УДК 539.3

© 1998 г. И.И. Аргатов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ПОЛОСТЕЙ В ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Получены представления компонент матриц упругой поляризации и упругой емкости Винера через коэффициенты комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили и коэффициенты комфорного отображения, определяющего геометрию бесконечного упругого тела. Для использования в прикладных задачах предложена новая интегральная характеристика жесткого включения – матрица Робена, компоненты которой безразмерны. Даны примеры вычислений, исправляющие формулы, опубликованные ранее другим автором.

1. Матрицы поляризации и емкости Винера. Асимптотический анализ задач о взаимодействии трещин и включений в упругом теле приводит к необходимости изучать интегральные характеристики данных дефектов, такие как матрицы упругой поляризации и емкости Винера. Последние являются обобщениями соответствующих классических объектов из теории гармонических функций [1][1]. В двумерных задачах методы Колосова – Мусхелишвили позволяют эффективно вычислять эти величины. Тем не менее опубликован ряд неверных результатов ([2, 3] и др.), исправить которые и призвана настоящая работа.

Пусть G – область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная простым замкнутым кусочно-гладким контуром Γ. Обозначим через $\bar{G}$ замкнутую область $G \cup \Gamma$ и положим $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}$.

Рассмотрим уравнения первой основной задачи двумерной теории упругости

$$\mu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u};\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2, \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2)^t$$

$$\sigma_{kl} = \lambda\delta_{kl}(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \mu(\partial_l u_k + \partial_k u_l), \quad \partial_k = \partial/\partial x_k$$

Здесь λ, μ – постоянные Ламе; $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^t$ – вектор-столбец смещений, t – знак транспонирования; $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ – вектор напряжений на площадке с единичной нормалью $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^t$ к Γ (внешней по отношению к Ω); σ_{kl} – компоненты тензора напряжений, δ_{kl} – символ Кронекера; $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^t$ – заданный вектор внешней нагрузки.

Для получения корректной краевой задачи к соотношениям (1.1), (1.2) необходимо добавить условие, характеризующее поведение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ при $|\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \to \infty$.

Известно, что единственное (с точностью до жесткого смещения) решение задачи (1.1), (1.2), компоненты которого имеют не более чем логарифмический рост на

[1] См. также *Бабич В.М., Зорин И.С., Иванов М.А., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Интегральные характеристики в задачах теории упругости: Препринт № Р-6-89. Л.: Изд-во ЛОМИ, 1989. 61 с.

бесконечности, обладает асимптотическим представлением

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -T(\mathbf{x})\mathbf{F} - \frac{M}{2}\left\{\frac{\partial \mathbf{T}^{(2)}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{T}^{(1)}}{\partial x_2}(\mathbf{x})\right\} + \sum_{j=1}^{3} c_j[\mathbf{V}^{(j)}(\nabla_x)T(\mathbf{x})]' + O(|\mathbf{x}|^{-2}), \quad |\mathbf{x}| \mapsto \infty$$

$$\nabla_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2), \quad \varkappa = (\lambda + 3\mu)(\lambda + \mu)^{-1} \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{F} = (F_1, F_2)'$ и M – главный вектор и главный момент (относительно начала координат) нагрузки $\mathbf{p}$; ∇_x – оператор Гамильтона; вектор-строки $\mathbf{V}^{(j)}(\mathbf{x})$ таковы: $\mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{x}) = (x_1, 0)$, $\mathbf{V}^{(2)}(\mathbf{x}) = (0, x_2)$, $\mathbf{V}^{(3)}(\mathbf{x}) = (x_2, x_1)$; $\mathbf{T}^{(k)}$ – столбцы матрицы

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}\begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{Vmatrix}, \quad \begin{aligned} t_{kk} &= -2\varkappa \ln|\mathbf{x}| + 2x_k^2|\mathbf{x}|^{-2} \\ t_{12} &= t_{21} = 2x_1x_2|\mathbf{x}|^{-2} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Матрица (1.4) определяет так называемый [4] тензор влияния в неограниченной упругой плоской среде. При этом $\mathbf{T}^{(k)}$ – вектор смещений точек упругой полуплоскости, нагруженной единичной сосредоточенной силой, приложенной в начале координат и направленной вдоль оси Ox_k ($k = 1, 2$). Векторы $\mathbf{V}^{(j)}(\mathbf{x})$($j = 1, 2, 3$) вместе с поворотом $\mathbf{V}^{(4)}(\mathbf{x}) = (-x_2, x_1)$ образуют базис в пространстве однородных векторных полиномов первой степени. Заметим, что выражение, стоящее в фигурных скобках справа в (1.3), можно записать как $[\mathbf{V}^{(4)}(\nabla_x)\ T(\mathbf{x})]'$. По предложенному ранее методу [5] постоянные c_j выражаются формулой

