УДК 532.5:534.1

© 1998 г. В.А. Боровиков

ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ИСТОЧНИКА В СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА

Рассматривается поле, возбуждаемое движущимся осциллирующим источником в двумерной линейной среде с дисперсией (например, источником поверхностных волн). Предполагается, что скорость источника совпадает с групповой скоростью, соответствующей его частоте осцилляций (с учетом доплеровского сдвига), т.е. что возникает резонанс. Описана асимптотика волнового поля в дальней зоне при больших временах t. В частности, в окрестности нуля возникает резонансная зона, в которой волновое поле имеет порядок единицы и выше и размер которой возрастает как $t^{2/3}$ в критических направлениях, т.е. в направлениях, перпендикулярных дисперсионной кривой в точке ее самопересечения. В направлениях, отличных от критических, размер резонансной зоны растет как $t^{1/2}$. Рассмотрен также случай вырожденной стационарной точки дисперсионной функции. Тогда возникает более острый резонанс и поле растет как $t^{1/6}$. Кратко рассмотрена трехмерная задача.

В общей теории полей, возбуждаемых осциллирующими источниками волн, предполагается [1, 2], что установившиеся колебания, возбуждаемые источником, осциллирующим с частотой ω_0, описываются интегралом Фурье

$$q = \exp(i\omega_0 t)\iint \frac{F(\lambda,\ \mu)\exp(-i(\lambda x + \mu y))}{B(\omega_0,\ \lambda,\ \mu)} d\lambda d\mu \tag{0.1}$$

(рассматривается двумерная задача). Здесь $B(\omega, \lambda, \mu) = 0$ – дисперсионное уравнение. Иными словами, предполагается, что в рассматриваемой среде волновое поле может иметь вид плоской волны $\exp i(\omega t - \lambda x - \mu y)$, лишь если $B(\omega, \lambda, \mu) = 0$.

Если осциллирующий источник движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$, то установившееся поле в движущейся вместе с источником системе координат $\hat{x} = x - V_x t$; $\hat{y} = y - V_y t$ также описывается интегралом (0.1), если в показателе экспоненты x, y заменить на $\hat{x}, \hat{y}$, а дисперсионную функцию $B(\omega_0, \lambda, \mu)$ – на $\hat{B}(\omega_0, \lambda, \mu) = B(\omega_0 - V_x\lambda - V_y\mu,\ \lambda,\ \mu)$.

При вычислении интеграла (0.1) возникает проблема регуляризации, т.е. вопрос о том, как понимать интеграл (0.1) в окрестности нулей функции $B(\omega_0, \lambda, \mu)$. Естественные физические соображения, сводящиеся к тому, что исключается поступление энергии из бесконечности, приводят к принципу излучения, согласно которому интеграл (0.1) следует понимать как предел ([1, 2]):

$$q = \lim_{\varepsilon \to +0} \exp(i\omega_0 t)\iint \frac{F(\lambda,\ \mu)\exp - i(\lambda x + \mu y))}{B(\omega_0 - i\varepsilon,\ \lambda,\ \mu)} d\lambda d\mu \tag{0.2}$$

Ниже рассматривается случай, когда кривая $B = 0$ имеет особые точки, в которых частные производные функции B по λ и μ обращаются в нуль. Тогда интеграл в правой части (0.2) растет при $\varepsilon \to 0$ как $\ln \varepsilon$. Будет показано, что в этом случае вообще не существует установившихся колебаний. Если осциллирующий источник включается и начинает движение в некоторый момент времени t_0, то при $t \to \infty$ поле не стремится к выражению вида $\exp(i\omega_0 t)q(\hat{x},\ \hat{y})$, а логарифмически растет. Причина заключается в том, что при наличии у дисперсионной кривой особой точки $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ групповая скорость колебаний с частотой ω_0 (в движущейся системе координат $\hat{x}$, $\hat{y}$ и с учетом доплеровского сдвига частоты) равна нулю. Поэтому в фиксированную точку наблюдения $\hat{x} = \text{const}$, $\hat{y} = \text{const}$ при некотором $t = t_1 > t_0$ колебания, возбужденные при всех t в интервале $t_0 < t < t_1$, приходят с одной и той же фазой и суммируются по модулю, т.е. имеет место явление резонанса. При этом, как будет показано ниже, для любой среды и любой точки $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ можно выбрать такие скорость **V** движения источника и частоту ω_0 его осцилляций, чтобы эта точка была особой точкой кривой $\hat{B} = 0$ и имело место явление резонанса.

Движение осциллирующего источника поверхностных волн с резонансной скоростью рассматривалось в случае, когда спектральная плотность $F(\lambda, \mu)$ в особой точке $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ дисперсионной кривой обращается в нуль [3]. Поэтому здесь не возникает эффектов накопления, и поле при $t \to \infty$ стремится к конечному пределу.

Ниже находится асимптотика дальнего поля при больших t в случае резонанса и выписаны выражения для логарифмически растущей компоненты поля. Кратко рассматривается трехмерная задача. В этом случае поле стремится к конечному пределу при $t \to \infty$, но тем не менее эффекты резонанса и накопления поля приводят к качественному изменению поведения поля в дальней зоне.

1. Интегральное представление поля движущегося источника. Будем рассматривать среду, в которой поле источника q с зависимостью от времени вида $\delta(t)$ имеет вид

$$q(t,\ x,\ y) = \iint F(\lambda,\ \mu) \exp i(-\lambda x - \mu y + t\omega(\lambda,\ \mu)) d\lambda d\mu \tag{1.1}$$

Функции $F(\lambda, \mu)$ и $\omega(\lambda, \mu)$ зависят от рассматриваемой задачи. Например, в задаче Коши – Пуассона для поверхностных волн на глубокой воде ($q(t, x, y)$ – возвышение свободной поверхности) функция Грина состоит из двух слагаемых вида (1.1) с $\omega = \pm\sqrt{kg + k^3\gamma}$, где $k = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, g – ускорение свободного падения, γ – коэффициент поверхностного натяжения.

Функция Грина для поля внутренних гравитационных волн представляется в виде суммы мод; поле n-й моды также представляется в виде суммы двух слагаемых вида (1.1) с $\omega = \pm\omega_n(k)$ и $F = \text{const}\ \varphi_n(k, z)\varphi_n(k, z_0)\omega_n(k)k^{-2}$, где $\omega_n(k)$ и $\varphi_n(k, z)$ – собственные числа и собственные функции вертикальной спектральной задачи [4]

$$\varphi'' + k^2\omega^{-2}(N^2(z) - \omega^2)\varphi = 0$$

с нулевыми граничными условиями на поверхности $z = 0$ и дне $z = -H$ и собственными функциями, нормированными с весом $N^2(z)$. Здесь k – свободный параметр, ω – спектральный параметр, квадрат частоты Брента – Вяйссяля $N^2(z) = -g\rho_0^{-1}(z)d\rho_0/dz$.

