ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 62. Вып. 2, 1998

УДК 551.466.81:534.1

© 1998 г. Ю.В. Кистович, Ю.Д. Чашечкин

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ И ОБЪЕМНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ, ГРАНИЧАЩЕЙ С ПЕРЕМЕШАННЫМ СЛОЕМ

При отказе от приближения Буссинеска рассчитаны дисперсионные соотношения, скорость переноса энергии, соотношения ортогональности и полноты, а также функции, описывающие вертикальную структуру двух типов волновых возмущений (локализованных вблизи границы и объемных), существующих в экспоненциально стратифицированной среде, граничащей с однородным слоем конечной толщины, без скачка плотности.

Общая теория волн в неоднородных средах свидетельствует о необходимости более детального описания допустимых периодических движений с учетом возможности существования одновременно как поверхностных, так и объемных мод (в качестве примера можно отметить акустические волны Релея [1], поверхностные электромагнитные волны [2], таммовские (поверхностные) состояния квантовомеханических частиц [3]). Был предложен общий подход [4] к одновременному описанию объемных и поверхностных волн, дан анализ соотношений ортогональности и полноты. Представляет интерес более детальный анализ допустимых форм внутренних волн в неоднородно стратифицированной среде, моделирующей типичные состояния природных систем (океана и атмосферы), когда под или над жидкостью переменной плотности находится слой однородной жидкости без скачка плотности на границе. Анализ собственных форм движения такой среды позволяет найти полную ортонормированную систему собственных функций (волновых мод) и соответствующие дисперсионные соотношения, которые могут быть использованы при изучении эволюции и распада произвольных начальных возмущений или решении задач с источниками [5].

Рассматриваемая схема распределения плотности включает слой идеальной несжимаемой однородной жидкости толщиной a, ограниченный снизу твердым дном $z = 0$. Над этим слоем находится неограниченная по высоте экспоненциально стратифицированная жидкость с частотой плавучести $N = \sqrt{g/\Lambda}$, где g – ускорение силы тяжести, направленное против оси z. Распределение невозмущенной плотности по всей глубине жидкости может быть выражено формулой

$$\rho_0(z) = \begin{cases} \rho_{00}, & 0 < z < a \\ \rho_{00} e^{-(z-a)/\Lambda}, & z > a \end{cases} \tag{1}$$

т.е. плотность жидкости на границе слоя непрерывна, Λ – масштаб стратификации. Такое распределение плотности типично для атмосфер планет и звезд.

Монохроматическое возмущение с частотой ω, характеризуемое переменными скоростью (v_x, v_z), плотностью ρ и давлением P, описывается в линейном приближении уравнениями

$$i\omega\rho_0(z)v_x = -\partial P/\partial x, \quad -i\omega\rho_0(z)v_z = -\partial P/\partial z - \rho g$$

$$-i\omega\rho + v_z d\rho_0/dz = 0, \quad \partial v_x/\partial x + \partial v_z/\partial z = 0$$

Исключая здесь все переменные, кроме v_z, и вводя переменную

$$u = \begin{cases} v_z, & 0 < z < a \\ v_z e^{-\mu(z-a)}, & z > a, \ \mu = 1/(2\Lambda) \end{cases} \tag{2}$$

получим при отказе от приближения Буссинеска уравнение

$$(1-\zeta^2)\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial z^2 = \mu^2 u, \ \zeta^2 = N^2/\omega^2 \tag{3}$$

Таким образом, можно дать следующую математическую формулировку задачи: требуется найти функцию $u(x, z)$, удовлетворяющую при $0 < z < a$ уравнению Лапласа, а при $z > a$ – уравнению (3) с граничным условием $u(x, 0) = 0$ и ограниченную при $z \to \infty$, такую, что функция $v_z(x, z) = \{u(x, z)$ при $0 < z < a$; $u(x, z)e^{\mu(z-a)}$ при $a < z \infty\}$ непрерывно-дифференцируема в области $z > 0, -\infty < x < +\infty$.