$$c_j = \int_\Gamma \mathbf{U}^{(j)}(\mathbf{x})'\mathbf{p}(\mathbf{x})ds_x \tag{1.5}$$

где $\mathbf{U}^{(j)}$ – специальные решения однородной задачи (1.1), (1.2), характеризуемые на бесконечности асимптотикой

$$\mathbf{U}^{(j)}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^{(j)}(\mathbf{x})' + \sum_{m=1}^{3} P_{jm}[\mathbf{V}^{(m)}(\nabla_x)T(\mathbf{x})]' + O(|\mathbf{x}|^{-2}), \quad |\mathbf{x}| \mapsto \infty \tag{1.6}$$

Симметрическая матрица $\| P_{jm} \|_{j,m=1}^{3}$ называется [6] матрицей упругой поляризации. Формула (1.5) позволяет вывести для коэффициентов P_{jm} интегральные представления. Это оправдывает использованный в заголовке статьи термин "интегральные".

При исследовании поведения на бесконечности решений второй основной задачи двумерной теории упругости, в которую входят уравнение (1.1) и краевое условие

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \tag{1.7}$$

где $\mathbf{g} = (g_1, g_2)'$ – заданный вектор смещений, используются специальные решения $\mathbf{S}^{(1)}$ и $\mathbf{S}^{(2)}$ однородной задачи (1.1), (1.7), определяемые на бесконечности асимптотикой

$$\mathbf{S}^{(k)}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}^{(k)}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^{(k)} + O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \mapsto \infty \tag{1.8}$$

Симметрическая матрица $\| D_l^{(k)} \|_{l,k=1}^{2}$ со столбцами $\mathbf{D}^{(1)}$ и $\mathbf{D}^{(2)}$ называется [7] матрицей упругой емкости Винера.

Были указаны [6, 7] свойства описанных объектов, а также примеры их использования.

2. Выражение компонент матрицы поляризации и емкости Винера через коэффициенты комплексных потенциалов. Введем комплексную переменную $z = x_1 + ix_2$ и напомним формулу Колосова для перемещений

$$2\mu(u_1 + iu_2)(z) = \varkappa\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} \tag{2.1}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по z, чертой сверху – операция комплексного сопряжения. В предположении, что компоненты тензора напряжений ограничены во всей области Ω, для комплексных потенциалов при достаточно больших $|z|$ справедливы разложения ([8], § 36)

$$\varphi_1(z) = -f \ln z + a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \ldots, \quad \psi_1(z) = \varkappa \bar{f} \ln z + b_1 z + b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \ldots \tag{2.2}$$

$$f = \frac{F_1 + iF_2}{2\pi(1+\varkappa)}$$

В задаче вычисления компонент матрицы поляризации (см. (1.6)) следует положить $F_1 = F_2 = 0$ и, кроме того, $\varkappa a_0 - \bar{b}_0 = 0$. Соответственно подстановка (2.2) в (2.1) дает

$$2\mu(U_1^{(j)} + iU_2^{(j)})(z) = (\varkappa a_1^{(j)} - \bar{a}_1^{(j)})z - \bar{b}_1^{(j)} \bar{z} + \frac{\varkappa a_{-1}^{(j)} \bar{z} - \bar{b}_{-1}^{(j)} z}{|z|^2} + \frac{\bar{a}_{-1}^{(j)} z^3}{|z|^4} + \ldots \tag{2.3}$$

Сопоставим (1.6) и (2.3). Слагаемое $\mathbf{V}^{(j)}(\mathbf{x})^t$ определяет коэффициенты a_1^j и $b_1^{(j)}$:

$$a_1^{(j)} = \frac{1}{2}(\lambda + \mu), \quad b_1^{(j)} = (-1)^j \mu, \quad j = 1,2; \quad a_1^{(3)} = 0, \quad b_1^{(3)} = i2\mu \tag{2.4}$$