Таким образом, в трехмерной задаче о распространении внутренних гравитационных волн в слое $-H \leqslant z \leqslant 0$ стратифицированной жидкости глубина z входит в качестве параметра. Полученные ниже результаты о росте поля справедливы для любой характеристики поля внутренних гравитационных волн, в интегральном представлении (1.1) у которой спектральная плотность $F(\lambda, \mu)$ не обращается в нуль в особой точке λ_0, μ_0 дисперсионной кривой $B(\lambda, \mu, \omega_0)$ и, в частности, для возвышения.

Поле $W(t, x, y)$ источника, начинающего при $t = 0$ движение со скоростью $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ и осциллирующего с частотой ω_0 может быть записано в форме

$$W(t,\ x,\ y) = \exp(i\omega_0 t)\hat{W}(t,\ \hat{x},\ \hat{y});$$

$$\hat{W}(t,\ \hat{x},\ \hat{y}) = \int_0^t d\tau \iint_{-\infty}^{\infty} F(\lambda,\ \mu)\exp(i(-\lambda\hat{x} - \mu\hat{y} + \hat{\omega}(\lambda,\ \mu)\tau))d\lambda d\mu$$

$$\hat{\omega}(\lambda,\ \mu) = \omega(\lambda,\ \mu) - \lambda V_x - \mu V_y - \omega_0$$

где $\hat{x} = x - V_x t$, $\hat{y} = y - V_y t$ – система координат, движущаяся вместе с источником.

Далее будет рассматриваться асимптотика $\hat{W}$ при больших t, $r=\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}$. В эту асимптотику дают вклад особые точки функций $\hat{\omega}(\lambda, \mu)$ и $F(\lambda, \mu)$. Например, для поверхностных волн функция $\omega(\lambda, \mu)$ ведет себя при $k=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\to 0$ как $\sqrt{k}$; для внутренних гравитационных волн эта функция ведет себя при $k\to 0$ как k, а амплитудный множитель $F(\lambda, \mu)$ – как k^{-1}.

Можно показать, что вклад особой точки $\lambda=\mu=0$ в асимптотику дальнего поля при фиксированном t и $r\to\infty$ имеет порядок $r^{-3/2}$ для поверхностных волн и r^{-1} для внутренних. Оставим в стороне вклады в асимптотику $\hat{W}$ от подобных особых точек и рассмотрим слагаемые в асимптотике, определяемые особыми точками поверхности $\hat{\omega}=0$, т.е. значениями λ, μ, для которых $\hat{\omega}$ – регулярная функция, но $\hat{\omega}=\partial\hat{\omega}/\partial\lambda=$ $=\partial\hat{\omega}/\partial\mu=0$.

Как было указано выше, для любых λ_0, μ_0 можно выбрать такие скорость $\mathbf{V}$ источника и частоту его осцилляций ω_0, чтобы точка λ_0, μ_0 оказалась особой точкой поверхности $\hat{\omega}=0$. Для этого следует положить

$$V_x=\frac{\partial\omega}{\partial\lambda},\quad V_y=\frac{\partial\omega}{\partial\mu};\quad \omega_0=\omega(\lambda_0,\ \mu_0)-\lambda_0V_x-\mu_0V_y$$

где производные $\partial\omega/\partial\lambda$ и $\partial\omega/\partial\mu$ берутся в точке λ_0, μ_0.

Положим $\lambda=\lambda_0+\eta$, $\mu=\mu_0+\zeta$. Разложение $\hat{\omega}$ по степеням η, ζ имеет вид

$$\hat{\omega}(\lambda_0+\eta,\ \mu_0+\zeta)=\omega_2(\eta,\ \zeta)+\omega_3(\eta,\ \zeta)+O(\eta^2+\zeta^2)^2 \tag{1.2}$$

$$\omega_2(\eta,\ \zeta)=A\eta^2+B\zeta^2;\quad \omega_3(\eta,\ \zeta)=C\eta^3+D\eta^2\zeta+E\eta\zeta^2+F\zeta^3$$

(в случае необходимости проводим поворот осей λ, μ). Переходя к переменным интегрирования $\eta=\lambda-\lambda_0$, $\zeta=\mu-\mu_0$, получим

$$\hat{W}(t,\ \hat{x},\ \hat{y})=\exp i(-\lambda_0\hat{x}-\mu_0\hat{y})\tilde{W}(t,\ \hat{x},\ \hat{y}) \tag{1.3}$$

$$\tilde{W}(t,\ \hat{x},\ \hat{y})=\int_0^t Jd\tau$$

$$J=\iint_{-\infty}^{\infty} G(\eta,\ \zeta)\exp(i(-\eta\hat{x}-\zeta\hat{y}+\tilde{\omega}(\eta,\ \zeta)\tau))d\eta d\zeta \tag{1.4}$$

$$\tilde{\omega}(\eta,\ \zeta)=\hat{\omega}(\lambda_0+\eta,\ \mu_0+\zeta),\quad G(\eta,\ \zeta)=F(\lambda_0+\eta,\ \mu_0+\zeta)$$

Будем полагать, что стационарная точка $O=(0, 0)$ функции $\tilde{\omega}(\eta, \zeta)$ невырожденная, т.е. $A\neq 0$, $B\neq 0$. Используя обычную технику разложения единицы, будем считать, что $G(\eta, \zeta)$ – бесконечно-дифференцируемая финитная функция, и что в области $\mathrm{supp}\, G$ функция $\tilde{\omega}(\eta, \zeta)$ аналитична и имеет единственную стационарную точку O.

Если $AB>0$, то O – изолированная точка множества $\Omega:\tilde{\omega}(\eta,\ \zeta)=0$. Если же $AB<0$, то O – точка самопересечения кривой Ω; будем полагать в этом случае, что ветви Ω имеют в O ненулевую кривизну, т.е. что на касательных $\zeta=\pm\eta\sqrt{-B/A}$ к ветвям Ω кубический полином $\omega_3(\eta, \zeta)$ не обращается в нуль.

