

УДК 539.3

© 1998 г. И.А. Алдошина, С.А. Назаров

**АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ
НА СТЫКЕ ПЛАСТИН С СИЛЬНО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ
ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

Изучается явление пограничного слоя, возникающее при соединении пластин встык. На основе метода сращиваемых асимптотических разложений разработана процедура вывода асимптотически точных условий сопряжения (трансмиссии), связывающих двумерные уравнения деформации пластин по линии стыка Γ . Обсуждаются две ситуации, в которых такие условия оказываются нестандартными: на Γ изгибающий момент должен исчезать, а поворот может претерпевать скачок (при реальных значениях физических параметров продольные смещения и силы, а также прогиб и перерезывающая сила всегда остаются непрерывными). Одна из ситуаций (сочленение "толстой мягкой" и "тонкой жесткой" оболочек) характерна для подвижной системы громкоговорителя; приводятся результаты численного эксперимента, подтверждающие проделанный асимптотический анализ задачи.

Известно ([1–5] и др.), что вблизи края тонкой трехмерной пластины или оболочки возникает явление экспоненциального пограничного слоя (ПС). При определении главных членов асимптотики вдали от края этим явлением можно пренебречь ([6–8] и др.), но в случаях, когда интерес представляют эффекты, требующие учета младших асимптотических членов, обойтись без анализа ПС не удастся ([1, 9–11] и др.). В рамках метода составных асимптотических разложений естественное требование затухания ПС порождает асимптотически точные краевые условия для системы (двумерных) уравнений теории оболочек.

Аналогичные явления имеют место и тогда, когда в малой окрестности контура Γ на срединной поверхности пластины или оболочки расположены какие-либо дефекты (сварной шов, ребро жесткости, несквозная трещина, стык пластин и т.п.). При этом экспоненциальный характер затухания ПС обеспечивается условиями сопряжения (трансмиссии) на контуре Γ ([12–14] и др.). Обычно условия сопряжения (УС) заключаются в непрерывности поперечного и продольных смещений, перерезывающей и продольных сил, а также поворота и изгибающего момента. Однако если дефект характеризуется новыми малыми параметрами (в дополнение к относительной толщине h пластины), то в некоторых ситуациях асимптотический анализ ПС может привести к нестандартным УС – такой эффект прослеживается ниже для ряда задач о соединении пластин встык.

В разд. 1 на основе общих результатов [14] изучаются решения задач теории упругости в полосе и в объединении полуполос. В разд. 2 обсуждается процедура вывода УС, использующая метод сращиваемых асимптотических разложений (САР). Получающиеся УС содержат некоторую симметрическую (4×4) -матрицу M – интегральную характеристику зоны соединения. В случаях, когда элементы M_{jk} зависят от дополнительных параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ непрерывно, асимптотически точными оказываются стандартные УС. Если же M_{jk} неограниченно возрастают при $\alpha_i \rightarrow +0$, то при определенных соотношениях между α_i и h могут возникнуть нестандартные УС. В разд. 3 и 4 рассматриваются две конкретные задачи: пластина с почти сквозной трещиной (малый параметр – относительная толщина перемычки) и соединение "жесткой, тонкой" и "мягкой, толстой" пластин (параметры – отношения толщин и модулей Юнга). Наконец, в разд. 5 приводятся результаты расчетов спектра частот электродинамических громкоговорителей; достичь приемлемого совпадения с экспериментальными данными удастся лишь при помощи асимптотически точных нестандартных УС.

1. Модельная задача о пограничном слое. Пусть $\Pi = (-l/2, l/2) \times \mathbf{R}$ – полоса из однородного изотропного упругого материала с постоянными Ламе λ и μ . Рассмотрим плоскую и антиплоскую задачи теории упругости

$$\mu \nabla \cdot \nabla V'(x) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot V'(x) = 0, \quad x \in \Pi \quad (1.1)$$

$$\sigma_{12}(V'; x_1, \pm l/2) = \sigma_{22}(V'; x_1, \pm l/2) = 0, \quad x_1 \in \mathbf{R}$$

$$\mu \nabla \cdot \nabla V_3(x) = 0, \quad x \in \Pi; \quad \mu (\partial V_3 / \partial x_2)(x_1, \pm l/2) = 0, \quad x_1 \in \mathbf{R} \quad (1.2)$$

Здесь $V' = (V_1, V_2)$ и V_3 – смещения; $\sigma(V') = (\sigma_{jk}(V'))$ – двумерный тензор напряжений. Укажем базис в линейном пространстве полиномиальных решений задачи (1.1), (1.2):

$$V^{1'}(x) = (-x_2, x_1), \quad V^{2'} = (0, 1), \quad V^{3'} = (1, 0), \quad V_3^4 = 1 \quad (1.3)$$

$$V^{5'}(x) = \frac{1}{D} \left(-x_1 x_2, \frac{x_1^2}{2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{x_2^2}{2} - \frac{l^2}{24} \right] - \frac{l^2}{60} \frac{11\lambda + 12\mu}{\lambda + 2\mu} \right)$$

$$V^{6'}(x) = \frac{1}{D} \left(\frac{x_2^2}{2} x_1 - \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{x_2^3}{6} - \frac{11\lambda + 12\mu}{\lambda + 2\mu} l^2 \frac{x_1}{40} - \right.$$

$$\left. - \frac{x_1^3}{6} - \frac{\lambda x_1}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{l^2}{24} \right) + \frac{11\lambda + 12\mu}{\lambda + 2\mu} l^2 \frac{x_2}{60} \right) \quad (1.4)$$

$$V^{7'}(x) = \frac{l^2}{12D} \left(x_1, -\frac{\lambda x_2}{\lambda + \mu} \right), \quad V_3^8(x) = \frac{x_1}{\mu l}, \quad D = \frac{\mu}{3} l^3 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$$

Компоненты векторов $V^j = (V^{j'}, V_3^j)$, опущенные в (1.3) и (1.4), равны нулю. Формулы (1.3) содержат жесткие смещения, а величины (1.4) порождают соответственно изгибающий момент, перерезывающую силу и продольные силы.