Сравнивая члены порядка $|z|^{-1}$, имеем

$$P_{jk} = \frac{\pi(\lambda + 2\mu)}{\mu} b_{-1}^{(j)} + (-1)^k \frac{2\pi(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \operatorname{Re} a_{-1}^{(j)}, \quad k = 1,2 \tag{2.5}$$

$$P_{j3} = -\frac{2\pi(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \operatorname{Im} a_{-1}^{(j)}, \quad j = 1,2,3$$

Отметим, что коэффициент $b_{-1}^{(j)}$ необходимо вещественный, так как его мнимая часть с точностью до множителя (см., например, [8], § 56а, разд. 5) равна моменту нагрузки $\mathbf{p}^{(j)}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{V}^{(j)}(\mathbf{x})^t)$, которая статически самоуравновешена.

В задаче вычисления компонент матрицы винеровской емкости (см. (1.8)) в формулах (2.2) надо принять $a_1 = b_1 = 0$. После этого подстановка (2.2) в (2.1) приводит к соотношению

$$2\mu(S_1^{(k)} + iS_2^{(k)})(z) = -\frac{\varkappa(F_1^{(k)} + iF_2^{(k)})}{\pi(1+\varkappa)} \ln|z| + \frac{F_1^{(k)} - iF_2^{(k)}}{2\pi(1+\varkappa)} \frac{z^2}{|z|^2} + \varkappa a_0^{(k)} - \bar{b}_0^{(k)} + \ldots;$$

$$F_l^{(k)} = \delta_{lk}, \quad l = 1,2 \tag{2.6}$$

Выделив справа в (2.6) сумму $T_1^{(k)} + iT_2^{(k)}$ (см. (1.4)), сравним с (1.8). В результате получим

$$2\mu(D_1^{(k)} + iD_2^{(k)}) = -\frac{\delta_{1k} + i\delta_{2k}}{2\pi(1+\varkappa)} + \varkappa a_0^{(k)} - \bar{b}_0^{(k)}, \quad k = 1,2 \tag{2.7}$$

Заметим, что одну из комплексных постоянных $a_0^{(k)}$, $b_0^{(k)}$ можно положить равной нулю, тем самым привести в равенство количества неизвестных в обеих частях формулы (2.7).

3. Применение конформного преобразования. Пусть область Ω является образом внешности $|\zeta| > 1$ единичного круга при конформном отображении

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + c_1\zeta^{-1} + c_2\zeta^{-2} + \ldots \tag{3.1}$$

Подставляя в (2.2) вместо z выражение из правой части (3.1), получаем

$$\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)] = -f \ln \zeta + A_1\zeta + A_0 + A_{-1}\zeta^{-1}+\dots$$
$$\psi(\zeta) = \psi_1[\omega(\zeta)] = \varkappa \bar{f} \ln \zeta + B_1\zeta + B_0 + B_{-1}\zeta^{-1}+\dots \tag{3.2}$$

$$A_1 = ca_1, \quad B_1 = cb_1 \tag{3.3}$$

При этом возникают следующие зависимости между коэффициентами потенциалов $\varphi(\zeta)$ и $\varphi_1(z)$, $\psi(\zeta)$ и $\psi_1(z)$:

$$a_0 = f \ln c + A_0, \quad b_0 = -\varkappa \bar{f} \ln c + B_0; \quad a_{-1} = cA_{-1} - c_1A_1, \quad b_{-1} = cB_{-1} - c_1B_1 \tag{3.4}$$

Таким образом, для компонент матрицы поляризации вместо (2.5) имеем

$$P_{jk} = \frac{\pi(\lambda+2\mu)}{\mu}(cB_{-1}^{(j)} - c_1B_1^{(j)}) + (-1)^k \frac{2\pi(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\operatorname{Re}(cA_{-1}^{(j)} - c_1A_1^{(j)}), \quad k = 1,2 \tag{3.5}$$

$$P_{j3} = -\frac{2\pi(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\operatorname{Im}(cA_{-1}^{(j)} - c_1A_1^{(j)}), \quad j = 1,2,3$$