2. Асимптотика интеграла (1.4) при $r=\sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2}\gg 1$, $t=O(r)$. Эта асимптотика определяется, во-первых, стационарными точками фазовой функции в трехкратном интеграле (1.4) и, во-вторых, асимптотикой интеграла J при $\tau \to \infty$. Стационарные точки фазовой функции $\Phi(\tau, \eta, \zeta) = -\eta\hat{x} - \zeta\hat{y} + \tilde{\omega}(\eta, \zeta)\tau$ задаются уравнениями $\Phi'_\eta = \Phi'_\zeta = \Phi'_\tau = 0$, откуда $\tilde{\omega}'_\eta = \hat{x}/\tau$, $\tilde{\omega}'_\zeta = \hat{y}/\tau$, $\tilde{\omega} = 0$. Из этих уравнений следует, что при заданных $\hat{x}$, $\hat{y}$ стационарная точка $P = (\eta, \zeta)$ – это точка на кривой Ω, в которой $\operatorname{grad}\tilde{\omega}$ параллелен вектору $(\hat{x}, \hat{y})$. Если направления этих векторов противоположны, то значение τ в стационарной точке фазовой функции отрицательно и в области интегрирования по τ в (1.4) стационарные точки отсутствуют. Если же векторы $(\hat{x}, \hat{y})$ и $\operatorname{grad}\tilde{\omega}$ направлены в одну сторону, то значение τ в стационарной точке равно (r, φ – полярные координаты на плоскости $\hat{x}$, $\hat{y}$)

$$\tau_0 = r / |\operatorname{grad}\tilde{\omega}(P)|; \quad (\hat{x} = r\cos\varphi, \ \hat{y} = r\sin\varphi) \tag{2.1}$$

Если начало координат O – точка самопересечения дисперсионной кривой Ω (т.е. в разложении (1.2) $AB < 0$) и направление φ стремится к направлению нормали к какой-либо из ветвей кривой Ω в точке O (т.е. $\operatorname{tg}\varphi \to \pm\sqrt{-B/A}$), то $P \to O$, $|\operatorname{grad}\tilde{\omega}(P)| \to 0$ и $\tau_0/r \to \infty$. Этот случай рассмотрим ниже, а сейчас ограничимся направлениями φ, отличными от $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{-B/A}$, $\pi \pm \operatorname{arctg}\sqrt{-B/A}$ и значениями $t = O(r)$.

В этих условиях асимптотика интеграла (1.4) определяется, во-первых, вкладом U_1 стационарной точки (τ_0, P) (если эта точка попадает в область интегрирования) т.е. при $t > \tau_0 > 0$, и, во-вторых, вкладом U_2 границ области интегрирования, т.е. плоскостей $\tau = 0$ и $\tau = t$. Впрочем, плоскость $\tau = 0$ не дает вклада в асимптотику интеграла (1.4), поскольку при больших r и достаточно малых τ в области $\operatorname{supp} G(\eta, \zeta)$ фазовая функция во внутреннем интеграле в (1.4) не имеет стационарных точек и интеграл убывает быстрее любой степени r.

Вычисление U_1 и U_2 проводится методом стационарной фазы. Вклад стационарной точки (τ_0, P) фазовой функции равен

$$U_1 = \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{(2\pi)^{3/2} G(P)}{|\operatorname{grad}\tilde{\omega}|} \exp i\left(-\eta_P\hat{x} - \zeta_P\hat{y} - \frac{\pi\delta}{4}\right) \tag{2.2}$$

Здесь R – радиус кривизны кривой Ω в точке P; $\delta = 1$, если эта кривая выпукла в окрестности P (т.е. если $\tilde{\omega}''_{\sigma\sigma} > 0$, где $d/d\sigma$ – дифференцирование в направлении, касательном к Ω в точке P) и $\delta = -1$ в противном случае.

Вклад границы области интегрирования $\tau = t$ в интеграл (1.4) равен

$$U_2 = \frac{-2\pi i G(Q) \exp i(-\eta_Q\hat{x} - \zeta_Q\hat{y} + t\tilde{\omega}(Q) + \pi\gamma/2)}{t\tilde{\omega}(Q)\sqrt{|D|}}$$

$$D = \tilde{\omega}''_{\eta\eta}(Q)\tilde{\omega}''_{\zeta\zeta}(Q) - (\tilde{\omega}''_{\eta\zeta}(Q))^2$$

$\gamma = \operatorname{sign}\tilde{\omega}''_{\eta\eta} = \operatorname{sign}\tilde{\omega}''_{\zeta\zeta}$ при $D > 0$, $\gamma = 0$ при $D < 0$.

Точка $Q = (\eta_Q, \zeta_Q)$ определяется из уравнений

$$\tilde{\omega}'_\eta = \hat{x}/t, \quad \tilde{\omega}'_\zeta = \hat{y}/t \tag{2.3}$$

Заметим, что если область $\operatorname{supp} G$ достаточно мала, то в ней решение уравнений (2.3) единственно.

Асимптотика интеграла (1.4) при $r \gg 1$, $t = O(r)$ имеет вид

$$U = U_1\chi(t|\operatorname{grad}\tilde{\omega}| - r) + U_2 \tag{2.4}$$

где функция $\chi(t|\mathrm{grad}\,\tilde\omega| - r) = \chi(t/\tau_0 - 1) = 1$ при $0 < \tau_0 < t$ (т.е. когда точка (τ_0, P) попадает в область интегрирования) и $\chi = 0$ в противном случае.

Таким образом, рассматриваемое поле U представляет собой волну, распространяющуюся в направлении φ со скоростью $v = |\mathrm{grad}\tilde\omega(P)|$; перед фронтом $r = vt$ поле U совпадает с U_2 и имеет порядок t^{-1}, за фронтом главный член асимптотики U совпадает с U_1, имеет порядок $r^{-1/2}$ и не зависит от t. Если же $r \to vt$, то точка Q стремится к P, $\tilde\omega(Q) \to 0$, $U_2 \to \infty$ и асимптотика (2.4) делается непригодной. В этом случае стационарная точка (τ_0, Q) фазовой функции оказывается вблизи границы $\tau = t$ области интегрирования. Поэтому асимптотика интеграла (1.3), применимая в окрестности фронта, выражается через интеграл Френеля [5].

3. Приведение интеграла (1.4) при $t, r \gg 1$, $r/t \to 0$ к однократному интегралу. При последующем росте t, когда $r/t \to 0$, решение Q системы (2.3) стремится к стационарной точке функции $\tilde\omega(\eta, \zeta)$. Если бы в этой точке функция $\tilde\omega$ не равнялась нулю (т.е. если бы кривая Ω не имела бы в области supp G точек самопересечения), то при $t \to \infty$ функция U_2 стремилась бы к нулю. В этом случае интеграл (1.4) стремится при $t \to \infty$ к конечному пределу; его асимптотика в дальней зоне совпадает с U_1 и определяется точкой P на кривой Ω, в которой $\mathrm{grad}\,\tilde\omega$ параллелен вектору $\mathbf{r} = (\hat x, \hat y)$ и направлен в ту же сторону, что и этот вектор. Эта асимптотика совпадает с выражением, полученным ранее [1, 2].

В рассматриваемой задаче $\tilde\omega = 0$ в стационарной точке, и функция $\tilde\omega(Q)$ стремится к нулю при $r/t \to 0$ как r^2/t^2. Поэтому $U_2 \to \infty$ при $t \to \infty$, и, очевидно, асимптотика (2.4) делается неприменимой.