Пусть Ω – составное плоское тело, совпадающее вне некоторого круга $B_R = \{x_1 : |x| < R\}$ с объединением полуполос $\Pi_+ = (-l_+/2, l_+/2) \times (0, +\infty)$ и $\Pi_- = (-l_-/2, l_-/2) \times (-\infty, 0)$ из материалов с постоянными Ламе λ_+, μ_+ и λ_-, μ_- соответственно. Векторы, определенные формулами (1.4), в которых символы λ, μ, l, D снабжены индексами \pm , будем обозначать $V_{\pm}^j = (V_{\pm}^{j'}, V_{\pm}^j)$.

Рассмотрим решения $v = (v', v_3)$ однородной задачи теории упругости в области Ω . Количество линейно независимых решений, обладающих степенным ростом на бесконечности, равно 8 (половина произведения числа "выходов" области к бесконечности на число аналогичных решений задачи в полосе; см. [14], гл. 5). Четыре из названных решений тривиальны – жесткие смещения V^1, \dots, V^4 из (1.3). Еще четыре решения v^1, \dots, v^4 определяются такими разложениями:

$$v^k(x) = V_-^{4+k}(x) + o(\exp(\delta_- x_1)), \quad x_1 \rightarrow -\infty \quad (1.5)$$

$$v^k(x) = V_+^{4+k}(x) + \sum_{j=1}^4 M_{kj} V^j(x) + o(\exp(-\delta_+ x_1)), \quad x_1 \rightarrow +\infty$$

Здесь $\delta_{\pm} > 0$ – малые числа, $m = (M_{jk})$ – блочная (4×4) -матрица, зависящая от данных задачи (от $\Omega, \lambda_{\pm}, \mu_{\pm}$ и пр.). Матрицу M можно интерпретировать как интегральную характеристику упругого тела, аналогичную тензору виртуальной массы [15], матрице упругой поляризации [16] и т.п. Подчеркнем, что в случае безраз-

мерных x_i и l_i величины M_{jk} согласно (1.3) и (1.4) имеют размерность, обратную размерности модуля Юнга. Проверкой убеждаемся, что матрица M симметрическая.

2. Определение условий согласования. Пусть пластина Q_h образована соединением двух пластин-полос $Q_h^\pm = \{(y, z) \in \mathbf{R}^3 : |z| < hl_\pm, H_\pm > \pm y_1 > Rh, y_2 \in \mathbf{R}\}$ и жестко закреплена по краям $\{(y, z) : |z| < hl_\pm / 2, y_1 = H_\pm\}$. Структуру соединения удобно описывать при помощи "быстрых" переменных $x = (x_1, x_2)$, где $x_1 = h^{-1}y_1, x_2 = h^{-1}z$. Будем считать, что после перехода к координатам x поперечные сечения $\{(y, z) \in Q_h : y_2 = \text{const}\}$ пластины трансформируются в область Ω из разд. 1. Масштабированием величину $H = H_+ + H_-$ сведем к единице; тогда все линейные параметры задачи станут безразмерными. Предположим, что $H_\pm, l_\pm, R \gg h$. Наконец, допустим, что напряженное состояние пластины не зависит от переменной y_2 .

Известно ([1–13]) и др.), что вдали от краев пластин Q_h^\pm решение пространственной задачи теории упругости в Q_h представляется как асимптотический ряд со сложной структурой общего члена. Основное приближение к трехмерному полю смещений в пластине имеет вид

$$h^N \sum_{j=1}^3 \sum_{k=0}^{2\tau_j-1} h^{k-\tau_j} \frac{\partial^k u_j^\pm}{\partial y_1^k}(y_1) \Phi_\pm^{(k,j)}\left(\frac{z}{h}\right) \quad (2.1)$$

Поясним обозначения, принятые в (2.1). Показатель N в нормирующем множителе h^N определяется порядком (относительно h) внешних нагрузок; кроме того, $\tau_1, \tau_2 = 1, \tau_3 = 2$. Векторы $h^{N-1}u^\pm = h^{N-1}(u_1^\pm, u_2^\pm)$ (главные части продольных смещений) удовлетворяют системе уравнений Ламе, описывающей обобщенное плоское напряженное состояние, а функции $h^{N-2}u_3^\pm$ (главные части прогибов пластин Q_h^\pm) – решения уравнений Жермен. Наконец,

$$\begin{aligned} \Phi^{(0,j)} &= e^j, \quad j = 1, 2, 3 \\ \Phi^{(1,1)}(z) &= -\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} z e^3, \quad \Phi^{(1,2)} = 0, \quad \Phi^{(1,3)}(z) = -z e^1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\Phi^{(2,3)}(z) = \left[\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{l^2}{24} \right) - \frac{l^3}{60} \frac{11\lambda + 12\mu}{\lambda + 2\mu} \right] e^3$$

$$\Phi^{(3,3)}(z) = \left[\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{z^3}{6} - \frac{11\lambda + 12\mu}{\lambda + 2\mu} l^2 \frac{z}{40} \right] e^1$$

Здесь e^j – орт в \mathbf{R}^3 и индексы \pm у символов опущены. Упомянем один факт, установленный ([4], § 6; [14], п. 5.6) множество линейных комбинаций векторов (1.3), (1.4) совпадает с линейной оболочкой, натянутой на векторы

$$U^{(k,j)}(x) = \sum_{q=0}^k \frac{1}{q!} x_1^q \Phi^{(k-q,j)}(x_2), \quad j = 1, 2, 3; \quad k = 0, \dots, 2\tau_j - 1 \quad (2.3)$$

