УДК 533.6

© 1998 г. С.В. Хабиров

ПОДМОДЕЛЬ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ СИЛ

В рамках программы ПОДМОДЕЛИ рассматривается инвариантная подмодель, построенная на подалгебре из суммы вращения, переноса по времени и галилеева переноса [1]. Проводится групповая классификация. Найдены простые решения. Подмодель приводится к симметрическому виду. Делаются утверждения о гиперболичности, характеристиках, сильных разрывах. Выводятся необходимые условия существования решений без особенности на оси симметрии и изучается их асимптотическая подмодель.

1. Уравнения подмодели и характеристики. Уравнения газовой динамики допускают 11-параметрическую непрерывную группу преобразований с алгеброй Ли L_{11} [1]. Каждой подалгебре соответствует класс групповых решений. После того как были перечислены все неподобные подалгебры, началось изучение свойств групповых решений [2–6]. Одномерным подалгебрам соответствуют инвариантные подмодели третьего ранга. Подмодель вращательных движений газа в однородном поле сил определяется инвариантными решениями одномерной подалгебры $H = \{\beta X_4 + X_7 + \beta X_{10}\}$, $\beta \neq 0$, где $X_4 = t\partial_x + \partial_u$ – оператор галилеева переноса по x, $X_7 = \partial_\theta$ – оператор вращения вокруг оси x, $X_{10} = \partial_t$ – оператор переноса по времени.

Используются цилиндрические координаты x, r, θ. Проекции вектора скорости на соответствующие цилиндрические орты обозначаются так: U, V, W. Представление инвариантного решения имеет вид

$$\begin{gathered}U = t + u(q, r, s),\quad V = v(q, r, s),\quad W = \beta^{-1}r(1 + w(q, r, s))\\ \rho = \rho(q, r, s),\quad p = p(q, r, s);\quad q = x - t^2/2,\quad s = \beta\theta - t\end{gathered} \tag{1.1}$$

Уравнения подмодели получаются подстановкой представления (1.1) в уравнения газовой динамики

$$\begin{gathered}\rho D\mathbf{u} + (p_q, p_r, \beta^2 r^{-2} p_s) = \rho\mathbf{a},\quad A^{-1}Dp + \operatorname{div}\mathbf{u} = -r^{-1}v\\ D\rho + \rho\operatorname{div}\mathbf{u} = -r^{-1}\rho v \quad \text{или} \quad DS = 0\end{gathered} \tag{1.2}$$

где

$$D = u\partial_q + v\partial_r + w\partial_s,\quad \mathbf{u} = (u, v, w),\quad \mathbf{a} = (-1, \beta^{-2}r(1+w)^2, -2r^{-1}v(1+w))$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = u_q + v_r + w_s,\quad A = \rho c^2,\quad c^2 = \partial f/\partial\rho$$

$p = f(\rho, S)$ – уравнение состояния, p – давление, ρ – плотность, S – энтропия.

Система (1.2) приводится к симметрическому виду линейной заменой скоростей

$$v^i = b^i_j u^j (u^1 = u,\ u^2 = v,\ u^3 = w),\quad u^j = c^j_i v^i,\quad b^i_j c^j_k = \delta^i_k$$

После замены ее матричная запись такова:

$$D^i \mathbf{f}_{x^i} = \mathbf{D}, \quad \mathbf{f} = (\upsilon^1, \upsilon^2, \upsilon^3, p, S)^T \tag{1.3}$$

$$\mathbf{D} = (d^1, d^2, d^3, d^4, 0)^T, \quad d^4 = -\upsilon^i (r^{-1} c_i^2 + c^j_{ix^j})$$

$$d^i = \rho b_k^i a^k + \rho b^i_{jx^n} c_k^n \upsilon^k c_m^j \upsilon^m, \quad x^1 = q, \quad x^2 = r, \quad x^3 = s$$

