здесь бесконечные алгебраические системы

$$At = f \tag{1}$$

относительно неизвестных коэффициентов разложения $t = \{t_1, t_2, \dots\}$, $t_k = \{t_{1,k}, t_{2,k}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) являются операторными уравнениями первого рода. Поэтому их решение методом простой редукции нередко оказывается численно неустойчивым, а представление волнового поля конечной суммой вместо ряда неприменимо в ближней зоне и тем более на линии стыка, где ряды по нормальным модам могут быть даже расходящимися. Регуляризация системы достигается при выделении в явном виде или учете в численной схеме поведения решения в угловых точках, которое определяет асимптотику неизвестных t_k при $k \rightarrow \infty$ [3–5].

Например, при известном поведении t_k :

$$t_k \sim cd_k(\gamma), \quad k \rightarrow \infty \tag{2}$$

(в общем случае в (2) может быть несколько слагаемых по числу угловых точек или может потребоваться учет нескольких членов разложения) система (1) сводится к асимптотически эквивалентной устойчивой системе вида

$$\sum_{k=1}^N a_{lk} t_k + g_l c = f_l, \quad l = 1, 2, \dots, N+1 \tag{3}$$

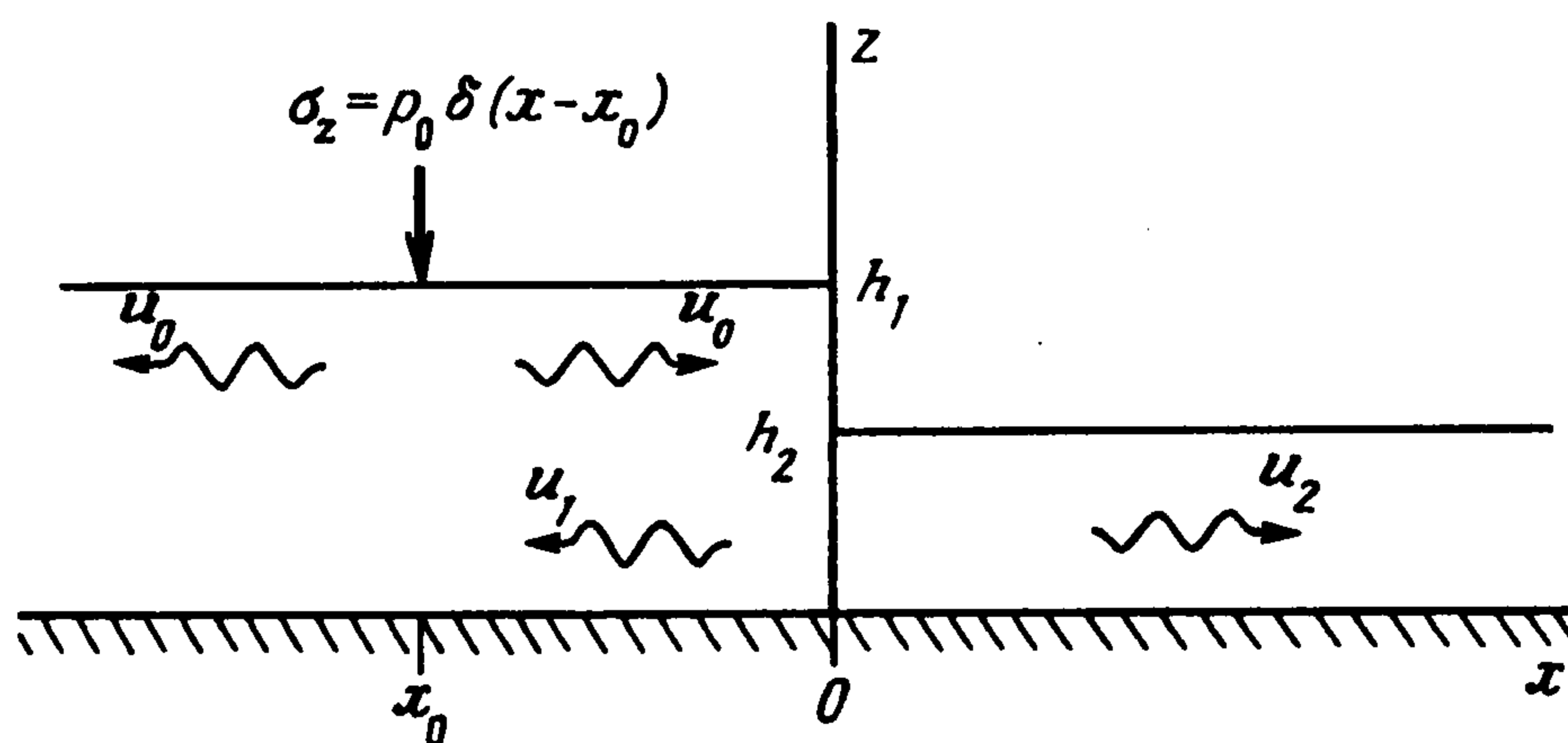
Здесь c – неизвестный коэффициент в асимптотическом представлении (2), $g_l = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{lk} d_k(\gamma)$. Сомножители $d_k(\gamma)$ зависят от показателя особенности напряжений γ в угловой точке, определяющего скорость их убывания при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, основой данного способа регуляризации является получение асимптотических разложений типа (2).

