

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. В.Г. Попов

**ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН
НА ОТСЛОИВШЕМСЯ ЖЕСТКОМ ВКЛЮЧЕНИИ В СЛУЧАЕ
ГЛАДКОГО КОНТАКТА В ОБЛАСТИ ОТСЛОЕНИЯ**

Предлагается решение задачи о дифракции гармонических упругих волн на тонком жестком полосовом отслоившемся включении в неограниченной упругой среде, в которой реализованы условия плоской деформации. Под отслоившимся включением понимается включение, одна сторона которого полностью сцеплена с упругой средой, а вторая совсем с ней не взаимодействует, или это взаимодействие частичное. Предполагается, что в области отслоения выполнены условия гладкого контакта. Метод решения основан на применении построенных ранее разрывных решений уравнений, описывающих колебания упругой среды в условиях плоской деформации. В результате задача сведена к решению системы из трех сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скачков напряжений и перемещений на включении. Приближенное решение последней позволило получить удобные при численной реализации формулы для исследования напряженного состояния вблизи включения и его перемещений под действием падающих волн.

1. Пусть в упругой среде, находящейся в состоянии плоской деформации, содержится тонкое жесткое включение, расположенное в плоскости xu на отрезке $y = 0$, $|x| \leq a$. При $y = -0$ оно полностью сцеплено с упругой средой, а при $y = +0$ отслоилось, и на этой границе выполняются условия гладкого контакта. Это определяет выполнение на включении таких граничных условий

$$\tau_{yx}(x, +0) = 0, \quad v(x, \pm 0) = \delta_1 + \gamma x, \quad u(x, -0) = \delta_2 \quad |x| \leq a \quad (1.1)$$

Кроме того, на линии расположения включения напряжения и перемещения терпят разрывы, скачки которых обозначим следующим образом:

$$\langle \sigma_y \rangle = \chi_1(x), \quad \langle \tau_{yx} \rangle = \chi_2(x), \quad \langle v \rangle = 0, \quad \langle u \rangle = \chi_4(x) \quad |x| \leq a \quad (1.2)$$

Скачки в (1.2) понимаются в соответствии с [1]. С включением взаимодействуют плоские продольные или поперечные волны, заданные соответственно потенциалами

$$\varphi_0(x, y) = \frac{A}{\kappa_1} e_1(x, y), \quad \psi_0(x, y) = \frac{B}{\kappa_2} e_2(x, y) \quad (1.3)$$

$$e_k(x, y) = \exp[i\kappa_k(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)], \quad \kappa_1^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}$$

где θ_0 – угол между направлением распространения волны и осью x , ω – частота колебаний. Множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен.

Постоянные $\delta_1, \delta_2, \gamma$ описывают поступательные и вращательные движения включения и подлежат определению. Для этого из уравнений движения включения как твердого тела получены равенства

$$m\delta_j\omega^2 = -\int \chi_j(x)dx, \quad j = 1, 2; \quad \frac{4}{3}ma^2\omega^2 y = \int x\chi_1(x)dx \quad (1.4)$$

где m – погонная масса включения, интегрирование по x (а ниже и по η) ведется по отрезку $[-a, a]$.

Кроме этого имеет место равенство

$$\int \chi_4'(x)dx = 0 \quad (1.5)$$

Для решения задачи результирующее поле перемещений и напряжений в среде представим в виде

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_0(x, y) \quad (1.6)$$

$$T_k(x, y) = [t_j^k(x, y)] = [\sigma_y^k, \tau_{yx}^k, \nu^k, u^k], \quad k = 0, 1$$

Вектор $T_1(x, y)$ определяется разрывным решением (1.2) из [1] со скачками (1.2), а компонентами вектора $T_0(x, y)$ являются напряжения и перемещения, вызванные распространяющейся в среде продольной или поперечной волной (1.3) и определяются формулами (2.11), (2.12) из [1].

Очевидно, поле перемещений и напряжений в среде однозначно определится формулой (1.6) после определения неизвестных скачков (1.2). Для этого, так же как и в [1], заменим условия (1.1) эквивалентными, которые после подстановки в них представления (1.6) принимают вид

$$t_2^1(x, +0) = -t_2^0(x, +0), \quad t_3^1(x, \pm 0) = \gamma - t_3^0(x, \pm 0) \\ t_4^1(x, -0) = -t_4^0(x, -0), \quad |x| \leq a \quad (1.7)$$

$$t_3^1(-a, \pm 0) = \delta_1 - \gamma a - t_3^0(-a, \pm 0), \quad t_4^1(-a, -0) = \delta_2 - t_4^0(-a, -0)$$