$$B^i = \left\| \begin{matrix} \rho c_k^i \upsilon^k & 0 & 0 & b_i^1 g^i & 0 \\ 0 & \rho c_k^i \upsilon^k & 0 & b_i^2 g^i & 0 \\ 0 & 0 & \rho c_k^i \upsilon^k & b_i^3 g^i & 0 \\ c_1^i & c_2^i & c_3^i & A^{-1} c_k^i \upsilon^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_k^i \upsilon^k \end{matrix} \right\|, \quad i = 1, 2, 3$$

$$g^1 = g^2 = 1, \quad g^3 = r^{-2}\beta^2$$

Для симметричности матриц B^i требуется выполнение шести равенств

$$c_j^1 = b_1^j, \quad c_j^2 = b_2^j, \quad c_j^3 = b_3^j \beta^2 r^{-2} \tag{1.4}$$

для определения девяти элементов матрицы $C = (c_j^i)$.

Пусть $\mathbf{c}^i = (c_1^i, c_2^i, c_3^i)^T$, тогда $|\mathbf{c}^i|^2 = g^i$, $\mathbf{c}^i \cdot \mathbf{c}^j = 0$ и матрица C определяется с точностью до вращения, если задать направление одного из векторов $\mathbf{c}^i$.

Например, пусть $\mathbf{c}^3 = (0, 0, \beta r^{-1})^T$, тогда

$$\mathbf{c}^1 = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)^T, \quad \mathbf{c}^2 = (\cos\alpha, -\sin\alpha, 0)^T$$

$$\mathbf{b}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0), \quad \mathbf{b}_3 = (0, 0, \beta^{-1} r)$$

При этом

$$d^1 = \rho(-\cos\alpha + \beta^{-2} r (1 + w)^2 \sin\alpha), \quad d^2 = \rho(\sin\alpha + \beta^{-2} r (1 + w)^2 \cos\alpha)$$

$$d^3 = -\beta^{-1} \upsilon \rho (2 + w), \quad d^4 = -r^{-1} \upsilon \rho$$

Собственные числа матриц B^i таковы:

$$\lambda_1^i = u^i, \quad \lambda_{2,3}^i = \rho u^i, \quad \lambda_{4,5}^i = \frac{1}{2} u^i \left[\rho + A^{-1} \pm ((\rho - A^{-1})^2 + 4 g^i (u^i)^{-2})^{1/2} \right]$$

Поэтому матрица B^i положительно определена, если

$$\rho > 0; \quad u^i > c \ (i = 1, 2), \quad u^3 > \beta c r^{-1} \ (i = 3)$$

Система (1.2) может иметь три инвариантные характеристики [7]

$$C_0\colon \ u h_q + \upsilon h_r + w h_s = 0 \ \text{(трехкратная энтропийная)} \tag{1.5}$$

$$C_\pm\colon \ (u h_q + \upsilon h_r + w h_s)^2 - c^2 (h_q^2 + h_r^2 + \beta^2 r^{-2} h_s^2) = 0 \tag{1.6}$$

Для существования действительных характеристик квадратичная форма в левой части уравнения (1.6)

$$Q = \xi U \xi^T, \quad U = c^{-2} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \operatorname{diag}(1, 1, \beta^2 r^{-2})$$

должна быть знакопеременна. В этом случае система (1.2) гиперболическая.

Теорема 1.1. Для фиксированного решения область гиперболичности системы (1.2) определяется неравенством

$$u^2 + \upsilon^2 + \beta^{-2} r^2 w^2 > c^2 \tag{1.7}$$

Доказательство. Собственные числа формы Q определяются из уравнения

$$f(\lambda) = \lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0$$

$$J_1 = c^{-2}\,|\,\mathbf{u}\,|^2 - 2 - \beta^2 r^{-2},\quad J_2 = 1 + 2\beta^2 r^{-2} - c^{-2}(u^2 + v^2)(1 + \beta^2 r^{-2}) - 2c^2 w^2$$

$$J_3 = \beta^{-2} r^{-2} c^{-2}(u^2 + v^2 - c^2) + c^{-2} w^2$$

По теореме Раусса ([8], с. 475), число χ положительных корней многочлена $f(\lambda)$ равно числу перемен знака в ряду выражений

$$1, -J_1, J_2 - J_3 J_1^{-1}, -J_3$$

Отсюда следуют условия, определяющие области гиперболичности. При $\chi = 1$ возможны три случая ($a = c^{-2}(u^2 + v^2) > 0$, $b = c^{-2}w^2 > 0$)