В случае смешанных задач, сводящихся к уравнениям Винера–Хопфа (контактные задачи [7], дифракция на горизонтальных препятствиях [8]) такой подход оказался эффективным благодаря использованию явных интегральных выражений для t_k через функции с известным поведением на границе, что позволило получить разложение t_k при $k \rightarrow \infty$ как асимптотику осциллирующих интегралов [9]. В случае составных волноводов конечной толщины с вертикальными границами был предложен подход [10], в котором аналогичную роль для получения асимптотики t_k играет свойство обобщенной ортогональности нормальных мод [1], позволяющее выразить t_k через интегралы от перемещений и напряжений на вертикальной границе, характер поведения которых в угловых точках составных упругих тел хорошо известен [11]. Более того, соотношение обобщенной ортогональности позволяет эффективно использовать здесь и метод разложения по ортогональным полиномам с весом, несущим требуемую особенность в угловых точках, так что отпадает необходимость строить асимптотику t_k . При этом обеспечивается не только устойчивость решения системы, но и возможность численного анализа в ближней зоне вплоть до линии соединения волноводов.

Ниже дается описание реализации данного подхода на примере составного упругого слоя с поверхностной ступенькой.

Рассматривается составной упругий волновод со ступенькой, состоящий из двух полуполос толщины h_1 и h_2 ($h_1 \geq h_2$, $\Delta h = h_1 - h_2$ – высота ступеньки) с различными упругими константами λ_n, μ_n и плотностью ρ_n , $n = 1, 2$ (фиг. 1). На линии стыка $x = 0$,



Фиг. 1

$0 \leq z \leq h_2$ выполняются условия жесткого сцепления (равенство перемещений и напряжений), а участок торца $h_2 \leq z \leq h_1$ и верхние грани $z = h_1$ при $x \leq 0$ и $z = h_2$ при $x \geq 0$ свободны от напряжений; нижняя грань $z = 0$ жестко фиксирована.

Гармоническое волновое поле $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$, $\mathbf{u} = \{u_x, u_z\} = \{u^{(1)}, u^{(2)}\}$ в первой (левой) полуполосе складывается из заданного поля $\mathbf{u}_0e^{-i\omega t}$ и поля отраженных волн $\mathbf{u}_1e^{-i\omega t}$: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$, а во второй полуполосе состоит из прошедших волн $\mathbf{u}_2e^{-i\omega t}$ (гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем опущен). В случае набегания волн из правой полуполосы ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_2$ при $x > 0$) предлагаемая схема решения принципиально не меняется. При проведении расчетов в качестве поля \mathbf{u}_0 задавались либо отдельная нормальная мода, приходящая из бесконечности

$$\mathbf{u}_0(x, z) = \mathbf{a}_{1,k}(z)e^{i\zeta_k x} \quad (4)$$

либо поле, возбуждаемое в однородном слое нормальной сосредоточенной нагрузкой $\sigma_z = \rho_0 \delta(x - x_0)$, приложенной к поверхности левой полуполосы ($x_0 < 0$)

$$\mathbf{u}_0(x, z) = i\rho_0 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_{1,k}(x - x_0, z)e^{i\zeta_k |x - x_0|} \quad (5)$$