В соответствии с общим подходом (метод разделения переменных) решение поставленной задачи ищется в виде волнового возмущения, локализованного вблизи границы однородного слоя (аналог волн на поверхности раздела, экспоненциально спадающих при удалении от нее)

$$u = \begin{cases} (Ae^{i\lambda_0 z} + Be^{-i\lambda_0 z})e^{ikx}, & 0 < z < a \\ Ce^{i\lambda(z-a)}e^{ikx}, & z > a, \ \operatorname{Im}\lambda > 0 \end{cases} \tag{4}$$

а также в виде обычных внутренних волн [5], распространяющихся в толще стратифицированной жидкости и отражающихся от однородного слоя

$$u = \begin{cases} (A_1 e^{i\lambda_1 z} + B_1 e^{-i\lambda_1 z})e^{ik_p x}, & 0 < z < a \\ C_1[e^{-ip(z-a)} + \alpha(p)e^{ip(z-a)}]e^{ik_p x}, & z > a, \ \operatorname{Im} p = 0 \end{cases} \tag{5}$$

где $\alpha(p)$ – коэффициент отражения.

Если толщина однородного слоя стремится к нулю, эти волны переходят в известные бегущие внутренние волны. Их свойства, в том числе геометрия отражения от плоской жесткой границы (с учетом диссипативных эффектов), детально изучены [6]. Заметим, что верхние строчки в (4) и (5) – частные решения уравнения Лапласа, а нижние – частные решения уравнения (3). Ниже будут подробно рассмотрены только локализованные волны (4), для объемных внутренних волн будут сформулированы окончательные результаты.

Подставляя частное решение (4) в уравнение (3) и приравнивая нулю определитель получающейся однородной системы линейных уравнений относительно амплитуд, получим два дисперсионных уравнения, связывающие λ_0, λ и k:

$$k^2 + \lambda_0^2 = 0, \ (1-\zeta^2)k^2 + \lambda^2 = -\mu^2 \tag{6}$$

Выражая с помощью (4) компоненты скорости v_x и v_z и учитывая их непрерывность при $z = a$, а также равенство нулю компоненты v_z при $z = 0$, получаем

$$i\lambda_0(e^{i\lambda_0 a} + e^{-i\lambda_0 a}) = (\mu + i\lambda)(e^{i\lambda_0 a} - e^{-i\lambda_0 a}) \tag{7}$$

Будем для определенности рассматривать локализованные волновые возмущения, распространяющиеся вправо вдоль оси x $(k > 0)$, тогда из (6) имеем

$$\lambda_0 = ik, \ \lambda = i\mu_*(k), \ \mu_*(k) = \sqrt{\mu^2 + (1-\zeta^2)k^2} \tag{8}$$

что после подстановки в (7) дает

$$\mu - \mu_*(k) = k \operatorname{cth} ka \tag{9}$$

откуда устанавливается связь между ω и k, т.е. дисперсионное уравнение локализованных волн

$$\omega^2(k) = gk/(\operatorname{cth} ka - k\Lambda/\operatorname{sh}^2 ka) \tag{10}$$

Правая часть равенства (10) – четная функция k, поэтому предположение о положительности k не ограничивает общности дальнейшего рассмотрения.

Локализованные возмущения с дисперсией (10) существуют не при всех k, так как, поскольку $\omega^2 > 0$ и $k \operatorname{cth} ka > 0$, левая часть равенства (9) и выражение в круглых скобках в (10) должны быть положительными. Эти условия эквивалентны неравенствам $a > \Lambda$, $k < k_c$, где k_c – корень уравнения $k_c\Lambda \operatorname{cth} k_c a = 1$, причем, как следует из (10), $\omega(k_c) = N$.

Условие неотрицательности подкоренного выражения в (8) выполняется автоматически, ибо в силу (10) оно эквивалентно неравенству $(\mu - k \operatorname{cth} ka)^2 \geqslant 0$.