Для определенности фиксируем $N = 1$ в (2.1) и перейдем к переменным x . Раскладывая u_j^\pm в ряды Тейлора и учитывая сказанное о наборах (1.3), (1.4) и (2.3), убеждаемся, что выражения (2.1) с точностью до величин меньших порядков совпадают с суммами

$$\sum_{n=1}^4 (a_n^\pm V^n(x) + B_n^\pm V_\pm^{4+n}(x)) \quad (2.4)$$

причем

$$a_1^\pm = \partial^1 u_3^\pm(0), \quad a_2^\pm = h^{-1} u_3^\pm(0), \quad a_3^\pm = u_1^\pm(0), \quad a_4^\pm = u_2^\pm(0) \quad (2.5)$$

$$b_1^\pm = h D_\pm \partial^2 u_3^\pm(0), \quad b_2^\pm = -h^2 D_\pm \partial^3 u_3^\pm(0) \quad (2.6)$$

$$b_3^\pm = 12 l_\pm^{-2} h D_\pm \partial^2 u_1^\pm(0), \quad b_4^\pm = l_\pm \mu_\pm h \partial^1 u_2^\pm(0)$$

$$\partial^m = \frac{\partial^m}{\partial y_1^m}, \quad D_\pm = \frac{1}{3} \mu_\pm l_\pm \frac{\lambda_\pm + \mu_\pm}{\lambda_\pm + 2\mu_\pm}$$

Физический смысл коэффициентов (они – функции параметра h) из (2.4) следующий: в (2.5) указаны соответственно поворот, прогиб и продольные смещения на краю пластин, а в (2.6) – изгибающий момент, перерезывающая и продольные силы. Используются приведенные ($h = 1$) цилиндрические жесткости D_\pm .

В соответствии с алгоритмом построения асимптотики решений эллиптических краевых задач в тонких областях пришлось включить в главный асимптотический член (2.1) слагаемые различных порядков относительно параметра h . Аналогичной структурой обладают и младшие члены ряда для решения трехмерной задачи. Поэтому дальнейшее рассуждение можно приспособить и к нахождению (уже неоднородных) условий сопряжения в задачах для младших членов.

Ряд предположений, сделанных в начале раздела, не сказывается на сути дела. Пусть, например, функции u_j^\pm зависят от переменной y_2 . При переходе к координатам x масштаб y_2 не изменяется. Поэтому "медленная" переменная y_2 становится параметром задачи о пограничном слое и тем самым зависимость u^\pm от y_2 проявляется только в младших членах асимптотического ряда. Если же пластины соединены по кривой Γ , то "быстрые" переменные $x_1 = h^{-1}n$, $x_2 = h^{-1}z$ определяются при помощи локальных координат (n, s) , где s – длина дуги на Γ , $|n|$ – расстояние до Γ . Теперь вместо y_2 "медленной" оказывается переменная s . Разумеется, в обоих случаях нужно модифицировать формулы (3.6) для моментов и сил, но это не влияет на излагаемую ниже процедуру сращивания.

Решение трехмерной задачи в Q^h приближается суммой (2.1) лишь на удалении от краев пластин Q_\pm^h , а вблизи них возникает явление пограничного слоя (ПС). Обычно ([1–5, 9–13] и др.) в теории оболочек и пластин используется метод составных асимптотических разложений, в котором, как и в методе Вишика – Люстерника [17], к решению гладкого типа (3.1) добавляется решение типа ПС, экспоненциально затухающее при удалении от краев и служащее, в частности, для устранения невязок, остающихся в краевых условиях на боковых поверхностях пластин. В рассматриваемом здесь случае соединения пластин решение типа ПС находится из задачи в области Ω (разд. 1). Однако такая задача разрешима не всегда в классе вектор-функций, исчезающих на бесконечности. Известно (см., например, [14], гл. 5), что условия убывания решения на бесконечности эквивалентны восьми равенствам, обеспечивающим ортогональность (в смысле формулы Бэтти) правых частей задачи полям $V^1, v^1, \dots, V^4, v^4$ (см. (1.5)). Именно эти восемь равенств и составляют искомые условия сопряжения (УС), замыкающие уравнения, которым удовлетворяют функции u_j^\pm из (2.1).

Альтернативной описанному методу служит метод сращиваемых асимптотических разложений (САР), который будем применять при отыскании УС ввиду большего удобства. В методе САР в малой окрестности краев пластин ищется новое – внутреннее – разложение решения трехмерной задачи (подчеркнем, что при предыдущем подходе ПС прибавлялся к решению гладкого типа). Как и ПС, внутреннее разложение описывается решением V задачи в Ω , однако теперь на V не наклад-

дывается требование экспоненциального затухания на бесконечности. Вместо этого возникает условие сращивания: полиномиальные слагаемые в асимптотиках поля $V(x)$ при $x_1 \rightarrow \pm \infty$ совпадают с выражениями (2.4). Обратим внимание на то, что оба разложения, внешнее (2.1) и внутреннее $V(x)$, соответствуют одному и тому же трехмерному полю и потому обязаны с точностью до младших слагаемых совпадать в некоей "промежуточной зоне" $ch^{-1/2} < |x_1| < Ch^{-1/2}$ (или, что то же, $ch^{1/2} < |y_1| < Ch^{1/2}$) – в методе САР это совпадение и обеспечивается при помощи условий сращивания.