Подставим в первые три равенства (1.7) значения компонент вектора T_1 , определенных в (1.2) [1]. При этом следует учесть следующие формулы для предельных значений, вытекающих из свойств разрывных решений:

$$T_1^*(x, \pm 0) = \pm \frac{1}{2} Z(\eta) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{AZ(\eta)}{\eta - x} d\eta + \frac{1}{2\pi} \int W(\eta - x)Z(\eta)d\eta \quad (1.8)$$

где в рассматриваемом случае $Z(\eta) = [\chi_1(\eta), \chi_2(\eta), 0, \chi_4'(\eta)]^T$, A – числовая матрица, элементы которой выражаются через упругие постоянные среды, содержащей включение, а элементы функциональной матрицы $W(z) = \{W_{jk}\}$ ($j, k = 1, 2, 3, 4$) определяются по формулам

$$W_{jj}(z) = W_{j5-j}(z) = 0 \quad (1.9)$$

$$W_{jk}(z) = \sum_m A_{jk}^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-1} + \ln|z| \sum_m B_{jk}^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-1}, \quad j, k = 1, 2, 3, 4$$

Здесь и ниже суммирование по m ведется от 1 до ∞ . При получении (1.9) использовались формулы (1.3)–(1.5) из [1], а так же известные представления для функций Ганкеля в виде степенных рядов [2].

В результате относительно неизвестных скачков получена система трех сингулярных интегральных уравнений, матричная запись которой имеет вид (интегрирование

по τ ведется по промежутку $[-1, 1]$)

$$B\Phi + Q\Gamma\Phi + R\Phi = F \quad (1.10)$$

$$\Gamma\Phi = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad R\Phi = \frac{1}{2\pi} \int R(\tau - t)\Phi(\tau) d\tau$$

$$\Phi(\tau) = [\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau)]^T, \quad F(t) = [f_1(t), f_2(t), f_3(t)]^T$$

$$\varphi_1(\tau) = \mu^{-1}\chi_1(a\tau), \quad \varphi_2(\tau) = \mu^{-1}\chi_2(a\tau), \quad \varphi_3(\tau) = \chi_4'(a\tau)$$

$$f_1(t) = -\mu^{-1}\tau_{yx}^0(at, +0), \quad f_2(t) = \gamma - \nu_x^0(at, 0), \quad f_3(t) = -u_x^0(at, 0)$$

Отличные от нуля элементы матриц третьего порядка B, Q, R таковы:

$$b_{12} = 1/2, \quad b_{31} = -1/2, \quad q_{11} = q_{23} = -\xi^2, \quad q_{13} = 2(1 - \xi^2)$$

$$q_{21} = q_{23} = -(1 + \xi^2)/2, \quad \xi = c_1/c_2$$

$$R_{11}(\tau - t) = aW_{21}[a(\tau - t)], \quad R_{13}(\tau - t) = a\mu W_{24}[a(\tau - t)]$$

$$R_{21}(\tau - t) = aW_{13}[a(\tau - t)], \quad R_{23}(\tau - t) = aW_{24}[a(\tau - t)]$$

$$R_{32}(\tau - t) = aW_{42}[a(\tau - t)]$$

Аналогично из оставшихся равенств (1.7) находим

$$\frac{1}{2\pi} \int \varphi_1(\tau)[-q_{32} \ln(\tau + 1) + \Pi_{11}(\tau + 1)] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int \varphi_2(\tau)[-q_{23} \ln(\tau + 1) + \Pi_{12}(\tau + 1)] d\tau = \delta_{01} - \gamma + f_{01} \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int \varphi_2(\tau)[-q_{13} \ln(\tau + 1) + \Pi_{22}(\tau + 1)] d\tau = \delta_{02} + f_{02}$$

$$\Pi_{jk}(\tau + 1) = \sum_m p_{jk}^m \left(\frac{\tau + 1}{2}\right)^{2m} + \ln \frac{\tau + 1}{2} \sum_m h_{jk}^m \left(\frac{\tau + 1}{2}\right)^{2m}$$