Для отраженных и прошедших волн $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ и соответствующих полей напряжений

τ_1, τ_2 ($\tau = \{\sigma_{xx}, \tau_{xz}\}$) также имеем разложение по нормальным модам

$$\mathbf{u}_n(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{n,k} \mathbf{a}_{n,k}(z) e^{\mp i \zeta_{n,k} x}, \quad \boldsymbol{\tau}_n(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{n,k} \mathbf{b}_{n,k}(z) e^{\mp i \zeta_{n,k} x} \quad 0 \leq z \leq h_n, \quad n = 1, 2 \quad (6)$$

$$\mathbf{a}_{n,k} = \{ \text{sign } x i \zeta_{n,k} P_n(\zeta_{n,k}, z - h_n), \quad R_n(\zeta_{n,k}, z - h_n) \} / \Delta'_n(\zeta_{n,k})$$

$$\mathbf{b}_{n,k}(z) e^{\mp i \zeta_{n,k} x} = T_n(\mathbf{a}_{n,k}(z) e^{\mp i \zeta_{n,k} x}), \quad T_n = \begin{vmatrix} (\lambda_n + 2\mu_n) \frac{\partial}{\partial x} & 2\mu_n \frac{\partial}{\partial z} \\ \mu_n \frac{\partial}{\partial z} & \mu_n \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix}$$

Здесь и далее при $n = 1, x \leq 0$ – верхний знак, при $n = 2, x \geq 0$ – нижний знак.

Вид функций $P_n(\alpha, z)/\Delta_n(\alpha)$ и $R_n(\alpha, z)/\Delta_n(\alpha)$, входящих во второй столбец символа матрицы Грина $K(\alpha_1, \alpha_2)$, для рассматриваемого слоя, сцепленного с жестким основанием, приведен в [7]; волновые числа $\pm \zeta_{n,k}$ ($\text{Im} \zeta_{n,k} \geq 0$) – полюса $K(\alpha_1, \alpha_2)$ (нули $\Delta_n(\alpha)$, $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$). Собственные векторы $\mathbf{b}_{n,k}$ определяются через $\mathbf{a}_{n,k}$ с помощью операторов напряжения T_n для вертикальной площадки с нормалью, параллельной оси x .

Условия на вертикальной границе $x = 0$ имеют вид

$$\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2, \quad 0 \leq z \leq h_2 \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_1 = 0, \quad h_2 \leq z \leq h_1 \quad (8)$$

$$(\boldsymbol{\tau}_0 = T_1 \mathbf{u}_0)$$

Свойство обобщенной ортогональности нормальных мод [1]

$$(a_{n,m}^{(1)}, b_{n,j}^{(1)})_{h_n} - (a_{n,j}^{(2)}, b_{n,m}^{(2)})_{h_n} = 0, \quad m \neq j, \quad n = 1, 2 \quad (9)$$

$$\left((f, g)_h = \int_0^h f g dz \right)$$

позволяет получить явное решение в рядах вспомогательной задачи для полуполосы с заданными на торцах противоположными компонентами векторов перемещения и напряжения (нормальная компонента перемещений $u^{(1)}$ и касательная напряжений $\tau^{(2)}$ или наоборот).

Пусть, например, $u^{(1)}(0, z) = v(z)$, $\tau^{(2)}(0, z) = \sigma(z)$; v, σ – неизвестные функции на $[0, h_1]$. Тогда из граничных условий

$$u_1^{(1)}(0, z) + u_0^{(1)}(0, z) = v(z), \quad \tau_1^{(2)}(0, z) + \tau_0^{(2)}(0, z) = \sigma(z), \quad 0 \leq z \leq h_1 \quad (10)$$

$$u_2^{(1)}(0, z) = v(z), \quad \tau_2^{(2)}(0, z) = \sigma(z), \quad 0 \leq z \leq h_2 \quad (11)$$