Построим решение V однородной задачи в области Ω , для которого величины (2.4) оказываются асимптотикой при $x_1 \rightarrow \pm \infty$. Сначала рассмотрим "левую" бесконечность ($x_1 \rightarrow -\infty$). Вспоминая сказанное в разд. 1 и учитывая формулы (1.3)–(1.5), заключаем, что единственным претендентом на роль искомого решения является линейная комбинация

$$V(x) = \sum_{n=1}^4 (a_n^- V^n(x) + b_n^- v^n(x)) \quad (2.7)$$

Пусть теперь $x_1 \rightarrow +\infty$ и в (2.4) фиксирован индекс "+". Обращаясь ко второму соотношению в (1.5) и обозначая многоточием экспоненциально малые слагаемые, видим, что

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{n=1}^4 \left\{ a_n^- V^n(x) + b_n^- \left[V_+^{4+n}(x) + \sum_{j=1}^4 M_{nj} V^j(x) \right] \right\} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^4 b_n^- V_+^{4+n}(x) + \sum_{j=1}^4 \left(a_j^- + \sum_{n=1}^4 b_n^- M_{nj} \right) V^j(x) \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Еще раз воспользуемся условиями сращивания и заметим, что выделенное в правой части (2.8) выражение совпадает с величиной (2.4), где взят индекс "+", лишь при выполнении восьми соотношений, которые запишем в векторной форме

$$a^+ = a^- + Mb^- \quad (2.9)$$

$$b^- = b^+ \quad (2.10)$$

Здесь a^\pm и b^\pm – четырехмерные столбцы, составленные из величин (2.5) и (2.6), M – (4×4) -матрица коэффициентов из разложений (1.5). Уравнение (2.10) означает непрерывность сил и момента, упомянутых в комментарии к формулам (2.6), и представляет собой первую группу естественных УС. Вместе с тем кажется, что соотношение (2.9) следует интерпретировать как условия упругой заделки. Однако в выделенном члене (2.1) асимптотического ряда фигурируют слагаемые различных порядков малости, да и сами столбцы a^\pm, b^\pm содержат разнородные элементы. Поэтому при формировании второй группы УС требуется дополнительный асимптотический анализ.

Предположим, что при переходе к модельной задаче в области Ω удалось полностью избавиться от малого параметра. Тогда матрица M не зависит от h и значит в силу (2.5) и (2.6) компоненты столбца Mb^- – бесконечно малые при $h \rightarrow 0$, а компоненты столбцов a^\pm равны $O(1)$ или $O(h^{-1})$. Таким образом, последнее слагаемое в (2.9) нужно отбросить и получить вторую группу УС, выражающих непрерывность смещений и поворота:

$$a^+ = a^- \quad (2.11)$$

В случае, когда какие-либо элементы матрицы M оказываются большими (не удалось освободиться от параметров в модельной задаче), последнее слагаемое в (2.9) может перестать быть малым, а предельные УС, получающиеся из (2.8), могут отличаться от (2.11). В следующих двух разделах рассматриваются две такие ситуации.

3. Поперечные трещины в пластине. Рассмотрим пластину с двумя симметричными поверхностными поперечными надрезами, между которыми имеется перемычка шириной $2\varepsilon h$. Вернемся к обозначениям из разд. 1 и положим $l = l_{\pm} = 1$, $\lambda_{\pm} = \lambda$, $\mu_{\pm} = \mu$ и

$$\Omega = \Pi\{x: x_1 = 0, |x_2| > \varepsilon\} \quad (3.1)$$

Будем считать ε малым параметром и найдем асимптотики элементов матрицы $M = M(\varepsilon)$. Алгоритмы построения асимптотических разложений решений задач в областях с тонкими перемычками разработаны в полной мере ([18–22] и др.).

Приведем лишь окончательные формулы с комментариями.

Асимптотика (при $\varepsilon \rightarrow +0$) решений (1.5) задачи в области $\Omega = \Omega(\varepsilon)$, а значит, и асимптотика матрицы $M(\varepsilon)$ отыскивается при помощи метода CAP и конструируется из специальных решений задач в предельных областях (существование нужных решений вытекает, например, из общих результатов [14]). Первые две предельные области Π_{\pm} (полуполосы) получаем, положив $\varepsilon = 0$ в (3.1). Еще одна предельная область $\Xi = \mathbf{R}^2 \setminus \{\eta \in \mathbf{R}^2: \eta_1 = 0, |\eta_2| \geq 1\}$ (плоскость с парой полубесконечных разрезов) возникает после перехода к новым "быстрым" переменным $\eta = \varepsilon^{-1}x$, а затем – к нулевому значению параметра ε .

Сначала укажем нужные решения задачи в Ξ . К жестким смещениям V^1, \dots, V^4 добавляются две линейные вектор-функции $V^0(\eta) = (\eta_1, -\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}\eta_2, 0)$ и $V^{-1}(\eta) = (0, 0, \eta_1)$, отвечающие одноосным нагружениям вдоль разрезов. Кроме того, возникают шесть неполиномиальных решений, которые определяются своим поведением при $|\eta| \rightarrow \infty$ в полуплоскостях $\mathbf{R}_{\pm}^2 = \{\eta: \pm \eta_1 > 0\}$

$$Y^j(\eta) = \pm V^j(\eta) + O(1) \quad (j = -1, 0, 1) \quad (3.2)$$

$$Y^k(\eta) = \mp T^k(\eta) + O(1) \quad (k = 2, 3, 4) \quad (3.3)$$

$$T^k(\eta) = \gamma_k V^k \ln |\eta| + T^{k0}(|\eta|^{-1} \eta)$$

$$\gamma_2 = \gamma_3 = (\lambda + 3\mu)[2\pi\mu(\lambda + 2\mu)]^{-1}, \quad \gamma_4 = (\pi\mu)^{-1}$$

Поля смещений (3.3) описывают деформацию Ξ разнонаправленными силами на бесконечности (T^k – решения задачи Фламана о сосредоточенных силах на границе полуплоскости). Еще одно решение Y^1 соответствует моментам $\pm \mu t$, приложенным на бесконечности к \mathbf{R}_{\pm}^2 . Можно выписать явные формулы для Y^q , позволяющие, в частности, уточнить разложения (3.2) и (3.3), заменив $O(1)$ остатками $O(|\eta|^{-2})$ и линейными комбинациями векторов V^2, V^3, V^4 и $T^{-1} = -\partial_1 T^4$, $T^0 = -\partial_1 T^2$, $T^1 = -\partial_1 T^3$ ($\partial_1 = \partial/\partial\eta_1$). Далее понадобится только неравенство $\mu t > 0$.