Постоянные $A_1^{(j)}$, $B_1^{(j)}$ согласно (2.4), (3.3) принимают значения

$$A_1^{(j)} = \frac{1}{2}(\lambda+\mu)c, \quad B_1^{(j)} = (-1)^j \mu c, \quad j = 1,2; \quad A_1^{(3)} = 0, \quad B_1^{(3)} = i2\mu c \tag{3.6}$$

Соответственно для компонент матрицы винеровской емкости выводим формулу, обобщающую (2.7),

$$2\mu(D_1^{(k)} + iD_2^{(k)}) = -\frac{\delta_{1k} + i\delta_{2k}}{2\pi(1+\varkappa)}(1 - 2\varkappa \ln|c|) + \varkappa A_0^{(k)} - \overline{B}_0^{(k)}, \quad k = 1,2 \tag{3.7}$$

Пусть теперь Ω – образ внутренности $|\zeta| < 1$ единичного круга при конформном отображении, соответствующем замене в правой части формулы (3.1) ζ на ζ^{-1}. Аналогично предыдущему выражаем компоненты матрицы поляризации и емкости Винера через коэффициенты потенциалов и конформного отображения. Например, для компонент матрицы упругой поляризации справедливы представления, отличающиеся от (3.5) заменой $A_{-1}^{(j)}, A_1^{(j)}$ и $B_{-1}^{(j)}, B_1^{(j)}$ соответственно на $\alpha_1^{(j)}, \alpha_{-1}^{(j)}$ и $\beta_1^{(j)}, \beta_{-1}^{(j)}$, где $\alpha_1^{(j)}$ и $\beta_1^{(j)}$ – коэффициенты при ζ^1 в разложениях потенциалов $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, т.е.

$$\alpha_{-1}^{(j)} = \frac{1}{2}(\lambda+\mu)c, \quad \beta_{-1}^{(j)} = (-1)^j \mu c, \quad j = 1,2; \quad \alpha_{-1}^{(3)} = 0, \quad \beta_{-1}^{(3)} = i2\mu c$$

Эти формулы позволяют использовать готовые результаты, полученные ранее ([10] и др.).

4. Примеры. Пусть область Ω, не содержащая начала координат, есть образ внешности единичного круга при конформном отображении

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + c_1\zeta^{-1} + c_2\zeta^{-2} \tag{4.1}$$

В задаче построения матрицы упругой емкости Винера потенциалы (3.2) запишем так:

$$\varphi^{(k)}(\zeta) = -\frac{\delta_{1k} + i\,\delta_{2k}}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta + \varphi_0^{(k)}(\zeta), \quad \psi^{(k)}(\zeta) = \frac{\varkappa(\delta_{1k} - i\,\delta_{2k})}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta + \psi_0^{(k)}(\zeta) \tag{4.2}$$

где $\varphi_0^{(k)}$ и $\psi_0^{(k)}$ – голоморфные функции вне единичного круга, включая бесконечно удаленную точку, т.е.

$$\varphi_0^{(k)}(\zeta) = A_0^{(k)} + A_{-1}^{(k)}\zeta^{-1} + \dots, \quad \psi_0^{(k)}(\zeta) = B_0^{(k)} + B_{-1}^{(k)}\zeta^{-1} + \dots, \quad k = 1,2 \tag{4.3}$$

Воспользовавшись тем, что одну из постоянных $A_0^{(k)}, B_0^{(k)}$ можно считать равной нулю, положим $A_0^{(k)}=0$ $(k=1,2)$. Однородное краевое условие (1.7) для комплексных потенциалов (см. [8], § 51) при учете (4.2) имеет вид

$$\varkappa\varphi_0^{(k)}(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi_0^{(k)\prime}(\sigma)}-\overline{\psi_0^{(k)}(\sigma)}=-\frac{\delta_{1k}-i\delta_{2k}}{2\pi(1+\varkappa)}\sigma\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}},\quad |\sigma|=1 \tag{4.4}$$

Здесь в соответствии с (4.1)

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}=\frac{c\,\sigma^3+c_1\sigma+c_2}{\sigma^2(\bar c-\bar c_1\sigma^2-2\bar c_2\sigma^3)}$$

Краевому условию (4.4) отвечает следующее функциональное уравнение Мусхелишвили для определения функции $\varphi_0^{(k)}$:

$$-\varkappa\varphi_0^{(k)}(\zeta)-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi_0^{(k)\prime}(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{\delta_{1k}-i\,\delta_{2k}}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\sigma\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{4.5}$$