и соотношений (6), (9) следует

$$t_{1,k} = [(v - u_0^{(1)}, b_{1,k}^{(1)})_{h_1} - (\sigma - \tau_0^{(2)}, a_{1,k}^{(2)})_{h_1}] / d_{1,k} \quad (12)$$

$$t_{2,k} = [(v, b_{2,k}^{(1)})_{h_2} - (\sigma, a_{2,k}^{(2)})_{h_2}] / d_{2,k}$$

$$d_{n,k} = (a_{n,k}^{(1)}, b_{n,k}^{(1)})_{h_n} - (a_{n,k}^{(2)}, b_{n,k}^{(2)})_{h_n}, \quad n = 1, 2$$

Заметим, что функция $\sigma(z)$ неизвестна только на линии стыка $[0, h_2]$, а при $z \in [h_2, h_1]$ из условия (8) следует $\sigma(z) \equiv 0$.

Уравнения для определения v, σ , через которые в силу соотношений (6), (12) выражается искомое решение, получаются из еще не использованных условий (7), (8)

относительно компонент $u^{(2)}, \tau^{(1)}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[t_{1,k} b_{1,k}^{(1)} - t_{2,k} \begin{cases} 0, & h_2 \leq z \leq h_1 \\ b_{2,k}^{(1)}, & 0 \leq z \leq h_2 \end{cases} \right] = -\tau_0^{(1)}, \quad 0 \leq z \leq h_1 \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[t_{1,k} a_{1,k}^{(2)} - t_{2,k} a_{2,k}^{(2)} \right] = -u_0^{(2)}, \quad 0 \leq z \leq h_2 \quad (14)$$

В соответствии с общей схемой Бубнова–Галеркина равенства (13), (14) проектируются на полные на отрезках $[0, h_n]$ системы координатных функций $\{\varphi_{n,l}\}_{l=1}^{\infty}$, $n = 1, 2$. (В качестве проекторов $\varphi_{n,l}$ можно взять полиномы Лежандра $P_l(\xi_n)$, $\xi_n = 2z/h_n - 1 \in [-1, 1]$, $n = 1, 2$.) В результате блочные элементы a_{lk} матрицы A системы (1) и компоненты $f_{i,l}$ правой части $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots\}$, $\mathbf{f}_l = \{f_{1,l}, f_{2,l}\}$ принимают вид

$$a_{lk} = \left\| \begin{array}{l} (\varphi_{1,l}, b_{1,k}^{(1)})_{h_1} - (\varphi_{2,l}, b_{2,k}^{(1)})_{h_2} \\ (\varphi_{2,l}, a_{1,k}^{(2)})_{h_2} - (\varphi_{2,l}, a_{2,k}^{(2)})_{h_2} \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{f}_l = \{-(\tau_0^{(1)}, \varphi_{1,l})_{h_1}, -(u_0^{(2)}, \varphi_{2,l})_{h_2}\}$$

Представление (12) для неизвестных $t_{n,k}$ через интегралы от ν, σ позволяет построить асимптотику $t_{n,k}$ при $k \rightarrow \infty$, так как поведение функций ν, σ в дающих основной вклад точках $z = 0, h_2, h_1$ несложно получить, исходя из результатов для вершины составного упругого клина [11]. Конкретно для рассматриваемой геометрии волноводов значения показателей особенности напряжений γ_1, γ_2 в этих точках были ранее специально просчитаны для всего диапазона возможных сочетаний упругих свойств полуполос¹.

Другим способом использования этой информации для регуляризации системы является разложение неизвестных функций $\nu(z), \sigma(z)$ по полиномам Якоби $P_m^{(\alpha, \beta)}(\xi)$ с весом, дающим требуемое поведение в этих точках:

$$\nu(z) = \sum_{m=1}^M s_m^{(1)} \Psi_m^{(1)}(z), \quad 0 \leq z \leq h_1 \quad (15)$$

$$\sigma(z) = \sum_{m=1}^M s_m^{(2)} \Psi_m^{(2)}(z), \quad 0 \leq z \leq h_2$$

$$\Psi_m^{(1)}(z) = (1 + \xi_1)^{1+\gamma_1} P_m^{(\gamma_1, 0)}(\xi_1) \quad (16)$$

$$\Psi_m^{(2)}(z) = (1 + \xi_2)^{\gamma_1} (1 - \xi_2)^{\gamma_2} P_m^{(\gamma_1, \gamma_2)}(\xi_2)$$

(Так как $\nu'(z)$ имеет разрыв при $z = h_2$, большую точность (но при более громоздких выкладках) дает разложение $\nu(z)$ отдельно на каждом из отрезков $[0, h_2], [h_2, h_1]$ с условием склейки при $z = h_2$.)