1) $J_1 > 0,\ J_2J_1 < J_3,\ J_3 > 0 \Rightarrow a + b > 2 + \beta^2 r^{-2}$

2) $J_1 < 0,\ J_2J_1 > J_3,\ J_3 > 0 \Rightarrow a + b > 1 + \beta^2 r^{-2}$

$(1 + \beta^2 r^{-2})\,(a-2) + 2b < 0$

3) $J_1 < 0,\quad J_2J_1 < J_3,\quad J_3 > 0 \Rightarrow \{a + b < 2 + \beta^2 r^{-2}, (1 + \beta^2 r^{-2})(a - 2) +$

$+2b > 0\} \cup \{a + b < 1 + \beta^2 r^{-2}, \beta^2 r^{-2} b + a > 1\}$

Объединение указанных областей приводит к утверждению теоремы.

При $\chi = 2$ возможны еще три случая противоречивых неравенств

1) $J_1 > 0,\ J_2\,J_1 > J_3,\ J_3 < 0$

2) $J_1 > 0,\ J_2\,J_1 < J_3,\ J_3 < 0$

3) $J_1 < 0,\ J_2\,J_1 > J_3,\ J_3 < 0$

Замечание. В физических переменных неравенство (1.7) принимает вид

$$U^2 + V^2 + W^2 - 2tU - 2\beta^{-1} rW + t^2 + \beta^{-2} r^2 > c^2$$

Область, определяемая этим неравенством, не совпадает с областью сверхзвукового течения. Для достаточно больших r система (1.2) гиперболична на любом решении, определенном для этих r, если $w \neq 0$.

Нормаль к инвариантной поверхности задается формулой

$$\mathbf{n} = (h_q^2 + h_r^2 + h_s^2)^{-1/2}(h_q, h_r, h_s)$$

Характеристики имеют вид

$$C_0\colon\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = u_n = 0 \tag{1.8}$$

$$C_\pm\colon\quad u_n = \pm c(h_q^2 + h_r^2 + h_s^2)^{-1/2}(h_q^2 + h_r^2 + \beta^2 r^{-2} h_s^2)^{1/2} \tag{1.9}$$

Проекция вектора скорости на нормаль характеристик $C_\pm$ зависит от положения точки на поверхности. При $r = \beta$ проекция совпадает со скоростью звука c, при $r > \beta$ она меньше c, при $r < \beta$ она больше c.

Условия на характеристиках ([9], с. 54) таковы

($D = u\partial_q + v\partial_r + w\partial_s$):

C_0: $DS = 0$

$$h_q^{-1}(\rho Du + p_q + 1) = h_r^{-1}(\rho Dv + p_r - \beta^{-2} r(1 + w)^2) =$$

$$= h_s^{-1}(\rho D(\beta^{-1} rw) + \beta r^{-1} p_s - \beta^{-1} v\,(2 + w))\quad (h = h^0) \tag{1.10}$$

$$C_\pm:\quad h_q(\rho Du + p_q + 1) + h_r(\rho Du + p_r - \beta^{-2} r(1+w)^2) +$$

$$+ r^{-1} h_s(\rho D(rw) + \beta^2 r^{-1} p_s + v\,(w+2)) = \pm \rho c (h_q^2 + h_r^2 + h_s^2)^{1/2} \times$$

$$\times (h_q^2 + h_r^2 + \beta^2 r^{-2} h_s^2)^{-1/2} (u_q + v_r + w_s + A^{-1} Dp + r^{-1} v)\ (h = h^\pm) \qquad (1.11)$$

Система (1.8)–(1.11) из восьми уравнений для функций h^0, $h^\pm$, u, v, w, p, S вместе с уравнением состояния образует характеристическую форму уравнений (1.2).