где ζ – произвольная точка вне единичного круга, γ – окружность $|\sigma|=1$. Так как выражение $[\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}]\overline{\varphi_0^{(k)\prime}(\sigma)}$ представляет собой граничное значение функции

$$\frac{c\zeta^3+c_1\zeta+c_2}{\zeta^2(\bar c-\bar c_1\zeta^2-2\bar c_2\zeta^3)}\overline{\varphi_0^{(k)\prime}}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

голоморфной внутри единичного круга, то интеграл в левой части (4.5) равен нулю. С другой стороны, выражение, стоящее под знаком интеграла справа в (4.5), есть граничное значение функции

$$\zeta\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=\frac{c\zeta^3+c_1\zeta+c_2}{\zeta(\bar c-\bar c_1\zeta^2-2\bar c_2\zeta^3)}=\frac{c_2}{\bar c}\frac{1}{\zeta}+\frac{c_1}{\bar c}+\frac{c_2\bar c_1}{\bar c^2}\zeta+\ldots \tag{4.6}$$

голоморфной внутри единичного круга, за исключением начала координат, где она имеет полюс первого порядка с главной частью $c_2\bar c^{-1}\zeta^{-1}$. Следовательно, по формуле (4) из § 70 [8] находим

$$\varphi_0^{(k)}(\zeta)=-\frac{\delta_{1k}-i\,\delta_{2k}}{2\pi\varkappa(1+\varkappa)}\frac{c_2}{\bar c}\frac{1}{\zeta} \tag{4.7}$$

Вернемся к краевому условию (4.4). Подставим в него выражение (4.7) и учтем разложение (4.6), пригодное при $|\zeta|=1$. Приходим к соотношению, сравнивая в котором коэффициенты при σ^0, получаем $B_0^{(k)}$. Наконец, формула (3.7) дает

$$2\mu(D_1^{(k)}+iD_2^{(k)})=-\frac{\delta_{1k}+i\delta_{2k}}{2\pi(1+\varkappa)}\left(1-2\varkappa\ln|c|-\frac{1}{\varkappa}\frac{|c_2|^2}{|c|^2}\right)-\frac{\delta_{1k}-i\delta_{2k}}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{cc_1}{|c|}$$

В развернутом виде для случая (4.1) матрица винеровской емкости выглядит так (ср.с [2], формула (6), где, в частности, отсутствуют члены с множителем $|c_2|^2$):

$$4\pi\mu(1+\varkappa)\begin{Vmatrix}D_1^{(1)} & D_1^{(2)}\\ D_2^{(1)} & D_2^{(2)}\end{Vmatrix}=2\varkappa\ln|c|E-\begin{Vmatrix}R_1^{(1)} & R_1^{(2)}\\ R_2^{(1)} & R_2^{(2)}\end{Vmatrix} \tag{4.8}$$

$$R_k^{(k)}=1+(-1)^{k+1}\,\mathrm{Re}\left(\frac{cc_1}{|c|^2}\right)-\frac{1}{\varkappa}\frac{|c_2|^2}{|c|^2},\quad R_2^{(1)}=R_1^{(2)}=\mathrm{Im}\left(\frac{cc_1}{|c|^2}\right) \tag{4.9}$$

где E – единичная матрица.

В задаче вычисления компонент матрицы упругой поляризации потенциалы (3.2) представим следующим образом:

$$\varphi^{(j)}(\zeta)=A_1^{(j)}\zeta+\varphi_0^{(j)}(\zeta),\quad \psi^{(j)}(\zeta)=B_1^{(j)}\zeta+\psi_0^{(j)}(\zeta)$$

где $\varphi_0^{(j)}$, $\psi_0^{(j)}$ – функции, голоморфные вне единичного круга, включая бесконечно удаленную точку, обладающую разложениями вида (4.3). Ввиду асимптотики (1.6) постоянные $A_0^{(j)}$ и $B_0^{(j)}$ должны быть связаны зависимостью $\varkappa A_0^{(j)} - \overline{B}_0^{(j)} = 0$ $(j=1,2,3)$. Тем же путем, что и выше, находим (ср.с [3], где, в частности, отсутствуют члены с множителем $|c_2|^2$)

$$A_{-1}^{(j)} = -\overline{A}_1^{(j)}\frac{c_1}{\overline{c}} - \overline{B}_1^{(j)} \tag{4.10}$$

$$B_{-1}^{(j)} = -A_1^{(j)}\left(\frac{|c|^2}{c^2} + \frac{|c_1|^2}{c^2} + \frac{2|c_2|^2}{c^2}\right) - \overline{A}_1^{(j)}\left(1 + \frac{|c_1|^2}{|c|^2} + \frac{2|c_2|^2}{|c|^2}\right) - \overline{B}_1^{(j)}\frac{\overline{c}_1}{c}$$