Чтобы найти асимптотику $\tilde W(t, \hat x, \hat y)$ при $t \to \infty$, найдем асимптотику интеграла J в (1.4) при больших τ, т.е. при $r \gg 1$, $r/\tau \ll 1$, для чего воспользуемся методом стационарной фазы. Стационарная точка Q в этом интеграле имеет координаты:

$$\eta = \eta_Q = \frac{\xi}{2A} - \frac{3C\xi^2}{8A^3} - \frac{D\xi\nu}{4A^2B} - \frac{E\nu^2}{8AB^2} + O\left(\frac{r^3}{t^3}\right)$$
$$\zeta = \zeta_Q = \frac{\nu}{2B} - \frac{D\xi^2}{8A^2B} - \frac{E\xi\nu}{4AB^2} - \frac{3F\nu^2}{8B^3} + O(r^3/t^3) \qquad (3.1)$$

A, B, C, D, E, F – коэффициенты разложения (1.2); $\xi = \hat x/\tau$; $\nu = \hat y/\tau$.

Вычисление внутреннего интеграла J в (1.3) при больших τ дает

$$J \approx C(Q)\exp i\Phi(r, \varphi, \tau)$$

$$C(Q) = \frac{2\pi G(Q)}{\tau\sqrt{|D(Q)|}}\exp i\left(\frac{\pi}{4}(\mathrm{sign}\,A + \mathrm{sign}\,B)\right), \quad D(Q) = \tilde\omega''_{\eta\eta}(Q)\tilde\omega''_{\zeta\zeta}(Q) - (\tilde\omega''_{\eta\zeta}(Q))^2$$

$$\Phi(r, \varphi, \tau) = -\eta_Q r\cos\varphi - \zeta_Q r\sin\varphi + \tilde\omega(Q)\tau$$

Из (1.2), (1.3) следует, что при $\tau \to \infty$

$$\Phi(r, \varphi, \tau) = r^2\Phi_2(\varphi)\tau^{-1} + r^3\Phi_3(\varphi)\tau^{-2} + O(r^4/\tau^3)$$

$$\Phi_2(\varphi) = -\omega_2\left(\frac{\cos\varphi}{2A}, \frac{\sin\varphi}{2B}\right), \quad \Phi_3(\varphi) = \omega_3\left(\frac{\cos\varphi}{2A}, \frac{\sin\varphi}{2B}\right)$$

где r, φ – полярные координаты.

Функции $G(Q)$ и $\sqrt{|D(Q)|}$ разлагаются при $\tau \to \infty$ в ряды по обратным степеням τ:

$$G\left(\frac{r}{\tau}\right) = G(Q) = G(0,\ 0) + G_1\frac{r}{\tau} + \ldots, \quad \sqrt{\left|D\left(\frac{r}{\tau}\right)\right|} = \sqrt{|D(Q)|} = 2/\sqrt{|AB|} + D_1\frac{r}{\tau} + \ldots \tag{3.2}$$

Чтобы ограничиться в интервале (1.4) значениями τ, для которых применима асимптотика (3.1)–(3.2), используем разложение единицы. Выберем две достаточно большие постоянные C_1, C_2 ($C_1 < C_2$) и бесконечно-дифференцируемые функции $h(r/\tau)$ и $g(r/\tau)$, для которых

$$h(r/\tau) + g(r/\tau) = 1; \quad h(r/\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau < C_1 r, \quad g(r/\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau > C_2 r \tag{3.3}$$

Тогда при $t > C_2 r$ интеграл (1.3) запишется в виде

$$\tilde{W}(t,\ r,\ \varphi) = W_1 + W_2$$

$$W_1 = W_1(r,\ \varphi) = \int_0^\infty g\left(\frac{r}{\tau}\right) J\left(\frac{r}{\tau},\ \varphi\right) d\tau, \quad W_2 = W_2(t,\ r,\ \varphi) = \int_0^t h\left(\frac{r}{\tau}\right) J\left(\frac{r}{\tau},\ \varphi\right) d\tau$$

Асимптотика W_1 при больших r, φ строится методом стационарной фазы (разд. 2). При вычислении W_2 можно использовать асимптотику (3.1), (3.2), т.е. рассматривать интеграл

$$W_2 = \int_0^t h\left(\frac{r}{\tau}\right) C\left(\frac{r}{\tau}\right) \exp i\Phi(r,\ \varphi,\ \tau)\frac{d\tau}{\tau}, \quad C\left(\frac{r}{\tau}\right) = C_0 + \frac{r}{\tau}C_1 + \ldots \tag{3.4}$$

4. Асимптотика W_2 при ограниченной снизу функции $\Phi_2(\varphi)$. Если функция $\Phi_2(\varphi)$ ограничена снизу по модулю, то при достаточно больших $\tau : \tau > \tau_1$ производная $\partial\Phi/\partial\tau$ ограничена снизу по модулю величиной const r^2/τ^2. В разложении единицы (3.3) можно считать $C_1 > \tau_1$. Тогда стационарная точка τ_0 фазовой функции оказывается в области supp $g(r/\tau)$ и асимптотика в дальней зоне интеграла W_1 совпадает с вкладом этой точки, т.е. равна U_1 (см. формулу (2.2)).

Для вычисления асимптотики W_2 перейдем к переменной интегрирования $\xi = r/\tau$:

$$W_2 = \int_{r/t}^\infty \exp(ir\Psi(\xi))h(\xi)C(\xi)\frac{d\xi}{\xi} \tag{4.1}$$

Здесь $h(\xi)$ – финитная бесконечно дифференцируемая функция, тождественно равная единице в окрестности нуля, функция $C(\xi)$ та же, что в (3.4), а функция

$$\Psi(\xi) = \xi\Phi_2(\varphi) + \xi^2\Phi_3(\varphi) + \ldots$$

имеет в области supp h ограниченную снизу по модулю производную. Поэтому W_2 при $r \gg 1$ представляет собой интеграл от быстроосциллирующей функции с двумя близкими критическими точками – полюсом $\xi = 0$ внеэкспоненциального множителя и границей $\xi = r/t$ области интегрирования. Асимптотика таких интегралов, равномерная относительно расстояния между критическими точками, выражается (см., например, [6]) через интегральную показательную функцию E_1 от мнимого аргумента. Имеем

$$W_2 \approx C_0 E_1(-i\Phi(r,\ \varphi,\ t)) + iH(t)\frac{\exp i\Phi(r,\ \varphi,\ t)}{r} + O(r^{-2})$$

$$H(t) = \frac{tC(r/t)}{r\Psi'(r/t)} - \frac{C_0}{\Psi(r/t)} = \frac{C_1\Phi_2(\varphi) - C_0\Phi_3(\varphi)}{\Phi_2^2(\varphi)} + O\left(\frac{r}{t}\right), \quad E_1(\pm iz) = \int_{\pm iz}^\infty e^{-\sigma}\frac{d\sigma}{\sigma}$$

где предполагается $z > 0$. Поскольку $E_1(\pm iz) \approx \mp i\exp(\mp iz)/z$ при $z \gg 1$, то асимптотика