Помимо жестких смещений V^1, \dots, V^4 , специальными решениями Z_{\pm}^q ($q = -1, \dots, 4$), задач в Π_{\pm} служат поля смещений, порожденные сосредоточенными воздействиями $T^q(x)$ в точке $x = 0$. Векторы Z_{\pm}^{-1} и Z_{\pm}^0 экспоненциально затухают при $|x_1| \rightarrow \infty$. Сосредоточенные силы ($q = 2, 3, 4$) и момент ($q = 1$) уравниваются нагружением на бесконечности; иными словами, выполняются подобные (1.5) представления

$$Z_{\pm}^k(x) = V^{4+k}(x) + o(\exp(\mp \delta_{\pm} x_1)), \quad x_1 \rightarrow \pm\infty$$

После применения процедуры сращивания в зоне $|x| = O(\varepsilon^{1/2})$ (или $|\eta| = O(\varepsilon^{-1/2})$) находится асимптотика коэффициентов $M_{kj}(\varepsilon)$ в формулах (1.5)

$$M_{11}(\varepsilon) = 2\varepsilon^{-2}\mu^{-1}m^{-1} + O(\mu^{-1}\varepsilon^{-1}|\ln \varepsilon|)$$

$$M_{mn}(\varepsilon) = 2\delta_{m,n}\gamma_n |\ln \varepsilon| + O(\mu^{-1}) \quad (n, m = 2, 3, 4) \quad (3.4)$$

$$M_{12}(\varepsilon) = M_{21}(\varepsilon) = O(\mu^{-1}\varepsilon^{-1}), \quad M_{1p}(\varepsilon) = M_{p1}(\varepsilon) = 0 \quad (p = 3, 4)$$

Итак, диагональные элементы матрицы $M(\varepsilon)$ неограниченно возрастают при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Пусть $\varepsilon \ll h^{1/2}$ и $\varepsilon \gg \exp(-h^{-1})$. Тогда согласно (2.5), (2.6) и (3.4) в первой строке системы (2.9) превалирует величина $M_{11}(\varepsilon)b_1^-$, а все остальные слагаемые – бесконечно малые по сравнению с ней. Эту строку преобразуем в равенство $b_1^- = 0$, которое вместе с (2.6) и (2.10) приводит к формулам

$$D_+ \partial^2 u_3^+(0) = 0, \quad D_- \partial^2 u_3^-(0) = 0 \quad (3.5)$$

Остальные строки в (2.9) и (2.10) порождают такие УС:

$$12l_+^{-2} D_+ \partial^1 u_1^+(0) = 12l_-^{-2} D_- \partial^1 u_1^-(0)$$

$$l_+ \mu_+ \partial^1 u_2^+(0) = l_- \mu_- \partial^1 u_2^-(0) \quad (3.6)$$

$$D_+ \partial^3 u_3^+(0) = D_- \partial^3 u_3^-(0), \quad u_j^+(0) = u_j^-(0) \quad (j = 1, 2, 3)$$

По предположению $D_{\pm} = D$, $l_{\pm} = l$ и $\mu_{\pm} = \mu$, т.е. множители при производных можно сократить. Условия (3.5), (3.6) означают, что непрерывны смещения и силы, изгибающий момент равен нулю на линии стыка, а поворот может претерпевать скачок.

Пусть теперь параметры ε и $h^{1/2}$ сравнимы по величине, т.е. справедливо равенство $\varepsilon = \varepsilon_0 h^{1/2}$ с множителем ε_0 порядка единицы. Ввиду симметрии области $\Omega(\varepsilon)$ имеем $M_{1p}(\varepsilon) = M_{p1}(\varepsilon) = 0$ ($p = 3, 4$). Поэтому из (2.9), (2.10) вытекают соотношения (3.6), дополненные равенствами

$$\partial^2 u_3^+(0) - \partial^2 u_3^-(0) = 0 \quad (3.7)$$

$$\partial^2 u_3^+(0) + \partial^2 u_3^-(0) = 2\varepsilon_0^2 \mu D^{-1} m (\partial^1 u_3^+(0) - \partial^1 u_3^-(0))$$

Следовательно, на линии стыка непрерывен изгибающий момент и выполняется условие, подобное упругой заделке.

Асимптотически точные УС (3.6), (3.5) и (3.6), (3.7) допускают разрыв поворота. Возникновение разрывов в смещениях увязывается с величинами $M_{nm}(\varepsilon)$ из (3.4), которые имеют слабый, логарифмический рост и становятся достаточно большими при неправдоподобно малых значениях параметра ε . Наконец, в случае $h^{1/2} \gg \varepsilon$ согласно (3.4), (2.5), (2.6) последнее слагаемое в (2.9) нужно отбросить и прийти к стандартным УС (2.10), (2.11).