2. Линия тока и интегралы. Линия тока для подмодели (1.2) задается системой уравнений

$$L:\ dq/u = dr/v = ds/w$$

Условия на характеристике C_0 дают два интеграла движения вдоль линии тока: интеграл энтропии

$$S(q, r, s) = S(L)$$

интеграл Бернулли

$$u^2 + v^2 + \beta^{-2} r^2 w^2 + I(c^2) + 2q - \beta^{-2} r^2 = C(L) \qquad (2.1)$$

где $I(c^2) = 2\int c^2 \rho^{-1} d\rho$ – однозначная возрастающая функция, и такая, что $I \to 0$ при $c^2 \to 0$; $I \to \infty$ при $\rho \to \infty$ ([9], с. 101).

Определяется критическая скорость $c_*\ (r, q, L)$:

$$c_*^2 + I(c_*^2) = C + r^2 - 2q$$

Область гиперболичности системы можно установить, сравнивая выражение $\omega^2 = u^2 + v^2 + \beta^{-2} r^2 w^2$ с критической скоростью. Если $\omega < c$, то

$$\omega^2 + I(\omega^2) < \omega^2 + I(c^2) = C + r^2 - 2q = c_*^2 + I(c_*^2) < c^2 + I(c^2)$$

Значит, $\omega < c_* < c$.

Если $\omega > c$, то аналогичные рассуждения приводят к соотношению $\omega > c_* > c$.

Трубка тока состоит из линий тока, проходящих через начальный диск K_R радиуса R, перпендикулярный вектору $\mathbf{u}$ в центре диска. Пусть K – другое сечение трубки, а Σ – боковая поверхность тела T_R, образованного из трубки тока двумя сечениями K_R и K. На Σ скорость $\mathbf{u}$ перпендикулярна нормали $\mathbf{n}$. Интегрирование по телу третьего уравнения системы (1.2) приводит к закону сохранения расхода вдоль трубки тока

$$\int_{K_R} r\rho \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \int_K r\rho \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = Q(T_R)$$

В пределе при $R \to 0$ получается интеграл вдоль линии тока

$$r\rho|\mathbf{u}|F = Q(L)$$

где $F = \lim KK_R^{-1}$ при $R \to 0$.

3. Уравнения сильного разрыва. Инвариантная поверхность сильного разрыва h (q, r, s) имеет скорость в направлении нормали

$$D_n = (th_q + h_s)(h_q^2 + h_r^2 + \beta^2 r^{-2} h_s^2)^{-1/2}$$

Через инварианты записывается относительная скорость

$$v_n = u_n - D_n = (uh_q + vh_r + wh_s)(h_q^2 + h_r^2 + \beta^2 r^{-2} h_s^2)^{-1/2}$$

Контактный разрыв ([9], с. 38) задается равенствами

$$[p] = p_2 - p_1 = 0, \ \ u_i h_q + v_i h_r + w_i h_s = 0, \ \ i = 1, 2$$

где индексом i обозначены значения величин по разные стороны сильного разрыва.

Уравнения ударной волны имеют вид

$$[\mathbf{u}_\sigma] = 0, \ \ [\rho v_n] = 0, \ \ [p + \rho v_n^2] = 0, \ \ [v_n^2 + I] = 0$$

где $\mathbf{u}_\sigma$ – касательная составляющая вектора скорости. Последнее уравнение равносильно условию Гюгонио. Первое уравнение определяет h по заданным скачкам скорости:

$$h_q^{-1}[u] = h_r^{-1}[v] = \beta^{-2} r^2 h_s^{-1}[w]$$

Справедлива теорема Цемплена для рассматриваемой подмодели. Для состояния 1 перед фронтом ударной волны $|v_{n1}| > c_1$, для состояния 2 за фронтом ударной волны $|v_{n2}| < c_2$.