При малых k дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega = kv\,, \quad v = a\sqrt{g/(a-\Lambda)}$$

когда фазовая и групповая скорости не зависят от длины волны, а при больших k оно асимптотически стремится к функции $\omega = \sqrt{kg}$. Поскольку область существования локализованных волн ограничена частотами $0 < \omega < N$, асимптотическое значение не достигается, и на границе области существования $\omega = N$ имеет место конечный скачок Δk между точной дисперсионной характеристикой (10) и ее асимптотой.

Необходимо подчеркнуть, что существование локализованных волн связано с отказом от приближения Буссинеска (когда в задаче появляется дополнительный внутренний масштаб Λ). Локализованные волны и бегущие объемные волны существуют в одном и том же диапазоне частот.

Используя выражения для объемной плотности энергии w и плотности потока энергии $\mathbf{J}$ [7], можно ввести естественные для локализованных состояний продольную плотность энергии W и фронтальную плотность потока энергии S

$$W = \int_0^\infty w dz, \quad S = \int_0^\infty J_x dz$$

а также скорость переноса энергии $v_e = S/W$. Заметим здесь, что для исследуемых локализованных состояний $J_z = 0$, т.е. энергия переносится строго в направлении оси x. Подробные вычисления показывают, что скорость переноса энергии совпадает с групповой скоростью локализованных волн, т.е. $v_e = v_g = \partial\omega(k)/\partial k$; при этом жидкие частицы в локализованной волне движутся по замкнутым эллиптическим траекториям, отношение вертикальной и горизонтальной осей которых зависит от z:

$$\left|\frac{v_z}{v_x}\right| = \begin{cases} \operatorname{th} kz, & 0 < z < a \\ \operatorname{th} ka, & z > a \end{cases} \tag{11}$$

Вертикальные смещения равны нулю на дне (частицы движутся горизонтально) и увеличиваются с ростом z, достигая при $z = a$ максимального значения, после чего отношение осей эллипса смещений сохраняет постоянное значение $\operatorname{th} ka$ выше, в стратифицированной части жидкости.

Рассмотрение трехмерной задачи при отсутствии источников приводит к следующей ее формулировке: требуется найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую при $0 < z < a$ уравнению Лапласа, а при $z > a$ – уравнению

$$(1-\zeta^2)\Delta_1 u + \partial^2 u/\partial z^2 = \mu^2 u, \quad \Delta_1 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \tag{12}$$

с граничным условием $u(x, y, 0) = 0$ и ограниченную при $z \to \infty$, такую, что функция $v_z(x, y, z) = \{u(x, y, z)$ при $0 < z < a$; $u(x, y, z)e^{\mu(z-a)}$ при $a < z < \infty\}$ непрерывно-дифференцируема в области $z > 0, -\infty < x, y < +\infty$.

Поскольку в задаче имеется выделенное направление (ось z), естественно разделить переменные z и (x, y). Полагая $u = F(x, y)f(z)$, подставляя это в уравнение Лапласа и в уравнение (12) и разделяя переменные, получим, что функции $f(z)$ и $F(x, y)$ удовлетворяют уравнениям

$$d^2 f / dz^2 + k_{z0}^2 f = 0,\ \ 0 < z < a,\ \ d^2 f / dz^2 + k_z^2 f = 0,\ \ a < z < \infty$$
$$\Delta_1 F - k_{z0}^2 F = 0,\ \ \Delta_1 F - (\mu^2 + k_z^2)/(1 - \zeta^2)F = 0 \tag{13}$$

где k_{z0}^2 и k_z^2 – константы разделения для уравнения Лапласа и уравнения (12) соответственно. Последние два уравнения в (13) должны выполняться при любом z. Это условие задает связь между k_{z0}^2 и k_z^2.

$$k_{z0}^2 = (\mu^2 + k_z^2)/(1 - \zeta^2) \tag{14}$$

Общие решения первых двух уравнений в (13) имеют вид

$$f = c_{10}e^{ik_{z0}z} + c_{20}e^{-ik_{z0}z},\ \ 0 < z < a$$
$$f = c_1 e^{ik_z z} + c_2 e^{-ik_z z},\ \ a < z < \infty \tag{15}$$