При рассмотрении задачи в Ω не была учтена возможность контакта берегов трещин. Этот изъян линейной постановки задачи не возникает в случае угловых вырезов или дефектов других типов, образующих тонкие, размером ε , h , перемычки в пластине. При этом, как следует из [19, 23], соотношение $M_{11}(\varepsilon) = O(\varepsilon^2 \mu^{-1})$ сохраняется, а значит, остаются в силе и выводы относительно УС (3.5)–(3.7).

4. Соединение пластин разной толщины. Пусть $l_- = 1$, $l_+ = \varepsilon$ и $\Omega(\varepsilon) = \Pi_- \cup \Pi_+(\varepsilon)$, где $\Pi_+(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 > 0, |x_2| < \varepsilon/2\}$. Полуполосы Π_- и $\Pi_+(\varepsilon)$ сделаны из однородных изотропных материалов с постоянными Ламе λ_- , μ_- и λ_+ , μ_+ ; на стыке $\{x: x_1 = 0, |x_2| < \varepsilon/2\}$ заданы условия полного контакта. Найдем асимптотически точные УС, считая ε и $\tau = \mu_-/\mu_+$ малыми параметрами (т.е. материал "тонкой" пластины Q_h^+ значительно жестче материала "толстой" пластины Q_h^-). Не останавливаясь на подробностях, отметим, что в случаях $\tau = O(1)$ или $\tau \gg 1$ асимптотически точными оказываются естественные УС.

Интерпретация $\Omega(\varepsilon)$ как сочленения сингулярно вырождающихся множеств позволяет применить известную асимптотическую процедуру ([8, 24–27] и др.), которая в целом остается такой же, как и в разд. 3, несмотря на расхождения в геометрическом описании области $\Omega(\varepsilon)$ и

наличие дополнительного параметра τ . Предельными областями оказываются полуполосы Π_{\pm} (Π_{+} получается из $\Pi_{+}(\varepsilon)$ переходом к быстрым переменным η). Для задач о соединении тел с различающимися упругими характеристиками ([8, 16, 23, 28] и др.) характерно распадение условий контакта; при этом условия в смещениях наследуются более мягким телом. Поэтому возникает еще одна предельная область – полуплоскость $\Xi = \mathbf{R}_{-}^2$ с условиями заземления на месте стыка с жесткой полуполосой Π_{+} . Наборы специальных решений аналогичны тем, которые указывались в разд. 3; единственное изменение заключается в том, что формулы (3.2) и (3.3) пишутся лишь для $\eta \in \mathbf{R}_{-}^2$, т.е. при $\eta_1 < 0$. Далее понадобится только величина $\mu_m > 0$, фигурирующая в разложении решения Y^1 . Она равна моменту, который требуется приложить на бесконечности для поворота на единичный угол полуплоскости Ξ , заземленной на участке $\{\eta: \eta_1 = 0, |\eta_2| < 1/2\}$.

После применения процедуры сращивания в зоне $|x| = O(\varepsilon^{1/2})$, $x_1 < 0$, и учета условий согласования на стыке $\{x: x_1 = 0, |x_2| < \varepsilon/2\}$ находится асимптотика (при $\varepsilon, \tau \rightarrow +0$) решений u^k и коэффициентов $M_{jk}(\varepsilon, \tau)$ в их разложениях (1.5)

$$\begin{aligned} M_{11}(\varepsilon, \tau) &= \varepsilon^{-2} \mu_{-}^{-1} m^{-1} + O(\varepsilon^{-2} \tau \mu_{-}^{-1}) \\ M_{mn}(\varepsilon, \tau) &= \delta_{m,n} \gamma_n^{(-)} |\ln \varepsilon| + O(\tau \mu_{-}^{-1}) \quad (m, n = 2, 3, 4) \\ M_{12}(\varepsilon, \tau) &= M_{21}(\varepsilon, \tau) = O(\varepsilon^{-1} \mu_{-}^{-1}) \\ M_{1q}(\varepsilon, \tau) &= M_{q1}(\varepsilon, \tau) = 0 \quad (q = 3, 4) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Элементы матрицы $M(\varepsilon, \tau)$ неограниченно возрастают при $\varepsilon \rightarrow 0$, что приводит к нестандартным УС.