2. Для решения системы (1.10) совместно с (1.11) умножим обе части (1.10) на матрицу Q^{-1} (последняя существует, так как $\det Q \neq 0$). В результате получим

$$C\Phi + E\Gamma\Phi + Q^{-1}R\Phi = Q^{-1}F \quad (2.1)$$

$C = Q^{-1}B$, E – единичная матрица третьего порядка. После этого, так же как это было сделано в [3] при решении аналогичной задачи в статической постановке, введем в рассмотрение неизвестные функции $\psi_j(\tau)$ ($j = 1, 2, 3$), определенные равенствами

$$\Psi(\tau) = P^{-1}\Phi(\tau), \quad \Phi(\tau) = P\Psi(\tau) \quad (2.2)$$

$$\Psi(\tau) = [\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau)]^T$$

Матрица P построена таким образом, что $P^{-1}CP = D$, а D – диагональная матрица третьего порядка. Так как собственные числа матрицы C различны, то такая матрица существует и легко может быть построена [4]. При этом диагональные элементы матрицы D таковы:

$$d_{11} = \lambda_1 = 0, \quad d_{22} = \lambda_2 = -1/2, \quad d_{33} = \lambda_3 = 1/2$$

После подстановки (2.2) в (2.1) и умножения полученного равенства на P^{-1} приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений (суммирование

по i ведется от 1 до 3):

$$\lambda_k \Psi_k(t) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\Psi_k(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{2\pi} \sum_i \int L_{ki}(\tau-t) \Psi_i(\tau) d\tau = c_k \gamma + g_k(t), t \in [-1, 1], k = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

$$L = \{L_{kj}\} = P^{-1} Q^{-1} R P, \quad G = \{g_k\} = P Q^{-1} F$$

$$c_1 = -4q_{21}^{-1}, \quad c_2 = 2q_{11}q_{21}^{-1}, \quad c_3 = -2q_{11}$$

Систему (2.3) необходимо рассматривать совместно с равенствами (1.11), (1.4), (1.5), которые после введения новых неизвестных (2.2) содержат интегралы с логарифмической особенностью

$$I_k = \int \Psi_k(\tau) \ln(\tau+1) d\tau, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Решение системы (2.3) в классе функций, имеющих интегрируемые особенности [5, 6], разыскивается в виде

$$\Psi_k(\tau) = \omega_k(\tau) w_k(\tau), \quad \omega_k(\tau) = (1-\tau)^{\alpha_k} (1+\tau)^{\beta_k} \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

где α_k – корень уравнения

$$\lambda_k + \text{ctg} \alpha_k / 2 = 0, \quad -1 < \alpha_k < 0, \quad \alpha_k + \beta_k = -1$$

В случае системы (2.3) находим

$$\alpha_1 = \beta_1 = -1/2, \quad \alpha_2 = \beta_3 = -1/4, \quad \alpha_3 = \beta_2 = -3/4$$

Функции $w_k(t)$ проаппроксимируем многочленами наилучшего приближения

$$w_k(t) = G_{nk}(t) = \sum_m w_{km} \frac{P_n^{\alpha_k, \beta_k}(t)}{(t - \tau_{km}) [P_n^{\alpha_k, \beta_k}(\tau_{km})]'}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

$w_{km} = w_k(\tau_{km})$, $P_n^{\alpha_k, \beta_k}(t)$ – многочлены Якоби n -й степени, ортогональные с весом $\omega_k(t)$, τ_{km} – корни этих многочленов.

Если $\Psi_k(\tau)$ представлены формулами (2.5), (2.6), то для сингулярных интегральных операторов имеют место квадратурные формулы [7]

$$\lambda_k \Psi_k(t_{kj}) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\Psi_k(\tau)}{\tau-t_{kj}} d\tau = \sum_m b_{km} \frac{w_{km}}{\tau_{km} - t_{kj}} \quad (2.7)$$

$$b_{km} = -\frac{\pi P_n^{-\alpha_k, -\beta_k}(\tau_{km})}{2 \sin \pi \alpha_k [P_n^{\alpha_k, \beta_k}(\tau_{km})]'}, \quad k = 1, 2, 3$$

Для интегралов (2.4) приближенные значения могут быть найдены, если $\Psi_k(\tau)$ заменить по формулам (2.5), (2.6). В результате находим

$$I_k = \sum_m \sigma_{km}^n w_{km}, \quad \sigma_{km}^n = \int \frac{\ln(\tau+1) P_n^{\alpha_k, \beta_k}(\tau) \omega_k(\tau)}{(\tau - \tau_{km}) [P_n^{\alpha_k, \beta_k}(\tau_{km})]'}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

Интегралы σ_{km}^n могут быть вычислены методом, специально разработанным для сингулярных интегралов, содержащих ортогональные многочлены, и изложенным в [3].