Коэффициенты разложения $\mathbf{s}_m = \{s_m^{(1)}, s_m^{(2)}\}$ определяются из системы

$$\sum_{m=1}^M b_{lm} \mathbf{s}_m = \mathbf{f}_l - \mathbf{p}_l, \quad l = 1, 2, \dots, M \quad (17)$$

$$b_{lm} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{lk} r_{km}, \quad \mathbf{p}_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_{lk} \mathbf{g}_k$$

¹ Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Об особенности решения в угловых точках составных упругих волноводов. – Деп. в ВИНТИ 19.02.91 N824-B91, 19 с.

к которой система (1) сводится подстановкой соотношения

$$t_k = \sum_{m=1}^M r_{km} s_m + g_k \quad (18)$$

$$r_{km} = \left\| \begin{array}{l} (b_{1,k}^{(1)} \Psi_m^{(1)})_{h_1} / d_{1,k} - (a_{1,k}^{(2)}, \Psi_m^{(2)})_{h_2} / d_{1,k} \\ (b_{2,k}^{(1)} \Psi_m^{(1)})_{h_2} / d_{2,k} - (a_{2,k}^{(2)}, \Psi_m^{(2)})_{h_2} / d_{2,k} \end{array} \right\|$$

$$g_k = \{[-(b_{1,k}^{(1)}, u_0^{(1)})_{h_1} + (a_{1,k}^{(2)}, \tau_0^{(2)})_{h_1}] / d_{1,k}, 0\}$$

вытекающего из равенств (12), (15).

Система (17) уже регуляризована, ее решение численно устойчиво и для достижения требуемой точности, как правило, требуется значительно меньшая размерность M , чем при использовании стабилизированной системы (2). Определенную трудность представляет суммирование рядов при вычислении элементов матрицы b_{lk} и вектора p_l , которая при необходимости преодолевается стандартными методами ускорения сходимости на основе учета асимптотик a_{lk} , r_{km} , g_k при $k \rightarrow \infty$.

Еще лучшие результаты дает гибридный метод, когда замена (18) производится в системе (1), начиная с некоторого номера $N + 1$, что приводит к гибридной системе

$$\sum_{k=1}^N a_{lk} t_k + \sum_{m=1}^M b_{lm} s_m = f_l - p_l, \quad l = 1, 2, \dots, N + M \quad (19)$$

относительно неизвестных t_1, \dots, t_N и s_1, \dots, s_M (ряды для b_{lm} , p_l здесь начинаются с $k = N + 1$). Вторая сумма играет здесь роль стабилизирующей добавки, обеспечивающей численную устойчивость при увеличении N . Тем самым гибридную схему (18), (19) можно рассматривать как другой способ регуляризации системы (1) без необходимости строить асимптотику $t_{n,k}$.