4. Групповая классификация подмодели. Система (1.2) с произвольными элементами $A = A\ (p, \rho)$, β допускает преобразования эквивалентности:

$$q' = a_1^2 q, \ \ r' = a_1^2 r, \ \ u' = a_1 u, \ \ v' = a_1 v, \ \ \rho' = a_2 \rho, \ \ p' = a_1^2 a_2 (p + a_3)$$

$$A' = a_1^2 a_2 A, \ \ s' = a_1 s, \ \ \beta' = a_1 \beta$$

Выбором параметра a_1 можно сделать $\beta' = 1$. Таким образом, параметр β подмодели (1.2) несуществен.

Результат групповой классификации системы (1.2) приводится в табл. 1, где N – номер расширения из [1], табл. 1. Ядро $N = 1$ входит во все пять алгебр Ли, r – размерность алгебры. Все алгебры являются фактор алгебрами нормализаторов подалгебры H, в соответствующих алгебрах со специальными функциями A ([1], табл. 1), по H. Функции g, встречающиеся в табл. 1, произвольные.

Ядро допускаемых алгебр – абелева алгебра. Поэтому оптимальная система подалгебр очевидна, так как нет внутренних автоморфизмов. Важен подъем подалгебр в алгебру L_{11} и установление подобия (~) с подалгебрами из [1], табл. 6. Такое соответствие дается табл. 2 с помощью преобразований из Aut L_{11} ([1], табл. 3). В табл. 2 указаны номера подалгебр из соответствующих таблиц и номера операторов. В колонке Nor указан номер (r, i) подалгебры, которая является нормализатором.

5. Простые решения. Инвариантное решение на ядре задается функциями, не зависящими от q, s. Система (1.2) при этом интегрируется: $u = u_0 + D^{-1}\int \rho r dr$, $v = Dr^{-1}\rho^{-1}$, $w = Br^{-2} - 1$, $S = S_0$, $p = f(\rho)$

Имеем

$$D^2 r^{-2} \rho^{-2} + B^2 \beta^{-2} r^{-2} + I(\rho) = C^2, \ \ I(\rho) = 2\int_0^\rho \rho^{-1} f'(\rho) d\rho \geqslant 0 \tag{5.1}$$

u_0, S_0, D, B, C – постоянные.

Теорема 5.1. Для нормального газа уравнение (5.1) определяет двузначную функцию $\rho(r)$, определенную в области $r \geqslant r_0 > 0$. Одна ветвь $\rho > \rho(r_0) = \rho_0$ монотонно возрастает, для нее радиальная скорость дозвуковая. Другая ветвь $\rho < \rho_0$ монотонно убывает, для нее радиальная скорость сверхзвуковая.

Доказательство. Для нормального газа справедливы соотношения ([9], с. 101)

$$I \to 0 \ \text{ при } \ \rho \to 0; \ \ I \to \infty \ \text{ при } \ \rho \to \infty; \ \ I_\rho > 0, \ \ f' = c^2, \ \ f'' > 0$$

Уравнение (5.1) определяет ограниченную функцию, так как при $\rho \to \infty$ уравнение

Таблица 1

N	A	Операторы	r
1	$g(\rho, p)$	$\{Y_1 = \partial_q, Y_2 = \partial_s\}$-ядро	2
3	$pg(\rho p^{-1})$	Z_p	3
9	$g(\rho)$	Z_1	3
11	ρ	Z_p, Z_1	4
13	0	$Z_{g(p)} = \rho g'(p)\partial_\rho + g(p)\partial_p$	∞

Таблица 2

r	i	Базис	Nor	Подалгебры из L_{11}	Подалгебры ([1], табл. 6)	Aut L_{11}
2	1	1,2	=2.1	1,7,4+10	3.9^0	
1	1	2+α1	2.1	α1–4–10,7+β(4+10)	~2.7	Г
1	2	1	2.1	1,7+β(4+10)	~2.11	A_{11}

не выполняется. При $r \to \infty$ имеется два предела: ненулевой $\rho \to \rho_1 > 0, I(\rho_1) = C^2$ и нулевой $r\rho \to DC^{-1}$. Итак, (5.1) определяет ограниченную двузначную функцию. При $r \to 0$ и ограниченных значениях ρ уравнение (5.1) не выполняется. Значит, ветви $\rho(r)$ определены на множестве $r \geqslant r_0 > 0$.