Если теперь воспользоваться соотношениями (2.7), (2.8), а регулярные интегралы заменить суммами при помощи квадратурных формул Гаусса–Якоби с соответствующим весом [8] $\omega_k(\tau)$ ($k = 1, 2, 3$), то получим следующую систему линейных

алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
& \sum_m b_{km} \frac{w_{km}}{\tau_{km} - t_{kj}} + \frac{1}{2\pi} \sum_i \sum_m b_{im} w_{im} L_{ki}(\tau_{im} - t_{kj}) = \\
& = c_k \gamma + g_k(t_{kj}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \quad k = 1, 2, 3 \\
& \frac{\sigma_{11}}{8\pi} \sum_m \sigma_{1m}^n w_{1m} + \frac{1}{2\pi} \sum_i \sum_m b_{im} w_{im} C_{1i}(1 + \tau_{im}) = \delta_{01} - \gamma + f_{01} - \\
& - \frac{\sigma_{11}}{8\pi} \sum_m \sigma_{2m}^n w_{2m} - \frac{1}{8\pi} \sum_m \sigma_{3m}^n w_{3m} + \\
& + \frac{1}{2\pi} \sum_i \sum_m b_{im} w_{im} C_{2i}(1 + \tau_{im}) = \delta_{02} + f_{02} \tag{2.9} \\
& - \sum_m b_{1m} w_{1m} + \beta_{21} \sum_m b_{2m} w_{2m} - \frac{\beta_{21}}{\sigma_{11}} \sum_m b_{3m} w_{3m} = 4\delta_{01} m_0 k_0^2 \\
& - \sum_m \tau_{1m} b_{1m} w_{1m} + \beta_{21} \sum_m \tau_{2m} b_{2m} w_{2m} - \frac{\beta_{21}}{\sigma_{11}} \sum_m \tau_{3m} b_{3m} w_{3m} = \frac{16}{3} \gamma m_0 \kappa_0^2 \\
& \sum_m b_{2m} w_{2m} + \sigma_{11}^{-1} \sum_m b_{3m} w_{3m} = 4\delta_{02} m_0 \kappa_0^2 - \sigma_{22} \sum_m b_{2m} w_{2m} + \sum_m b_{3m} w_{3m} = 0
\end{aligned}$$

Решив систему (2.9), найдем w_{km} ($k = 1, 2, 3; m = 1, 2, \dots, n$) и $\delta_{01}, \delta_{02}, \gamma$, что позволяет численно исследовать перемещения и напряжения в среде, содержащей включение.

В качестве величины, характеризующей концентрацию напряжений вблизи концов включения, так же как и в [9, 10], принимаются коэффициенты при особенностях скачков напряжений на включении, которые вычисляются по формулам

$$K_j^\pm = \lim_{\tau \rightarrow \pm 1} (1 \pm \tau)^{3/4} \frac{\chi_j(a\tau)}{\mu} = \lim_{\tau \rightarrow \pm 1} (1 \pm \tau)^{3/4} \varphi_j(\tau); \quad j = 1, 2$$