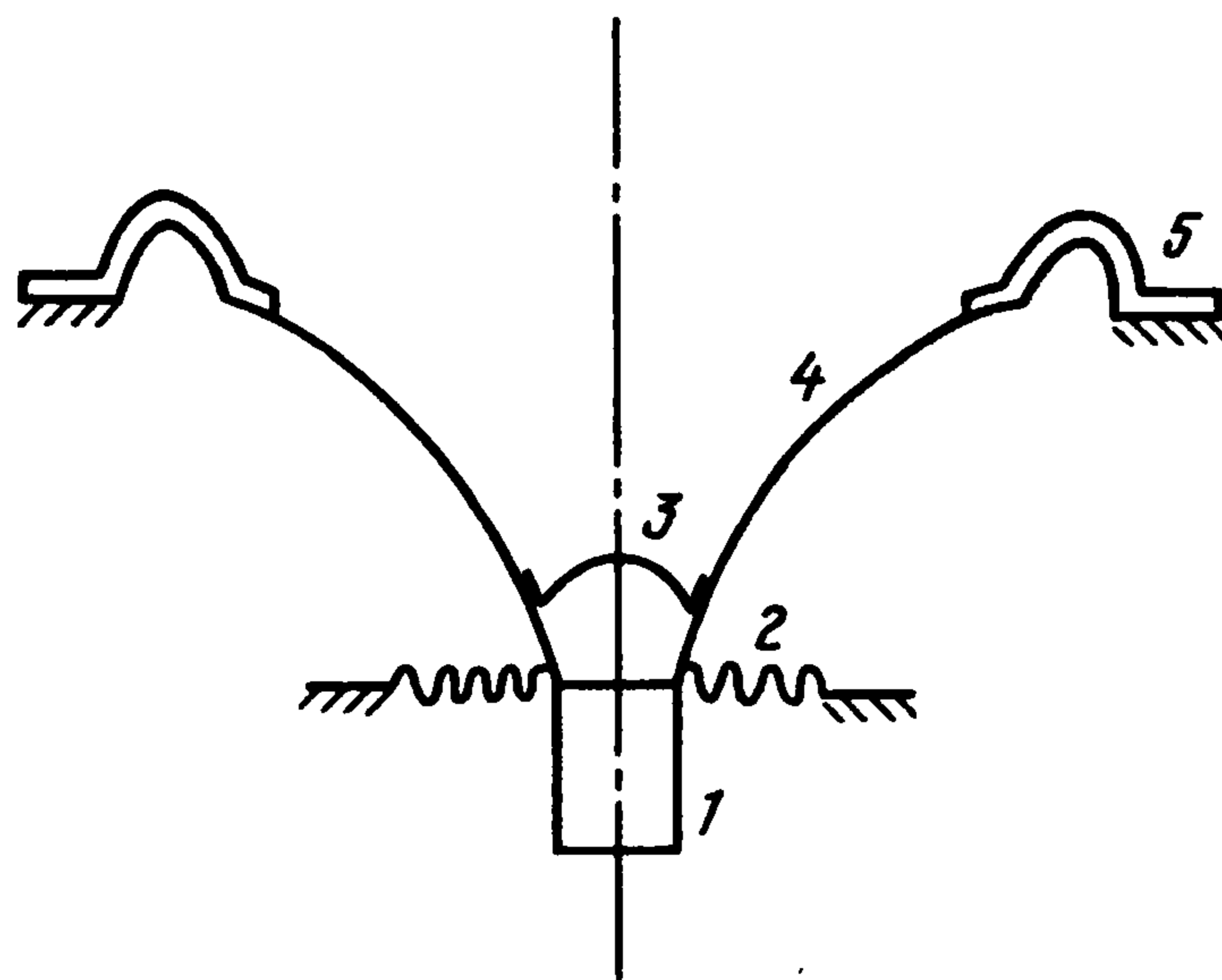
Остановимся лишь на наиболее интересном случае $\tau = O(\varepsilon^3)$, в котором цилиндрические жесткости пластин сравнимы по порядку. В силу (5.1) и (2.6)

$$\begin{aligned} b_1^{+}(h) &= O(h\varepsilon^3 \mu_{+}) \partial^2 u_3^{+}(0) = O(h\mu_{-}) \partial^2 u_3^{-}(0) \\ b_1^{-}(h) &= O(h\mu_{-}) \partial^2 u_3^{-}(0) \\ M_{11}(\varepsilon, \tau) b_1^{-}(h) &= O(\varepsilon^{-2} h) \partial^2 u_3^{-}(0) \end{aligned}$$

Следовательно, как и в разд. 3 заключаем, что при $h^{1/2} \gg \varepsilon \gg \exp(-h^{-1})$ соотношения (2.9), (2.10) порождают нестандартные УС (3.5), (3.6). Этот факт можно подтвердить мысленным экспериментом, подсказанным авторам Л.И. Слепяном. Рассмотрим соединение двух балок, тонкой металлической и толстой резиноподобной; их внешние торцы заземлены. Если первую балку повернуть вокруг центра соединения, то деформация второй будет локализована вблизи этого центра (ввиду малости участка контакта). Таким образом, для второй балки продольное смещение и прогиб, усредненные по толщине, оказываются нулевыми, что и отвечает скачку поворота в одномерных уравнениях. В то же время любое поступательное смещение правой балки приводит к глобальной деформации системы.

Те же нестандартные УС (3.5), (3.6) возникают и при $D_{+} \gg D_{-}$, $\exp(-h^{-1}) \ll \varepsilon \ll h^{1/2}$. В случае $\tau = O(\varepsilon^{\alpha})$, $\alpha \in (1, 3)$ (т.е. $D_{-} \gg D_{+}$) нестандартные УС возможны только при усилении ограничений на малость ε : должно выполняться требование $\varepsilon \ll h^{1/(\alpha-1)}$. Наконец, если $\tau = O(\varepsilon^{\alpha})$ и $\alpha \in (0, 1)$, то всегда появляются стандартные УС (2.10), (2.11).

5. Численный эксперимент. Обычная подвижная система громкоговорителя (показана на фигуре, где 1 – звуковая катушка, 2 – звуковая катушка (цилиндр), 3 – колпачок, 4 – диффузор, 5 – подвес) представляет собой сочленение оболочек вращения с сильно различающимися физико-механическими свойствами. Как правило, более толстые подвесы изготавливаются из



"мягких" материалов (резина, ткани, пленки и т.п.), а диффузоры – из "жестких" (бумага, синтетические пленки, фольга и т.п.). При этом расхождение в толщинах и в модулях Юнга может достигать двух и четырех порядков соответственно.

В многочисленных работах (см., например, [29, 30]), посвященных вычислению спектров собственных частот громкоговорителей, применялась следующая расчетная схема: каким-либо численным методом решались двумерные уравнения теории оболочек при учете непрерывности смещений и поворотов. Ни один из подобных расчетов не выявил низкочастотные составляющие спектров, экспериментально обнаруживаемые во всех типах громкоговорителей. Вместе с тем переход к нестандартным условиям сопряжения (отказ от непрерывности углов поворота) позволил вычислить при помощи пакета программ [31] спектр реальных конструкций громкоговорителей и обеспечить приемлемое совпадение результатов с экспериментальными данными. Характеристики одной из конструкций собраны в таблице (номера элементов соответствуют показанным на фигуре). Здесь же указаны первые члены последовательности собственных частот, рассчитанные при учете разрыва (А) и непрерывности (Б) углов поворота.