W_2 при $|\Phi(r, \varphi, t)| \gg 1$ совпадает с U_2. Поэтому асимптотика (2.4) применима при $|\Phi(r, \varphi, t)| \gg 1$, т.е. при

$$t \ll r^2 \mid \Phi_2(\varphi) \mid = r^2 \left| \frac{\cos^2\varphi}{4A} + \frac{\sin^2\varphi}{4B} \right|$$

При $z \to 0$ функция $E_1(\pm iz)$ ведет себя как $\ln z$. Поэтому при росте t функция W_2 логарифмически растет:

$$W_2(t,\ r,\ \varphi) = C_0 \ln(r^2\Phi_2(\varphi)/t) + H(t)/r + O(r^{-2}) + O(t^{-1}) \tag{4.2}$$

5. Асимптотика W_2 при малых $\Phi_2(\varphi)$. Если $\Phi_2 \to 0$, т.е. φ стремится к $\pm\mathrm{arctg}\sqrt{-B/A}$ или к $\pi \pm \mathrm{arctg}\sqrt{-B/A}$, то стационарная точка

$$\tau_0 = -2r\Phi_3(\varphi)/\Phi_2(\varphi) + O(1) \tag{5.1}$$

фазовой функции Φ стремится к бесконечности. Поэтому при вычислении асимптотики $\tilde{W}$ в случае малых Φ_2 можно считать, что в разложении единицы (3.3) постоянная C_2 удовлетворяет условию $C_2 < |\Phi_3(\varphi)/\Phi_2(\varphi)|$. Тогда фазовая функция в интеграле W_1 не будет иметь в области $\mathrm{supp}\, g$ стационарных точек, этот интеграл будет убывать при $t \to \infty$ быстрее любой степени r и асимптотика поля $\tilde{W}$ будет совпадать с асимптотикой W_2. Как видно из (4.1), эта функция представляет собой при $t \gg r \gg 1$ интеграл от быстроосциллирующей функции с тремя близкими критическими точками: полюсом $\xi = 0$ внеэкспоненциального множителя, границей $\xi = r/t$ области интегрирования и стационарной точки $\xi = r/\tau_0$ фазовой функции $\psi(\xi)$, причем вторая производная ψ'' фазовой функции ограничена снизу по модулю. Простейшим интегралом с подобными критическими точками является Ff-интеграл, введенный в [6][1]

$$Ff(\sqrt{r}\alpha,\ \sqrt{r}\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\sqrt{r}\alpha} \frac{\exp(is^2)ds}{s - \sqrt{r}\beta + i0}$$

где при $\alpha > \beta$ полюс $s = \sqrt{r}\beta$ обходится в верхней полуплоскости.

Равномерная асимптотика интеграла (4.1) при $\Psi'' > 0$ выражается согласно [6] через Ff-интеграл и интеграл Френеля по формуле

$$W_2 = 2\pi \exp(ir\Psi(r/\tau_0))C_0 Ff(\sqrt{r}\alpha, \sqrt{r}\beta) +$$
$$+ \sqrt{\frac{\pi}{r}}\, S\exp(ir\Psi(r/\tau_0))\exp(\pi i/4)F(\sqrt{r}\alpha) + \frac{i}{r} T\exp(ir\Psi(r/t)) + O(r^{-3/2}) \tag{5.2}$$

$$F(\sqrt{r}\alpha) = \frac{\exp(-\pi i/4)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{r}\alpha} \exp(is^2)ds$$

где

$$\alpha = \mathrm{sign}(t/\tau_0 - 1)\sqrt{|\Psi(r/t) - \Psi(r/\tau_0)|}, \quad \beta = \mathrm{sign}\,\tau_0\sqrt{|\Psi(r/\tau_0)|} \tag{5.3}$$

При $\Psi'' < 0$ функции $Ff(\sqrt{r}\alpha,\ \sqrt{r}\beta)$ и $\exp(\pi i/4)F(\sqrt{r}\alpha)$ в формуле (5.2) заменяются на комплексно сопряженные. Величины α, β, S, T выражаются через функцию Ψ и ее

---

[1] См. также *Анютин А.П., Боровиков В.А.* Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с особенностями внешнеэкспоненциального множителя. М., Препринт № 42(414). М.: ИРЭ АН СССР, 1984, 51 с.

производные. В частности, сохраняя главные члены разложений по степеням малого параметра $\Phi_2(\varphi)$, получим

$$\alpha = -\frac{r|\Phi_3|^{1/2}}{t} - \frac{\Phi_2|\Phi_3|^{1/2}}{2\Phi_3}, \quad \beta \doteq -\frac{\Phi_2|\Phi_3|^{1/2}}{2\Phi_3}, \quad S = C|\Phi_3|^{-1/2}, \quad T = 0 \tag{5.4}$$

6. Поведение поля $\hat{W}(t,\hat{x},\hat{y})$ при $t, r \gg 1$. Поведение поля $\hat{W}(t,\hat{x},\hat{y})$ зависит от типа стационарной точки $O = (0, 0)$ функции $\hat{\omega}(\lambda_0+\eta,\ \mu_0+\zeta)$. Предположим сперва, что эта точка – точка экстремума, т.е. что в разложении (1.2) коэффициенты A, B имеют один и тот же знак и точка O – изолированная точка кривой $\hat{\omega} = 0$. Тогда дальнее поле $\hat{W}(t, r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ состоит при $t, r \gg 1$ из следующих компонент:

1°. Обусловленная особыми точками функции $\omega(\lambda_0, \mu_0)$ или внеэкспоненциального множителя $F(\lambda, \mu)$ компонента $\Omega(t, r, \varphi)$.

2°. Компоненты $U_i(t, r, \varphi)$, обусловленные регулярными точками P_i кривой $\hat{\omega} = 0$, в которых $\mathrm{grad}\,\hat{\omega}$ имеет направление φ. Каждое слагаемое представляет собой волну, распространяющуюся в направлении φ со скоростью $v_i(\varphi) = |\mathrm{grad}\,\hat{\omega}\ (P_i)|$. Перед фронтом волны, т.е. при $r > v_i(\varphi)t$, компонента U_i имеет порядок t^{-1}. В окрестности фронта, т.е. при $r \approx v_i(\varphi)t$, U_i выражается (если P_i не является точкой перегиба кривой $\hat{\omega} = 0$) через интеграл Френеля, а за фронтом при $r < v_i(\varphi)t$ U_i не зависит в главном члене асимптотики от t и имеет порядок $r^{-1/2}$. Если P_i – точка перегиба кривой $\hat{\omega} = 0$, то U_i при $r \leqslant v_i t$ имеет более сложную асимптотику.