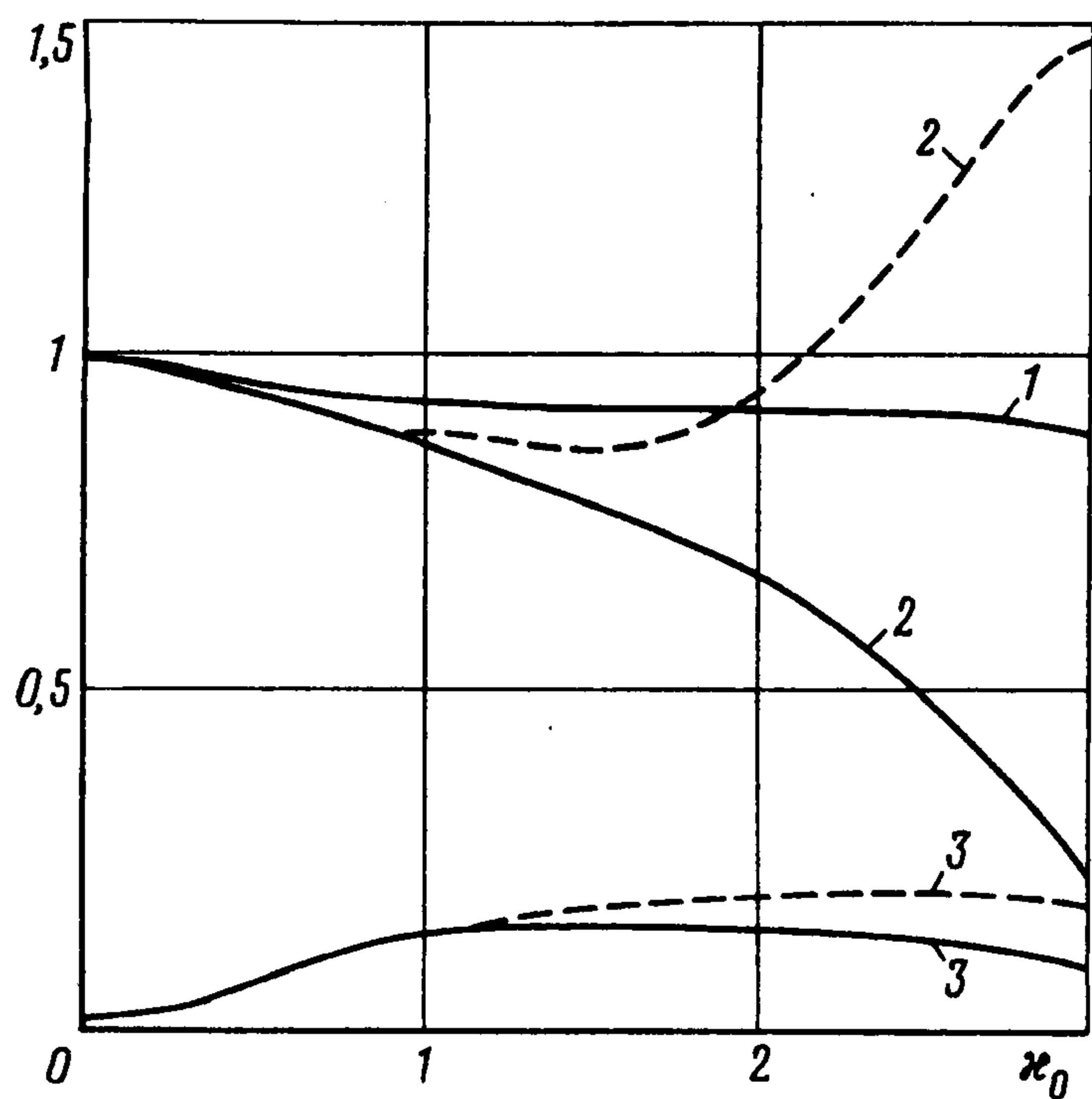
После подстановки в последнее равенство (2.5), (2.6) и выполнения предельного перехода находим

$$K_1^\pm = 2^{-5/4} \beta_{21} S^\pm, \quad K_2^\pm = \pm 2^{-5/4} S^\pm; \quad