Используя равенство нулю u при $z = 0$ и непрерывную дифференцируемость v_z при $z = a$, найдем связь между коэффициентами c_{10}, c_{20}, c_1 и c_2. Получим

$$c_{10} = -c_{20} = (c_1 + c_2)/(2i \sin k_{z0}a)$$
$$ik_{z0}(c_1 + c_2)\operatorname{ctg} k_{z0}a = (\mu + ik_z)c_1 + (\mu - ik_z)c_2 \tag{16}$$

Теперь задача состоит в том, чтобы выяснить, какие значения может принимать k_z. В общем случае k_z – комплексное число. Если $\operatorname{Im} k_z \neq 0$, то одна из амплитуд c_1, c_2 должна обращаться в нуль, чтобы величина u не возрастала неограниченно при $z \to \infty$. Если же $\operatorname{Im} k_z = 0$, то каждая из амплитуд c_1, c_2 может отличаться от нуля, поскольку при этом неограниченного роста u не происходит. Рассмотрим эти случаи раздельно.

Пусть $k_z = \lambda$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$. В этом случае должно быть $c_2 = 0$ и u экспоненциально спадает при удалении от уровня $z = a$, что соответствует локализованным состояниям. Полагая $k_{z0} = ik$ и используя равенства (14) и (16), получим соотношение (9).

Пусть $k_z = p$, $\operatorname{Im} p = 0$. В этом случае $c_1, c_2 \neq 0$, и из (16) находим

$$\alpha(p) \equiv \frac{c_1}{c_2} = \frac{ik_{z0} - (\mu + ip)\operatorname{th} k_{z0}a}{ik_{z0} - (\mu - ip)\operatorname{th} k_{z0}a}$$

где k_{z0} выражается через p с помощью равенства (14). Возмущение при этом состоит из падающей на границу $z = a$ волны e^{-ipz} и отраженной от нее волны $\alpha(p)e^{ipz}$, так что этот случай соответствует объемным волнам. При этом p – любое положительное число.

Из проведенного рассмотрения следует, что в областях жидкости, свободных от источников, полное поле может быть представлено в виде суперпозиции найденных общих решений для локализованных и объемных волн

$$u(x, y, z) = F_s(x, y)\varphi_s(z) + \int_0^\infty F_v(x, y, p)\varphi_v(z, p)dp \tag{17}$$

причем функции $F_s(x, y)$ и $F_v(x, y, p)$ удовлетворяют уравнениям

$$(\Delta_1 + k^2(\omega))F_s(x,y) = 0,\ (\Delta_1 + k_p^2(\omega))F_v(x,y,p) = 0 \tag{18}$$

Зависимость $k(\omega)$ дается соотношением (10), а продольное волновое число объемных волн k_p определяется формулой

$$k_p^2 = (p^2 + \mu^2)/(\zeta^2 - 1)$$

Конкретный вид функций $F_s(x, y)$ и $F_v(x, y, p)$, задающих продольную структуру локализованных и объемных волн, определяется источниками возмущения и граничными условиями по горизонтальным координатам с учетом постановки конкретной задачи.

Функции $\varphi_s(z)$ и $\varphi_v(z, p)$, описывающие вертикальную структуру локализованного и объемных возмущений, имеют вид

$$\varphi_s(z) = \left[-\frac{2i\lambda(\mu - i\lambda)\operatorname{sh}2ka}{\mu\operatorname{sh}2ka - 2i\lambda ka}\right]^{1/2}\begin{cases}\operatorname{sh}kz/\operatorname{sh}ka, & 0 < z < a\\ e^{i\lambda(z-a)}, & z > a\end{cases}$$

$$\varphi_v(z,p) = [2\alpha(p)]^{-1/2}\begin{cases}-\dfrac{2ip\operatorname{sh}k_pz}{k_p\operatorname{ch}k_pa - (\mu + ip)\operatorname{sh}k_pa}, & 0 < z < a\\ e^{-p(z-a)} + \alpha(p)e^{ip(z-a)}, & z > a\end{cases} \tag{19}$$

$$\lambda = i(\mu - k\operatorname{cth}ka),\quad \alpha(p) = -\frac{k_p - (\mu - ip)\operatorname{th}k_pa}{k_p - (\mu + ip)\operatorname{th}k_pa}$$