Величина r_0^2 может быть найдена как минимум функции

$$r^2 = R(\rho) = (D^2\rho^{-2} + B^2\beta^{-2})(C^2 - I(\rho))^{-1}$$

Имеем

$$R'(\rho) = 2(C^2 - I(\rho))^{-2} D^2\rho^{-3}[F(\rho) - C^2], \quad F(\rho) = I(\rho) + f'(\rho)(1 + B^2\rho^2\beta^{-2}D^{-2})$$

Так как $F' > 0$, то существует единственный корень ρ_0 уравнения $F(\rho) = C^2$. Тогда $r_0^2 = R(\rho_0)$.

При $\rho > \rho_0$, $r > r_0$ имеем $f'(\rho) > f'(\rho_0)$, $\rho r > \rho_0 r_0$. Значит,

$$c^2 - v^2 = f'(\rho) - D^2r^{-2}\rho^2 > f'(\rho_0) - D^2r_0^{-2}\rho_0^{2} = 0 \text{ и } R'(\rho) > 0, \quad v < c$$

При $\rho < \rho_0$, $r > r_0$ имеем

$$c^2 - v^2 < D^2(r_0^{-2}\rho_0^{-2} - r^{-2}\rho^{-2}) = D^2[I(\rho) - I(\rho_0) + B^2\beta^{-2}(r^{-2} - r_0^{-2})] < 0$$

и $R'(\rho) < 0, \quad v > c$

В физических переменных решение задается формулами

$$U = t + D^{-1}\int_{r_0}^{r} \rho r dr + u_0, \quad V = Dr^{-1}\rho^{-1}, \quad W = Br^{-1}$$

Оно определяет истечение газа из цилиндрического источника $r \leqslant r_0$ с закруткой $W \neq 0$ и постоянным ускорением вдоль оси x.

Для многих подмоделей изобарические течения задают большой класс точных решений [2]. В рассматриваемой подмодели это не так.

Теорема 5.2. Изобарические течения подмодели (1.2) задаются формулами

$$u = s + a(r), \quad v = 0, \quad w = -1, \quad \rho = \rho(r, q + s^2/2 + sa(r)), \quad p = p_0 \tag{5.2}$$

Доказательство. При $p = p_0$ система (1.2) становится переопределенной

$$Du = -1, \quad Dv = \beta^{-2} r(1+w)^2, \quad Dw = -2r^{-1} v(1+w), \quad D\rho = 0$$
$$u_q + v_r + w_s + v\, r^{-1} = 0 \quad (D = u\partial_q + v\partial_r + w\partial_s) \tag{5.3}$$

Вдоль линии тока L: $u^{-1}dq = v^{-1}dr = w^{-1}ds = d\tau$ система имеет четыре интеграла

$$\rho = \rho(L), \quad r^2(1+w) = f(L), \quad v^2 + \beta^{-2} r^2 (1+w)^2 = g^2(L), \quad u + \tau = h(L)$$

Из уравнений для линии тока получаются еще три интеграла

$$q - \tau^2/2 - \tau u = h_1(L), \quad rv - \tau v^2 - \beta^{-2}\tau r^2 (1+w)^2 = g_1(L)$$
$$s + \tau - \beta \operatorname{arctg}(\beta v r^{-1}(1+w)^{-1}) = f_1(L)$$

Исключение параметра τ дает шесть интегралов вдоль линии тока

$$\rho = a_1, \quad r^2(1+w) = a_2, \quad v^2 + \beta^{-2} r^2 (1+w)^2 = a_3$$
$$\frac{r(1+w)\operatorname{tg}((u-s)\beta^{-1}) + v\beta}{r(1+w) - \beta v \operatorname{tg}((u-s)\beta^{-1})} = a_4, \quad 2q + u^2 = a_5 \tag{5.4}$$
$$rv + uv^2 + \beta^{-2} r^2 u (1+w)^2 = a_6$$