S^+ = G_{n2}(1), \quad S^- = G_{n3}(-1) \tag{2.10}$$

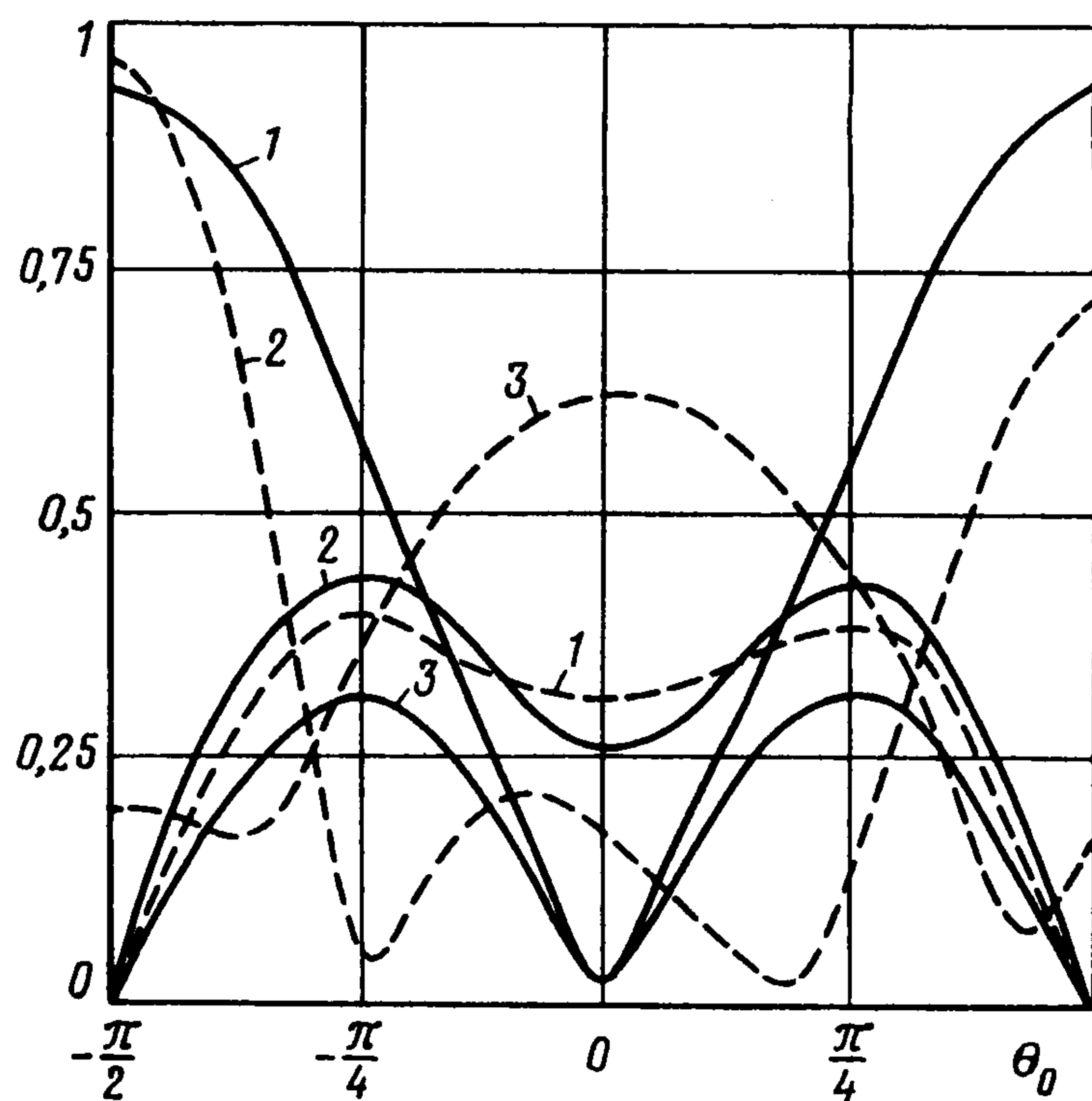
Видно, что напряженное состояние в упругой среде вблизи концов включения определяется величинами S^\pm .