Они удолетворяют соотношениям ортогональности и полноты

$$\int_0^\infty h(z)\varphi_s^2(z)dz = 1,\quad \int_0^\infty h(z)\varphi_s(z)\varphi_v(z,p)dz = 0$$

$$\int_0^\infty h(z)\varphi_v(z,p)\varphi_v(z,q)dz = \delta(p-q);\quad p,q > 0 \tag{20}$$

$$h(z)\left[\varphi_s(z)\varphi_s(z') + \int_0^\infty \varphi_v(z,p)\varphi_v(z',p)dp\right] = \delta(z-z')$$

с весовой функцией

$$h(z) = \begin{cases}(1-\zeta^2), & 0 < z < a\\ 1, & z > a\end{cases}$$

Соотношение полноты (последнее равенство (20)) доказывает справедливость представления (17), а соотношения ортогональности (первые три равенства (20)) позволяют по известному распределению $u(x, y, z)$ разделить локализованное и объемное поля, а также найти амплитуды $F_s(x, y)$ и $F_v(x, y, p)$ по формулам

$$F_s = \int_0^\infty h(z)u(x,y,z)\varphi_s(z)dz,\quad F_v = \int_0^\infty h(z)u(x,y,z)\varphi_v(z,p)dz \tag{21}$$

Соотношения ортогональности позволяют также очень удобно решать задачи о возбуждении поля заданным распределением источников.

Для океана и внутренних водоемов характерно, что перемешанный слой находится над стратифицированной жидкостью и имеет свободную поверхность. Здесь также возникают локализованные волны, дисперсия которых описывается неявным уравнением

$$\mu+\mu_*(k)=k\frac{kg\,\mathrm{ch}\,ka-\omega^2\,\mathrm{sh}\,ka}{\omega^2\,\mathrm{ch}\,ka-kg\,\mathrm{sh}\,ka} \tag{22}$$

Для существования этих волн отказ от приближения Буссинеска необязателен. В отличие от придонных локализованных волн, рассмотренных выше, они возникают только при $\omega > N$. При большой толщине перемешанного слоя эти волны совпадают с волнами на свободной поверхности однородной жидкости.

Проведенный анализ показывает, что даже в модели идеальной среды на границе слоя однородной жидкости, примыкающего к стратифицированной, существуют специфические поверхностные волны даже в отсутствие скачка плотности на его границе. Важно также, что поверхностные локализованные состояния возникают в том же диапазоне частот ($\omega < N$), что и распространяющиеся объемные волны, в отличие от случая поверхностных возмущений на скачке плотности, существующих только при $\omega > N$.

Учет диссипативных факторов приводит к дальнейшему усложнению картины течения и появлению дополнительных пограничных течений с собственными масштабами локализации, отличающимися от волновых.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стретт Дж.В.* Теория звука. Т. 2. Гостехиздат, 1955. 476 с.
2. Поверхностные поляритоны. Электромагнитные волны на поверхностях и границах раздела сред // Под ред. В.М. Аграновича и Д.Л. Миллса. М.: Наука, 1985. 525 с.
3. *Дэвисон С., Левин Дж.* Поверхностные (таммовские) состояния. М.: Мир, 1973. 232 с.
4. *Шевченко В.В.* О спектральном разложении по собственным и присоединенным функциям одной несамосопряженной задачи Штурма–Лиувилля на всей оси // Дифферен. уравнения. 1979. Т. 15. № 11. С. 2004–2020.
5. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
6. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Отражение пучков внутренних гравитационных волн от плоской жесткой поверхности // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 607–613.
7. *Чашечкин Ю.Д., Кистович Ю.В.* Геометрия и энергетика пучков внутренних волн // Докл. РАН. 1995. Т. 344. № 5. С. 684–686.

Москва

Поступила в редакцию
16.IV.1996