Элемент подвижной системы	Модуль Юнга, Н/м ²	Плотность, кг/м ³ · 10 ⁻³	Толщина, мм	Коэфф. Пуассона	Собственные частоты	
					А	Б
1	1,1 · 10 ¹⁰	3,83	0,95	0,3	39	331
2	3,0 · 10 ⁹	0,85	0,16	0,3	320	751
3	3,87 · 10 ⁸	1,636	0,6	0,3	627	1402
4	1,7 · 10 ⁹	1,819	0,6	0,3	1007	1495
5	1,56 · 10 ⁷	2,375	0,8	0,4	1418	2006
					1596	2056
					1860	
					2073	

Экспериментальное определение резонансов этой подвижной системы, выполненное путем измерений модуля полного электрического сопротивления, четко выделяет несколько первых резонансов: 36 Гц, 630 Гц и т.д., что соответствует рассчитанным значениям низших собственных частот (А). Результаты, представленные в столбце Б, дают сильно завышенную частоту первого резонанса. Как и следовало ожидать, тип условий сопряжения слабо влияет на результаты расчета высших собственных частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. Гольденвейзер А.Л., Колос А.В. К построению двумерных уравнений упругих тонких пластинок // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 141–155.
3. Friedrichs K.O., Dressler R.F. A boundary-layer theory for elastic plates // *Communs. Pure Appl. Math.* 1961. V. 14. N 1. P. 1–33.
4. Назаров С.А. Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 120 с.
5. Gregory R.D., Wan F.V. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory // *J. Elast.*, 1984. V. 14. N 1. P. 27–64.
6. Koiter W.T. On the mathematical foundation of shell theory // *Act. Congr. Intern. Math. Paris.* 1971. V. 3. P. 123–130.
7. Шойхет Б.А. Одно энергетическое тождество в физически нелинейной упругости и оценка погрешности уравнений плит // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 317–326.
8. Ciarlet P.G. Plates and junctions in elastic multi-structures. Paris: Masson, 1990. 215 p.
9. Кучеренко В.В., Попов В.А. Асимптотика решения задач теории упругости в тонких областях // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 1. С. 58–61.
10. Зорин И.С., Назаров С.А. Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 642–650.
11. Зорин И.С., Назаров С.А. Двучленная асимптотика решения задачи о продольной деформации пластины, защемленной по краю // *Вычисл. механика деформируемого твердого тела.* 1991. Вып. 2. С. 10–21.
12. Назаров С.А., Семенов Б.Н. Об асимптотике решения задач изгиба пластин с разрывными нагрузками // *Прикладная механика.* Л.: Изд-во ЛГУ. 1981. Вып. 5. С. 135–145.
13. Гольштейн Р.В., Корельштейн Л.Б. Метод асимптотического интегрирования и "метод пружинок" в задачах об упругих пластинах с вытянутым вырезом // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 666–674.
14. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991. 336 с.
15. Полюа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
16. Зорин И.С., Мовчан А.Б., Назаров С.А. О применении тензоров упругой емкости, поляризации и присоединенной деформации // *Исследования по упругости и пластичности.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. Вып. 16. С. 75–91.
17. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *Успехи мат. наук.* 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
18. Назаров С.А., Ромашев Ю.А. Изменение коэффициента интенсивности при разрушении перемычки между двумя коллинеарными трещинами // *Изв. АН Арм. ССР. Механика.* 1982. Т. 35. № 4. С. 30–40.
19. Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Вычисление "коэффициентов интенсивности" при сближении угловых или конических точек // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1983. Т. 23. № 2. С. 333–346.
20. Sanchez-Palencia E. Forces appliquées á une petit région de la surface d'un corps élastique. Application aux jonctions // *C.r. Acad. Sci. Paris. Ser. II.* 1988. Т. 307. P. 689–694.
21. Назаров С.А., Полякова О.Р. Разрушение узкой перемычки между трещинами, лежащими в одной плоскости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 157–165.
22. Гадыльшин Р.Р. Метод сращиваемых асимптотических разложений в задаче об акустическом резонаторе Гельмгольца // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 412–418.
23. Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A. Asymptische Theorie elliptischer Randweraufgaben in singular gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. 430 S.
24. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Асимптотика спектра задачи Неймана в сингулярно вырождающихся областях // *Алгебра и анализ.* 1990. Т. 2. № 2. С. 85–111.
25. Leguillon D., Sanchez-Palencia E. Approximation of a 2-D problem of junctions // *Comput. Mech.* 1990. V. 6. N 5/6. P. 435–455.

26. *Mampassi B.* Un type de jonction bidimensionnelle d'une tige et d'un massif elastiques // C.r. Acad. sci. Paris. Ser. II.1992. T. 315. N 3. P. 261–266.
27. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Асимптотический анализ на соединениях областей различных предельных размерностей. Тело, пронзенное тонким стержнем // Изв. РАН. Сер. мат. 1996. Т. 60. № 1. С. 3–36.
28. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
29. *Kagawa V., Yamabuchi T., Sugihara K., Shinodu T.* A finite element approach to a coupled structural-radiation system with application to loudspeaker characteristic calculation // J. Sound and Vibrat. 1980. V. 69. N 2. P. 229–243.
30. *Suzuki K., Nomoto I.* Computerized analysis and observation of the vibration modes of a loudspeaker cone // J. Audio Eng Soc., 1982. V. 30. N 3. P. 98–106.
31. *Алдошина И.А.* Электродинамические громкоговорители. М.: Радио и связь, 1989. 272 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
9.IV.1996