Результаты численного анализа перемещений включения приводятся на фиг. 1, 2. На фиг. 1 показаны зависимости абсолютных значений безразмерных амплитуд колебаний включений $|\delta_{01}|, |\delta_{02}|, |\gamma|$ от безразмерной частоты $\kappa_0 = \kappa_2 a$. Кривая 1 показывает изменение $|\delta_{01}|$ в случае взаимодействия с включением продольной волны. Предполагается, что волна распространяется под углом $\theta_0 = \pi/2$ (волна падает на сцепленную сторону включения) и под углом $\theta_0 = 3\pi/2$ (волна падает на отслоившуюся сторону включения). В обоих случаях значения $|\delta_{01}|$ одни и те же, а $|\delta_{02}| = |\gamma| = 0$. Кривые 2 отражают изменение $|\delta_{02}|$ при $\theta_0 = \pi/2$ (сплошная линия) и $\theta_0 = 3\pi/2$ (штриховая линия). Изменение $|\gamma|$ при падении на включение поперечной волны под углом $\theta_0 = \pi/2$ и $\theta_0 = 3\pi/2$ представлено кривыми 3, при этом $|\delta_{01}| = 0$.

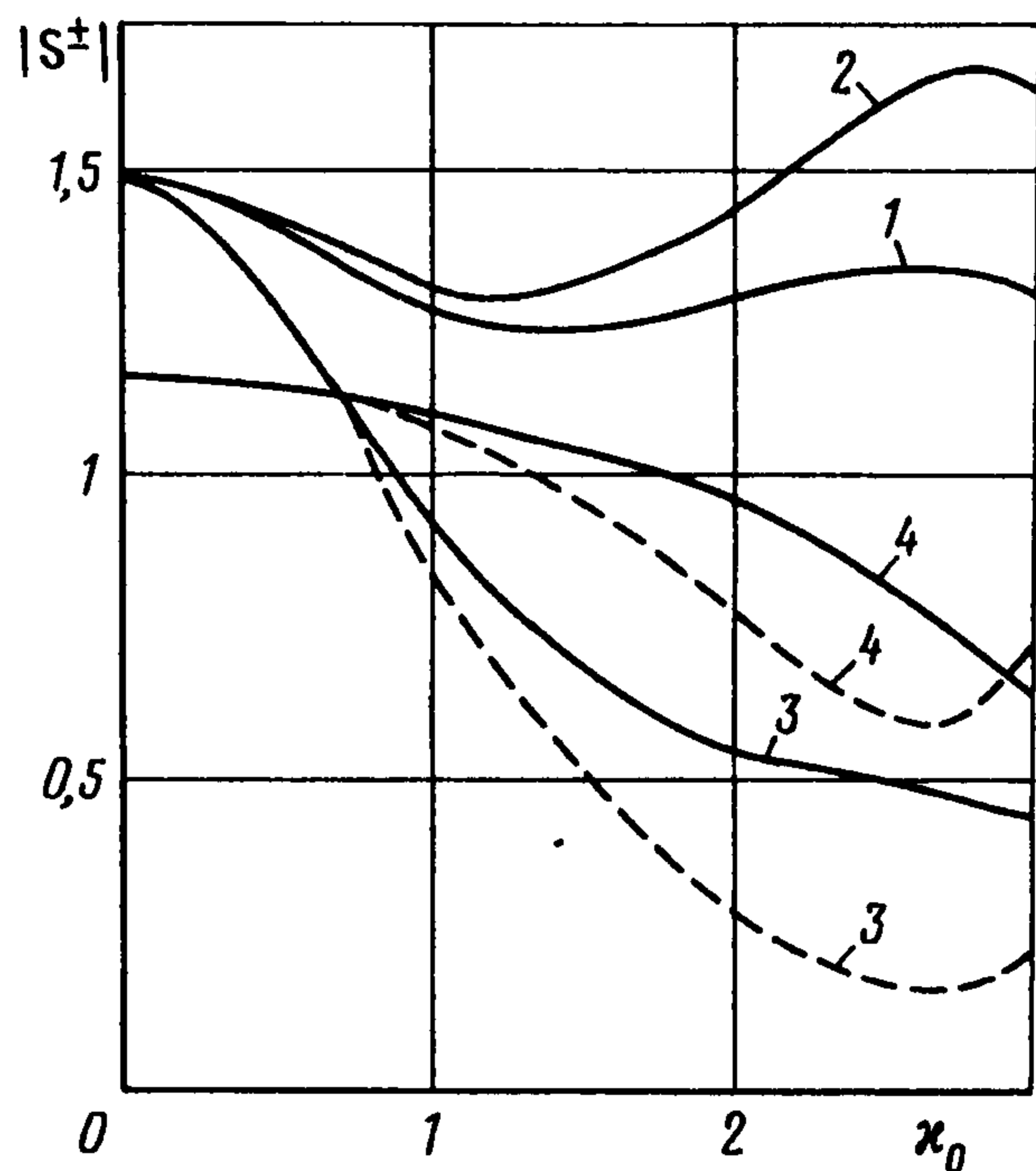
Результаты исследования зависимости амплитуды колебаний включения от угла падения волны при фиксированной частоте $\kappa_0 = 2$ приведены на фиг. 2, где сплошные кривые соответствуют падению на включение продольной волны, а штриховые – поперечной. Кривые 1–3 показывают изменение $|\delta_{01}|, |\delta_{02}|, |\gamma|$. В случае распространения продольных волн $|\delta_{01}|$ принимает максимальные значения при $\theta_0 = \pm \pi/2$, а $|\delta_{02}|$ и $|\gamma|$ – при $\theta_0 = \pm \pi/4$. Если распространяются поперечные волны, то $|\delta_{01}|$ достигает максимума при $\theta_0 = \pm \pi/4$, $|\delta_{02}|$ – при $\theta_0 = \pm \pi/2$, а $|\gamma|$ – при $\theta_0 = 0$.