3°. Компонента $V(t, r, \varphi)$, обусловленная особой точкой $O = (\lambda_0, \mu_0)$ кривой $\hat{\omega} = 0$. Как видно из (4.2), эта компонента имеет порядок единицы при

$$r \leqslant r_Z = \mathrm{const}\sqrt{t/|\Phi_2(\varphi)|} \tag{6.1}$$

Иными словами, наличие изолированной особой точки O у кривой $\hat{\omega} = 0$ приводит к возникновению в окрестности нуля резонансной зоны Z, в которой поле имеет порядок единицы. Как видно из (6.1), размер этой зоны растет при $t \to \infty$, как $\sqrt{t}$.

Пусть теперь O – точка самопересечения кривой $\hat{\omega} = 0$, т.е. пусть коэффициенты A, B в (1.2) имеют различные знаки. Назовем направления φ, в которых Φ_2 обращается в нуль:

$$\varphi_{1,2} = \pm\,\mathrm{arctg}\sqrt{-B/A}; \quad \varphi_{3,4} = \pi \pm \mathrm{arctg}\sqrt{-B/A} \tag{6.2}$$

критическими направлениями и обозначим через $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_4$ интервалы $|\varphi - \varphi_k| < \delta$, где постоянная δ выбрана достаточно малой.

Вне этих интервалов функция Φ_2 ограничена снизу по модулю и поле $\hat{W}$ состоит из компонент трех описанных выше типов. Покажем ниже, что это разложение применимо в более широкой области, и что справедливы следующие утверждения.

A. Разложение $\hat{W}$ на компоненты Ω, U_i, V применимо вне окрестностей критических направлений, граница которых определяется равенством

$$|\Phi_2(\varphi)| = Cr^{-1/2}\sqrt{|\Phi_3(\varphi)|} \tag{6.3}$$

где

$$|\varphi - \varphi_k| = Cr^{-1/2}\sqrt{|\Phi_3(\varphi)|}\,/\,|\Phi_2'(\varphi_k)| = 2Cr^{-1/2}\sqrt{|AB\Phi_3|} \tag{6.4}$$

Постоянная C будет определена ниже. Эти окрестности естественно назвать переходными областями.

Б. Вне переходных областей размер резонансной зоны, в которой поле $\hat{W}$ имеет порядок единицы по-прежнему определяется соотношением (6.1). Внутри переходной области размер резонансной зоны оценивается выражением

$$r \leqslant r_Z \approx \mathrm{const}\, t^{2/3}\, |\Phi_3|^{-1/3} \tag{6.5}$$

Прежде чем доказывать утверждения *А* и *Б*, приведем их некоторые качественные следствия.

Из оценки (6.1) следует, что размер резонансной зоны Z растет по мере приближения направления φ к критическому от величины порядка $t^{1/2}$ вне секторов Σ_k до величины порядка $t^{2/3}$ на границе переходных областей, где $|\Phi_2(\varphi)| = O(r^{-1/2})$. Внутри переходных областей резонансная зона так же, как увидим ниже, имеет порядок $t^{2/3}$. Эти оценки означают, что по мере увеличения t резонансная зона становится все более вытянутой в критических направлениях; ее размер вдоль этих направлений в $t^{1/6}$ больше, чем размер в направлениях, отличных от критических.

Рассмотрим теперь, как ведут себя вблизи критических направлений, т.е. внутри секторов Σ_k, волны U_i. Эти волны распространяются лишь по одну сторону от каждого критического направления φ_k – в секторе тех углов φ, для которых Φ_2 и Φ_3 имеют различные знаки и определенная формулой (5.1) стационарная точка τ_0 положительна. Расстояние $r_i(\varphi)$ волнового фронта волны U_i до начала координат определяется из условия $t = \tau_0$, т.е.

$$r = r_i(t, \varphi) = -2t\,\Phi_2(\varphi)/\Phi_3(\varphi)$$

По мере приближения к критическому направлению $|\Phi_2(\varphi)|$ и $r_i(t,\varphi)$ убывают, и на границе переходной зоны, где функция $\Phi_2(\varphi)$ связана с r соотношением (6.3), получаем

$$r_i = r_i(t) = (2tC)^{2/3}\, |\Phi_3|^{-1/3}$$

где C – та же постоянная, что в (6.3).

Таким образом, хотя вдали от критических направлений расстояние r_i от волнового фронта до начала координат имеет порядок t, т.е. много больше, чем размер резонансной зоны $r_Z = O(\sqrt{t})$, при приближении к переходной области r_i убывает, r_Z растет, а на границе этой области r_i и r_Z имеют один и тот же порядок по t, равный $t^{2/3}$.

После того как эти величины стали близки, т.е. внутри переходных областей, в поле $\hat{W}$ уже нельзя отделить волну U_i от резонансной компоненты V.

Доказательство утверждений А и Б. Внутри интервалов Σ_k модуль функции $\Phi_2(\varphi)$ мал, и для W_2 справедлива асимптотика (5.2), причем для аргументов $\sqrt{r}\alpha$, $\sqrt{r}\beta$ Ff-интеграла и интеграла Френеля, а также для амплитуд S, T можно использовать формулы (5.4).

Асимптотика W_2 при $r, t \geqslant 1$ определяется соответствующими асимптотическими разложениями функции $Ff(\sqrt{r}\alpha, \sqrt{r}\beta)$ (см. [6]). Если аргумент $\sqrt{r}\beta$ достаточно велик, т.е. полюс $s = \sqrt{r}\beta$ достаточно удален от стационарной точки $s = 0$ фазовой функции (для практических приложений достаточно положить $|\sqrt{r}\beta| > C$, где $C \approx 2\pi$), то в асимптотике Ff-интеграла можно отдельно рассматривать вклад стационарной точки $\sigma = 0$ (при $\alpha > 0$) и полюса $\sigma = \beta$ (при $\alpha \to \beta$). Первое слагаемое соответствует волне U_i, ее волновой фронт имеет уравнение $\alpha = 0$, что вследствие (5.3) совпадает с (6.5). Второе слагаемое, логарифмически растущее при $\alpha \to \beta$, соответствует компоненте V.

При $|\sqrt{r}\beta| < C$ в асимптотике Ff-интеграла нельзя отделять вклад стационарной точки $\sigma =$ $= 0$ от вклада полюса $\sigma = \beta$. Условие $|\sqrt{r}\beta| = C$ определяет границу переходной области.

Если вне переходной области воспользоваться асимптотикой Ff-интеграла, применимой при достаточно больших $|\sqrt{r}\beta|$ (см. [6]), то формула (5.2) переходит в (4.2), откуда и следуют утверждения A и $Б$ для точек r, φ, находящихся вне переходных областей.