Формулы (4.10), (3.5) и (3.6) решают задачу определения компонент матрицы упругой поляризации в случае (4.1).

5. Матрица Робена. Величина $|c|$, где c – коэффициент в разложении (3.1), называется (см. [1], § 1.3) внешним конформным радиусом замкнутой области $\overline{G}$ и имеет размерность длины. Если r – радиус наибольшего круга, содержащегося в $\overline{G}$, а R – радиус наименьшего круга, содержащего $\overline{G}$, то имеют место оценки: $r \leqslant |c| \leqslant R$ (см., например, [10], отд. 4, задачу № 123).

В прикладных исследованиях асимптотическую формулу (1.8) предпочтительно записывать в виде

$$\mathbf{S}^{(k)}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}^{(k)}\left(\frac{\mathbf{x}}{|c|}\right) - \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\mathbf{R}^{(k)} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \to \infty$$

где вычисляется логарифм безразмерной величины.

Симметрическую матрицу $\|R_l^{(k)}\|_{l,k=1}^2$ со столбцами $\mathbf{R}^{(1)}$ и $\mathbf{R}^{(2)}$ назовем матрицей Робена по аналогии с постоянной Робена ([11], § 3, гл. 4).

Отображение $z = \omega(\zeta) = |c|(\zeta + m\zeta^{-1})$ переводит внешность единичного круга на область Ω, граница которой – эллипс с полуосями $|c|(1+m)$ и $|c|(1-m)$. Используя явное решение ([8], § 83а), найдем $\mathbf{R} = \operatorname{diag}\{1+m,\ 1-m\}$. Эта матрица теряет свойство положительной определенности в случае $|m| = 1$, соответствующем вырождению эллипса в отрезок.

Если геометрия области Ω задается конформным отображением (4.1), то элементы матрицы Робена определяются формулами (4.9). Покажем, что при $c_2 \neq 0$ матрица Робена положительно определена (для общего случая это доказать не удалось). Действительно, согласно теореме площадей (см., например, [11], гл. 2, § 4, стр. 49)

$$|c|^2 \geqslant |c_1|^2 + 2|c_2|^2 \tag{5.1}$$

Следовательно, $|c_1 c^{-1}| < 1$ и справедливы соотношения

$$1 - \frac{|c_1|}{|c|} - \frac{1}{\varkappa}\frac{|c_2|^2}{|c|^2} > \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|c_1|^2}{|c|^2}\right) - \frac{1}{\varkappa}\frac{|c_2|^2}{|c|^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|c_1|^2}{|c|} - \frac{2}{\varkappa}\frac{|c_2|^2}{|c|^2}\right) \tag{5.2}$$

Выражение, стоящее справа от знака равенства в (5.2), положительно в силу (5.1) и условия $\varkappa > 1$.

Автор благодарит С.А. Назарова и М.А. Нарбута за внимание к работе и обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (96-01-01069).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
2. *Мовчан А.Б.* Матрицы поляризации и емкости Винера для оператора теории упругости в двусвязных областях // Мат. заметки. 1990. Т. 47. Вып. 2. С. 151–153.
3. *Movchan A.B.* Integral characteristics of elastic inclusions and cavities in the two-dimensional theory of elasticity // European J. Appl. Math. 1992. V. 3. N 1. P. 21–30.
4. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
5. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nahr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
6. *Зорин И.С., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Об использовании тензора упругой поляризации в задачах механики трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 128–134.
7. *Бабич В.М., Иванов М.И.* Длинноволновая асимптотика в задачах рассеяния упругих волн // Математические вопросы теории распространения волн. 16. Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 156. С. 6–19.
8. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
9. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
10. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978. 431 с.
11. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
20.VII.1997