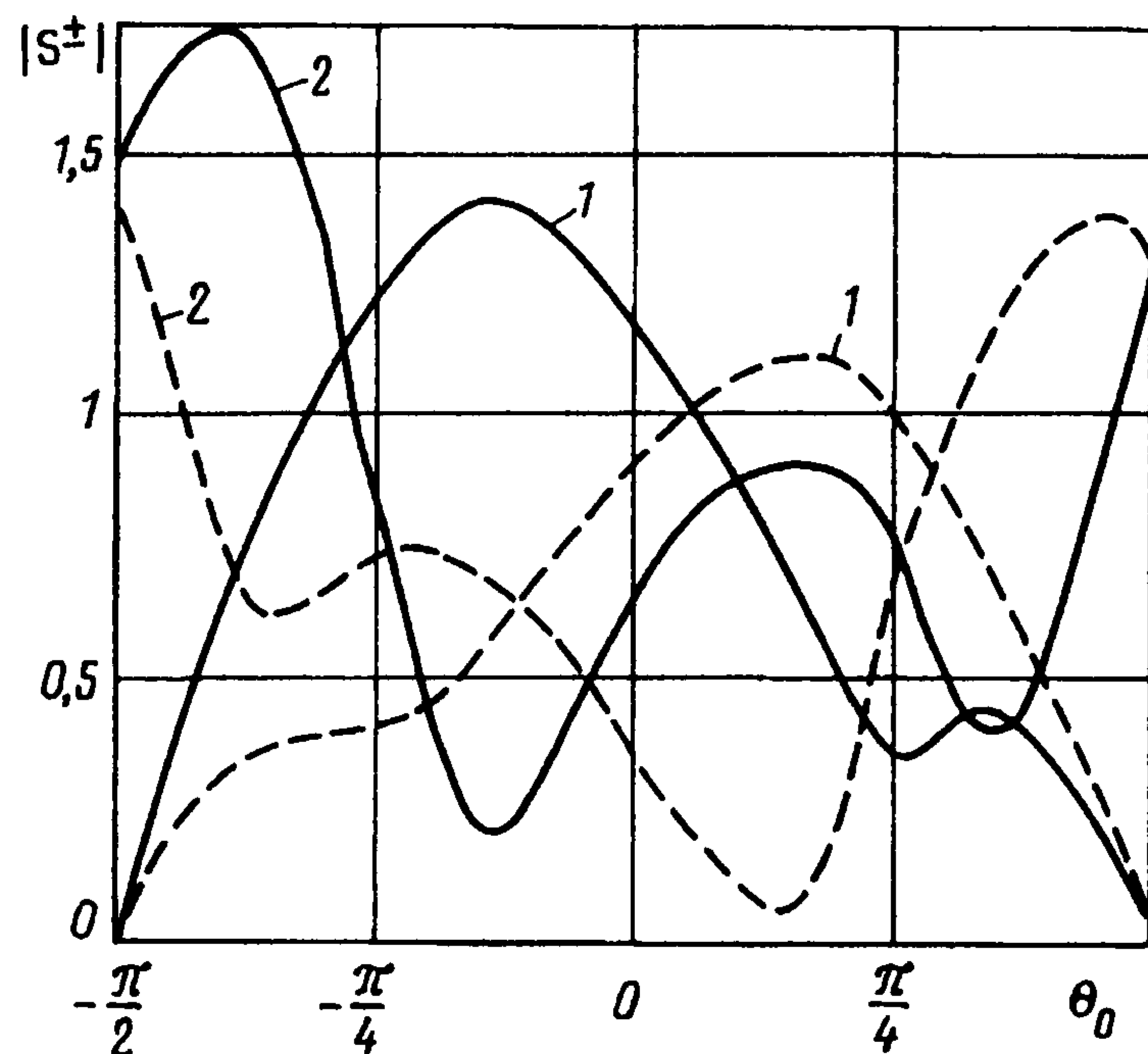
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 изображены зависимости абсолютных значений коэффициентов при особенностях напряжений $|S^\pm|$ от частоты. Кривые 1, 2 отражают эту зависимость при дифракции на включении поперечной волны, распространяющейся под углами $\theta_0 = \pi/2$ и $\theta_0 = 3\pi/2$ соответственно. В этом случае $S^+ = S^-$. Представляет интерес наличие максимума при $\kappa_0 > 2$. При дифракции продольных волн, падающих под теми же углами, значения S^+ и S^- близки к нулю. Кривые 3 иллюстрируют изменение $|S^\pm|$ с ростом частоты для поперечных, а кривые 4 – для продольных волн, падающих под углом $\theta_0 = 0$. Сплошные кривые показывают изменение $|S^-|$, штриховые – $|S^+|$.

На фиг. 4 показаны зависимости $|S^-|$ (сплошные кривые) и $|S^+|$ (штриховые кривые) от угла падения θ_0 для продольных (кривые 1) и поперечных (кривые 2) волн при фиксированной частоте $\kappa_0 = 2$. При дифракции продольных волн максимальные значения $|S^\pm|$ достигаются при $\theta_0 = \pm 3\pi/20$, а минимальные – при $\theta_0 = \pm \pi/2$. Если с включением взаимодействует поперечная волна, то наибольшие значения $|S^\pm|$ наблюдаются при $\theta_0 = \pm 2\pi/5$, а наименьшие – при $\theta_0 = \pm 3\pi/20$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов В.Г., Улановский А.Э. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 99–109.
2. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. М.: Наука, 1974. 295 с.
3. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 548 с.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
7. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
8. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
9. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
10. Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Отслоившееся включение в упругом полупространстве // Изв. АН СССР МТТ. 1985. № 6. С. 71–78.

Одесса

Поступила в редакцию
23.XII.1996