Если все a_i постоянны, то уравнения системы (1.2) противоречивы. Пусть $a_i(\lambda)$ и будем считать, что $s = s(q, r, \lambda)$ в интегралах (5.4). Из (5.4) следует равенство $(a_3 r^2 - a_2^2 \beta^{-2})^{1/2} + (a_5 - 2q)^{1/2} a_3 = a_6$, которое связывает независимые переменные λ, q, r. Оно тождественно выполняется лишь при $a_2 = a_3 = a_6 = 0$. Значит, $v = 0$, $w = 1$, и из (5.3) следует (5.2).

В физических переменных получается решение

$$U = \beta\theta + a(r), \quad V = 0, \quad W = 0, p = p_0$$
$$\rho = \rho(r, x + (\beta\theta - t)\, a(r) + \beta\theta(\beta\theta/2 - t))$$

которое описывает неизэнтропическое обтекание плоского клина $\theta_1 < \theta < \theta_2$ прямолинейным установившимся потоком частиц, двигающихся параллельно оси x (образующая клина). При этом функция $a(r)$ должна быть монотонна и определена для всех значений r, а распределение плотности по r произвольно и нестационарно.

6. Необходимые условия существования решения без особенности на оси. Подмодель (1.2) при $r = 0$ может иметь особенность. Решение без особенностей представляется рядами по неотрицательным степеням переменной r, если ряды таковы (суммирование по целым $k \geqslant 0$)

$$u = \sum u_k r^k, \quad v = r\sum v_k r^k, \quad w = \sum w_k r^k, \quad \rho = \sum \rho_k r^k$$
$$p = P(q) + r^2 \sum p_k r^k, \quad A = \sum A_k r^k, \quad A_k = (k!)^{-1} D_r^k A(p,\rho)\,|_{r=0} = \tag{6.1}$$
$$= A_\rho^0 \rho_k + A_p^0 p_{k-2} + A_{\rho\rho}^0 \rho_1 \rho_{k-1} + A_{p\rho}^0 \rho_1 p_{k-3} + \ldots, \quad A_\rho^0 = A_\rho(P, \rho_0), \ldots$$

Величины с нижним нулевым индексом удовлетворяют уравнениям

$$D_0 u_0 = -\rho_0^{-1} P' - 1, \quad D_0 v_0 = -v_0^2 + \beta^{-2}(1+w_0)^2 - 2\rho_0^{-1} p_0$$
$$D_0 w_0 + \beta^2 \rho_0^{-1} p_{0s} = -2v_0(1+w_0), \quad D_0 \rho_0 = A_0^{-1} \rho_0 u_0 P' \tag{6.2}$$
$$u_{0q} + w_{0s} = -2v_0 - A_0^{-1} u_0 P', \quad D_0 = u_0 \partial_q + w_0 \partial_s$$

Это система типа Коши по переменной s, если $w_0 \neq 0$. Величины $P'(q)$, $A_0 = A(P, \rho_0)$, β – произвольные элементы системы (6.2).

Величины u_k, v_k, w_k, ρ_k, p_k, $k > 0$ определяются из линейных систем уравнений

$$\begin{aligned}
&D_0 u_k = -(kv_0 + u_{0q})u_k - u_{0s}w_k + P'\rho_0^{-2}\rho_k + g_1^k \\
&D_0 v_k = -v_{0q}u_k - (k+2)v_0 v_k + (2\beta^{-2}(1+w_0) - v_{0s})w_k + 2p_0\rho_0^{-2}\rho_k - (k+2)p_k + g_2^k \\
&D_0 w_k + \beta^2\rho_0^{-1}p_{ks} = -w_{0q}u_k - 2(1+w_0)v_k - (w_{0s} + (k+2)v_0)w_k + \beta^2\rho_0^{-2}p_{0s}\rho_k + g_3^k \\
&D_0\rho_k = (\rho_0 A_0^{-1}P' - \rho_{0q})u_k - \rho_{0s}w_k + (-kv_0 + A_0^{-1}u_0 P' - \rho_0 u_0 A_0^{-2}A_\rho^0 P')\rho_k + g_4^k \\
&u_{kq} + w_{ks} = -A_0^{-1}P'u_k - (k+2)v_k + u_0 A_0^{-2}A_\rho^0 P'\rho_k + g_5^k
\end{aligned} \tag{6.3}$$