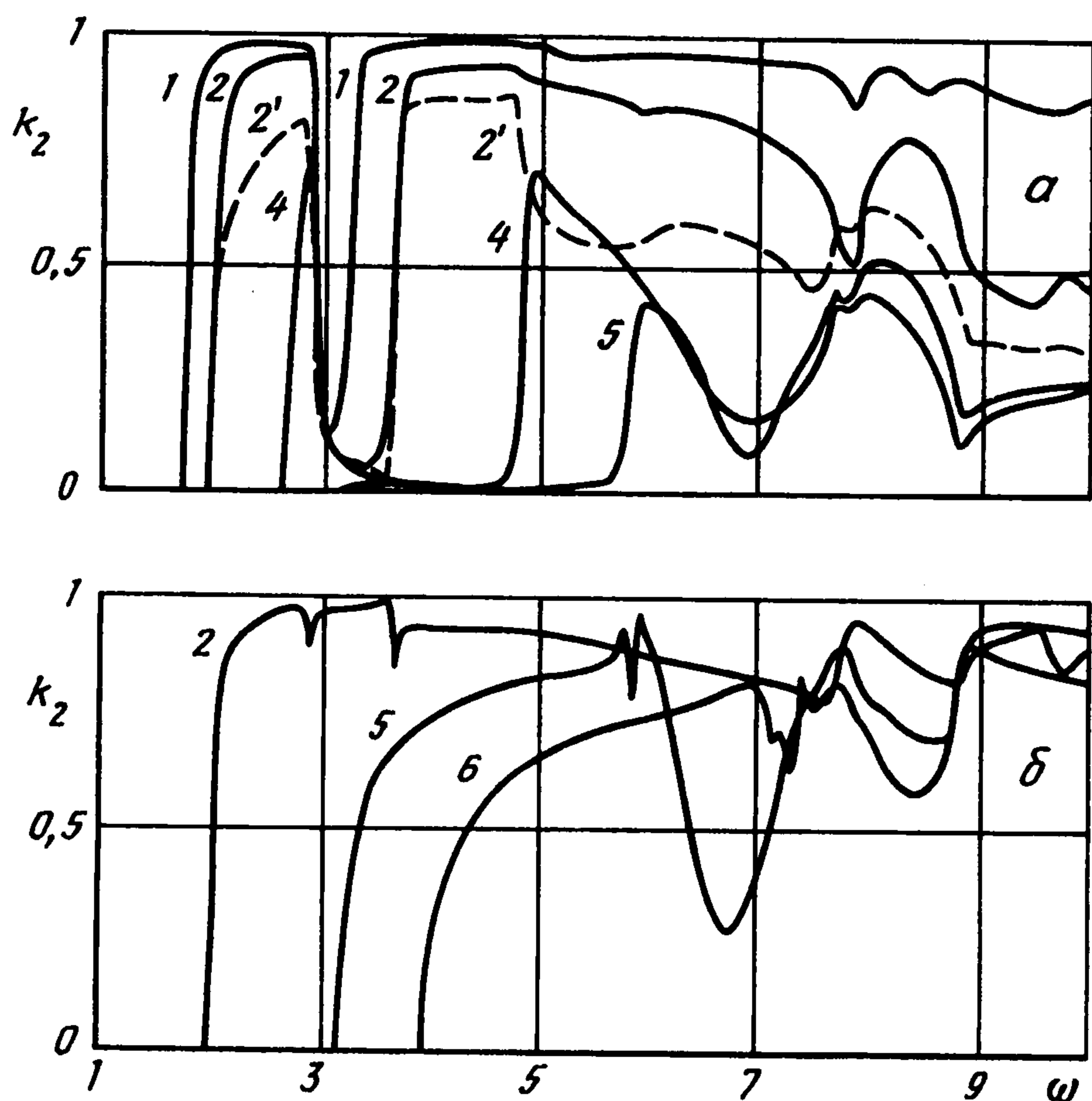
Эффективность схемы может быть еще более повышена, если не аппроксимировать полиномами осцилляцию $u(z)$, $\sigma(z)$, связанную с вкладом бегущих мод (вещественных $\zeta_{1,k}$), оставив только вклад экспоненциально убывающих по z слагаемых, соответствующих комплексным $\zeta_{1,k}$, т.е. взяв

$$u(z) = u_0^{(1)}(0, z) + u_1^{(1)}(0, z) - \sum_{j=1}^N t_{1,j} a_1^{(1)}(z)$$

$$\sigma(z) = \tau_0^{(2)}(0, z) + \tau_1^{(2)}(0, z) - \sum_{j=1}^N t_{1,j} b_1^{(2)}(z)$$

(N здесь больше или равно числу вещественных $\zeta_{1,k}$). Это приводит к более сложной, чем (18), линейной зависимости t_k от s_m , но обещает более высокую точность как для коэффициентов t_k бегущих мод, отвечающих за энергетический баланс, так и для коэффициентов интенсивности напряжений в угловых точках, выражающихся через s_m .