Осталось доказать справедливость оценки (6.1) для размера резонансной зоны внутри переходных областей. В этих областях, т.е. при ограниченных $|\sqrt{r}\beta|$, удобно использовать следующее выражение для Ff-интеграла (см. [6]):

$$Ff(\sqrt{r}\alpha,\ \sqrt{r}\beta)=\exp(i\beta^2)\left[-\frac{1}{4\pi}E_1(ir(\alpha-\beta)^2)-\frac{i}{2}F^*(\sqrt{r}(\alpha-\beta))\right]+J_2(\sqrt{r}\alpha,\sqrt{r}\beta)$$

где F^* – функция, комплексно сопряженная к интегралу Френеля, а

$$J_2(\sqrt{r}\alpha,\sqrt{r}\beta)=-\frac{\exp(ir\alpha^2)}{4\pi}\int_0^\infty \exp(i\sigma^2)\frac{\exp(-2i\sigma\sqrt{r}\alpha)-\exp(-2ir(\alpha-\beta)\alpha)}{\sigma-\sqrt{r}(\alpha-\beta)}\,d\sigma$$

разлагается в сходящийся ряд по степеням $\sqrt{r}(\alpha-\beta)$, $\sqrt{r}\alpha$. Отсюда следует, что внутри переходных областей логарифмически растущая компонента поля W_2 определяется функцией

$$\frac{1}{4\pi}E_1(ir(\alpha-\beta)^2)=\frac{1}{4\pi}E_1(ir^3\,|\,\Phi_3\,|\,t^{-2})$$

которая имеет порядок не менее единицы при малых $r^3\,|\,\Phi_3\,|\,t^{-2}$. Отсюда и следует оценка (6.4).

7. Вырождение стационарной точки $\eta=\zeta=0$ функции $\tilde{\omega}$. В предыдущем анализе предполагалось, что стационарная точка $\eta=\zeta=0$ функции $\hat{\omega}(\lambda_0+\eta,\ \mu_0+\zeta)$ невырождена, т.е. что в разложении (1.2) коэффициенты A, B не обращаются в нуль. Это условие не всегда выполняется. Оценим для случая вырождения стационарной точки размер резонансной зоны и порядок роста W_2 при $t\to\infty$. Положим для определенности, что в разложении (1.2) $A=0$.

В последующих выкладках будем опускать члены, которые не скажутся на окончательных оценках.

Полагая в (1.3) $G=1$, проведем во внутреннем интеграле интегрирование по ζ и выразим интеграл по η через функцию Эйри. Целесообразно выделить из функции $\tilde{W}$ размерный множитель $|B|^{-1}$:

$$\tilde{W}=\overline{W}\,/\,|\,B\,|$$

Тогда $\overline{W}$ будет безразмерной функцией $t,\hat{x},\hat{y}$:

$$\overline{W}=\frac{2\pi^{3/2}\sqrt{|\,B\,|}}{|\,3C\,|^{1/3}}\exp(i\pi\,\mathrm{sign}\,B/4)\int_0^t \exp(iS(\tau))Ai\left(\frac{r\cos\varphi}{(3C\tau)^{1/3}}+\frac{qr^2\sin^2\varphi}{\tau^{4/3}}\right)\frac{d\tau}{\tau^{5/6}}$$

$$S(\tau)=-\frac{r^2\sin^2\varphi}{4B\tau}+\frac{D^3r^3\sin^3\varphi}{72B^3C^2\tau^2}+\frac{Dr^2\cos\varphi\sin\varphi}{6BC\tau}$$

$$p=(3C)^{-1/3},\quad q=\frac{D^2}{4B^2(3C)^{4/3}}$$

где r, φ – полярные координаты (2.1). Поскольку при $A\to 0$ критические направления φ_k стремятся, согласно (6.2), к $\pm\,\pi/2$, в случае $A=0$ критическими направлениями являются направления $\pm\,\pi/2$.

Оценим асимптотику $\overline{W}$ и размер резонансной зоны при фиксированном $\varphi\neq\pm\,\pi/2$ и при $\varphi=\pm\,\pi/2$. Точнее, оценим для фиксированного M размер окрестности нуля, внутри которой $|\,\overline{W}\,|\geqslant M$.

При $\varphi \neq \pi/2$ и $r \gg 1$, $t \gg qr\sin^2\varphi/(p\cos\varphi)$ в аргументе функции Эйри можно пренебречь вторым слагаемым. Переходя к переменной интегрирования $\xi = |p\hat{x}\tau^{-1/3}|$, получим

$$\overline{W} = \frac{6\pi^{3/2}\sqrt{|B|}\exp[\pi i \operatorname{sign} B/4]t^{1/6}}{|3C|^{1/3}} H(-(3C)^{-1/3}t^{-1/3}\hat{x})$$

$$H(\theta) = \sqrt{|\theta|}\int_{|\theta|}^{\infty} \exp\{iS[(p\hat{x}/\xi)^3]\}Ai(-\xi \operatorname{sign}\theta)\frac{d\xi}{\xi^{3/2}}$$

Поскольку $H(\theta)$ стремится к конечному пределу при $\theta \to 0$, функция $\overline{W}$ растет при $t \to \infty$ как $t^{1/6}$.

Оценим размер резонансной зоны, т.е. области, в которой $\overline{W} \geqslant M$. Эта область определяется значениями $\hat{x}$, для которых

$$H(-(3C)^{-1/3}t^{-1/3}\hat{x}) \sim M|C|^{1/3}|B|^{-1/2}t^{-1/6} \geqslant 1$$

Используя асимптотику функции Эйри при $|\xi| \gg 1$, получим, что при $|\theta| \gg 1$

$$H(\theta) \approx \begin{cases} \dfrac{|\theta|^{-7/4}}{\sqrt{\pi}}, & \theta < 0 \\ \dfrac{\theta^{-7/4}}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\dfrac{2}{3}\theta^{3/2}\right), & \theta > 0 \end{cases}$$

Отсюда для размера резонансной зоны при фиксированном $\varphi \neq \pm\pi/2$ и $r \gg 1$ получаем

$$|\hat{x}_z| = r_z|\cos\varphi| \approx \begin{cases} 6M^{-4/7}B^{2/7}C^{1/7}t^{3/7} & \text{при } \operatorname{sign}\hat{x} = \operatorname{sign} C \\ (3C)^{1/3}t^{1/3} & \text{при } \operatorname{sign}\hat{x} = -\operatorname{sign} C \end{cases} \tag{7.1}$$

Выписанная асимптотика неприменима при $\hat{y} \gg \hat{x}$. Оценим размер резонансной зоны при $\hat{x} = 0$. Эта оценка имеет различный вид при $D \neq 0$ и $D = 0$. Пусть сперва $D \neq 0$. Тогда, переходя к переменной интегрирования $\xi = q\hat{y}^2\tau^{-4/3}$, получим

$$\overline{W} = \frac{3\pi^{3/2}\sqrt{|B|}}{2|3C|^{1/3}}\exp\left(\frac{\pi i \operatorname{sign} B}{4}t^{1/6}T(q\hat{y}^2t^{-4/3})\right)$$

$$T(\theta) = |\theta|^{1/8}\int_{|\theta|}^{\infty} e^{iS[(q\hat{y}^2/\xi)^{3/4}]}\operatorname{Ai}(\xi \operatorname{sign}\theta)\frac{d\xi}{\xi^{9/8}}$$

Видно, что на оси $\hat{y}$ порядок роста $\overline{W}$ при $t \to \infty$ тот же, что и при $\hat{x} \gg 1$ и ограниченных снизу $|\hat{x}/\hat{y}|$.