g_i^k выражаются через u_j, v_j, w_j, ρ_j, p_{j-1}, $(j = 0, ..., k-1)$.

Системы уравнений (6.3) являются системами типа Коши по переменной s, если $w_0 \neq 0$. Таким образом, формальные ряды (6.1) могут быть построены. Эти ряды задают необходимое асимптотическое поведение решения без особенности вблизи оси $r = 0$.

Ряды (6.1) могут быть построены и для инвариантных ∂_s-решений. В этом случае система (6.2) имеет интегралы при $u_0 \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&A(P,\rho_0)d\rho_0 = \rho_0 dP \Rightarrow S(P,\rho_0) = S_0, \quad \text{или} \quad \rho_0 = G(P) \\
&w_0 = -1 + Cu_0\rho_0 \\
&u_0^2 + I(P) = D - 2q, \quad I = 2\int G^{-1}(P)dP > 0
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Остальные уравнения определяют

$$v_0 = -(u_{0q} + u_0\rho_0^{-1}\rho_{0q})/2, \quad p_0 = \rho_0(C^2\beta^{-2}u_0^2\rho_0^2 - v_0^2 - u_0 v_{0q})/2$$

Все величины с нулевым нижним индексом определяются с точностью до произвольной функции $P(q)$ и постоянных S_0, C, D.

Величины с номером k определяются из системы (6.3). Первые два уравнения дают v_k, p_k. Остальные уравнения образуют систему типа Коши для нахождения u_k, w_k, ρ_k.

Итак, формально инвариантное ∂_s-решение определяется с произволом в три постоянные и одну функцию.

Из интеграла (6.4) следует, что решение возможно лишь при $q \leqslant D/2$. При $q = D/2$ решение описывает состояние вакуума. Таким образом, ∂_s-решение вблизи оси $r = 0$ описывает истечение в вакуум.

При $P'' = 0$ можно рассмотреть инвариантное ∂_q-решение. Система (6.2) интегрируется:

$$\begin{aligned}
&P = P_0, \ \rho_0 = R \\
&w_0 = \frac{1}{4}C\beta^2 + B\sin(2\beta^{-1}s + \Phi), \quad v_0 = -\beta^{-1}B\cos(2\beta^{-1}s + \Phi) \\
&u_0 = -\int w_0^{-1}ds + D, \quad p_0 = \frac{1}{2}R\beta^{-2}\left(\left(1 + \frac{1}{4}C\beta^2\right)^2 - B^2\right)
\end{aligned}$$

где P_0, R, C, B, D, Φ – постоянные.

В физических переменных решение определяет π-периодическое по θ течение с давлением, не зависящим от θ, x, t вблизи оси $r = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01780).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л.В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 30–55.
2. *Овсянников Л.В.* Изобарические движения газа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1792–1799.
3. *Овсянников Л.В.* Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 3. С. 45–52.
4. *Мелешко С.В.* Групповая классификация уравнений движения газа в постоянном поле сил // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 1. С. 42–47.
5. *Мелешко С.В.* Групповая классификация уравнений двухмерных движений газа // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 56–62.
6. *Хабиров С.В.* Подмодель винтовых движений в газовой динамике // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 53–65.
7. *Хабиров С.В.* К анализу инвариантных подмоделей ранга три уравнений газовой динамики // Докл. АН. 1995. Т. 341. № 6. С. 764–766.
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
9. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.

Уфа

Поступила в редакцию
20.XI.1996