В качестве примера на фиг. 2 приведены результаты расчетов частотной зависимости коэффициентов прохождения энергии $k_2 = E_2/E_0$ (отношение энергии прошедших волн \bar{u}_2 к энергии исходного поля \bar{u}_0) при различной высоте ступеньки Δh однородного волновода с безразмерными параметрами $h_1 = 1$, $h_2 = 1 - \Delta h$, $\rho_n = 1$, $\mu_n = 1$, коэффициент Пуассона $\nu_n = 0,3$, $n = 1, 2$, а также для разномодульного волновода с $\mu_2 = 0,5$; $\Delta h = 0,2$ (штриховая линия 2' на фиг. 2, а). Представлен случай дифракции первой моды (4) ($k = 1$), приходящей слева из более толстой полуполосы (а) и обратный случай прохождения справа налево, т.е. из тонкой полуполосы в толстую (б). Результаты для $\Delta h = 0,1; 0,2; \dots; 0,6$ даны линиями 1–6 соответственно.



Фиг. 2

Для фиг. 2, а характерно резкое уменьшение коэффициента прохождения в частотном диапазоне $2,94 < \omega < 2,94/h_2$, которое объясняется тем, что для упругого слоя с одной фиксированной гранью первая бегущая мода появляется при значении безразмерного волнового числа $\kappa = \omega h/v_S = 1,57$ ($v_S = \sqrt{\mu/\rho}$), вторая при $\kappa = 2,94$ (с диапазоном обратной волны 2,88–2,94) и, последующие при $\kappa = 4,71; 7,85, \dots$. Появление слева второй моды при $\omega > 2,94$, в то время как справа при $\omega < 2,94/h_2$ возбуждается только одна бегущая волна, и приводит к сильному отражению сигнала в этом диапазоне (фиг. 2, а). Более сильное в целом отражение для высоких ($\Delta h > 0,5$) ступенек очевидно также связано с бóльшим числом отраженных бегущих мод, уносящих энергию влево, чем прошедших, в то время как прохождение энергии справа налево (фиг. 2, б) от высоты ступеньки зависит слабо. Однако и здесь наблюдается эффект частичного запирания ($\omega \approx 6,8, \Delta h = 0,5$), но он скорее связан со специфической структурой линий тока осредненного за период колебаний потока энергии, характеризующейся появлением вблизи линии стыка энергетических вихрей, перекрывающих значительную часть поперечного сечения волновода вплоть до полного блокирования на частоте запирания [8].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00266а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зильберглейт А.С., Нуллер Б.М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 333–335.
2. Гринченко В.Т., Городецкая Н.С. Отражение волн Лэмба от границы раздела в составном волноводе // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 5. С. 121–125.
3. Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Асимптотика неизвестных при решении методом суперпозиции плоской задачи о продольной деформации упругой полуполосы // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 7. С. 77–83.
4. Захарова С.В., Пельц С.П. Решение смешанной задачи теории упругости для полуполосы // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 5. С. 1077–1081.

5. Дьяконов М.Б., Устинов Ю.А. Сдвиговые волны в упругом полубесконечном слое с разрезами // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 3. С. 421–426.
6. Гетман И.П., Лисицкий О.Н. Об отражении изгибных волн Лэмба от границы раздела двух состыкованных полуполос // Прикл. механика. 1991. Т. 27. № 8. С. 54–59.
7. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кириллова Е.В. Динамическая контактная задача для кругового штампа, сцепленного с упругим слоем // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 780–785.
8. Glushkov E., Glushkova N. Blocking property of energy vortices in elastic waveguides // J. Acoust. Soc. Am. 102 (3). 1997. September, 1997. P. 1356–1360.
9. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
10. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kirillova E.V. Normal mode diffraction in elastic layered waveguides; resonances and energy vortices // Proc. 3rd Intern. Conf. Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. Mandelieu-La-Napoule. France, 1995 / Ed. by G. Cohen. Philadelphia: SIAM, 1995. P. 604–612.
11. Body D.B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1971. V. 38. № 2. P. 377–386.

Краснодар

Поступила в редакцию
24.IX.1996