Оценим размер резонансной зоны вдоль оси $\hat{y}$. При $|\theta| \gg 1$ функция $T(\theta)$ имеет такую же асимптотику, что и функция $H(\theta)$. Отсюда для размера резонансной зоны вдоль оси $\hat{y}$, т.е. при $\varphi = \pm\pi/2$, получаем

$$r_Z = |\hat{y}| \sim \begin{cases} 1{,}2M^{-2/7}|B|^{1/7}|C|^{-2/21}|q|^{-1/2}t^{5/7}, & q < 0 \\ |q|^{-1/2}t^{2/3}, & q > 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

При $D=0$ и $x=0$ имеем

$$\overline{W}=\frac{2\pi^{3/2}\sqrt{|B|}\exp[\pi i\,\mathrm{sign}\,B/4]\,\mathrm{Ai}(0)t^{1/6}}{|3C|^{1/3}}T\left(\frac{y^2}{4Bt}\right)$$

$$T(\theta)=|\theta|^{1/6}\int\limits_{|\theta|}^{\infty}\exp[-i\xi\,\mathrm{sign}\,\theta]\frac{d\xi}{\xi^{7/6}}$$

Функция $|T(\theta)|\approx|\theta|^{-1}$ при $|\theta|\gg 1$, поэтому для размера резонансной зоны вдоль оси $\hat{y}$ получаем

$$r_Z=|\hat{y}|\sim 2\sqrt{2\,\mathrm{Ai}(0)}(3C)^{-1/6}(\pi|B|)^{3/4}M^{-1/2}t^{7/12} \tag{7.3}$$

Как было показано в разд. 6, для случая невырожденной стационарной точки размер резонансной зоны в критическом направлении был больше в $t^{1/6}$ раз, чем в направлении, отличном от резонансного. Из полученных оценок видно, что для случая вырожденной стационарной точки, когда два критических направления сливаются, отношение этих размеров растет быстрее – как $t^{2/7}$.

8. Трехмерная задача. Наметим построение асимптотики дальнего поля в случае резонанса для трехмерной задачи. В трехмерном случае аналогом формулы (1.3) является выражение

$$\tilde{W}(t,\hat{x},\hat{y},\hat{z})=\int\limits_0^t J d\tau$$

$$J=\iiint G(\eta,\zeta,\gamma)\exp i(-\eta\hat{x}-\zeta\hat{y}-\gamma\hat{z}+\tau\tilde{\omega}(\eta,\zeta,\gamma))d\eta d\zeta d\gamma \tag{8.1}$$

где

$$\tilde{\omega}(\eta,\zeta,\gamma)=\omega(\lambda_0+\eta,\mu_0+\zeta,\xi_0+\gamma)-\omega(\lambda_0,\mu_0,\xi_0)-\eta V_x-\zeta V_y-\gamma V_z$$

Интеграл $J=J(\tau,r,\theta,\varphi)$ в (8.1) (r,θ,φ – сферические координаты в пространстве $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$) имеет при $\tau\to\infty$ порядок $\tau^{-3/2}$ (см. ниже). Поэтому в отличие от двумерного случая внешний интеграл сходится при $t\to\infty$, т.е. существует установившийся режим:

$$W(r,\theta,\varphi)=\int\limits_0^{\infty}J(\tau,r,\theta,\varphi)d\tau \tag{8.2}$$

В случае резонанса функция $\tilde{\omega}(\eta,\zeta,\gamma)$ обращается в начале координат в нуль вместе со своими первыми производными. Будем полагать, что матрица из вторых производных в этой точке не вырождена. Тогда направления осей x, y, z можно выбрать таким образом, чтобы разложение $\tilde{\omega}(\eta,\zeta,\gamma)$ по степеням η, ζ, γ имело вид

$$\tilde{\omega}(\eta,\zeta,\gamma)=\frac{a\eta^2}{2}+\frac{b\zeta^2}{2}+\frac{c\gamma^2}{2}+\omega_3(\eta,\zeta,\gamma)+\ldots$$

где ω_3 – однородный полином третьей степени, а точками обозначены следующие члены разложения.

Будем полагать также, что функция G обращается в нуль вне достаточно малой окрестности начала координат. В этих условиях асимптотика $J(\tau,r,\theta,\varphi)$ при $\tau\gg r\gg 1$ вычисляется обычным методом стационарной фазы:

$$J(\tau,r,\theta,\varphi)\approx\frac{\mathrm{const}}{r^{3/2}}\exp\left[-ir\left(\frac{r}{\tau}\Phi_2+\frac{r^2}{\tau^2}\Phi_3+\frac{r^3}{\tau^3}\Phi_4+O\left(\frac{r^4}{\tau^4}\right)\right)\right] \tag{8.3}$$

Здесь

$$\Phi_k = -(-1)^k \omega_k \left(\frac{\cos\theta}{2a}, \frac{\sin\theta\cos\varphi}{2b}, \frac{\sin\theta\sin\varphi}{2c} \right), \quad k = 2,3$$

Φ_4 – однородный полином четвертой степени от $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$.

Используя разложение единицы (3.3), сведем проблему к вычислению асимптотики интеграла от произведения $h(r/\tau)J(\tau, r, \theta, \varphi)$ где h – срезающая функция, выделяющая окрестность бесконечно удаленной точки, в которой для J применима асимптотика (8.3). После замены переменной $\xi = \sqrt{r/\tau}$ получаем

$$W_2(r,\theta,\varphi) \approx \frac{\text{const}}{r^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi^2)\exp ir(\xi^2\Phi_2 + \xi^4\Phi_3 + \xi^6\Phi_4 + \ldots)d\xi$$

Асимптотика W_2 при $r \to \infty$ определяется значениями функций Φ_2, Φ_3, Φ_4. Если начало координат $O = (0, 0, 0)$ – точка экстремума функции $\tilde{\omega}$, т.е. коэффициенты a, b, c в (8.3) имеют один и тот же знак, то $\Phi_2(\theta, \varphi)$ при любых θ, φ ограничена снизу по модулю. Поэтому W_2 имеет при $r \to \infty$ порядок r^{-1}, т.е. тот же порядок, что и компоненты дальнего поля, обусловленные регулярными точками поверхности $\tilde{\omega} = 0$, в которых $\mathrm{grad}\tilde{\omega}$ имеет направление θ, φ (см. [1, 2]). Если же O – седловая точка функции $\tilde{\omega}$, т.е. коническая точка поверхности $\tilde{\omega} = 0$, то асимптотика W_2 при фиксированных θ, φ и $r \to \infty$ имеет порядок r^{-1} при $\Phi_2 \neq 0$, $r^{-3/4}$ при $\Phi_2 = 0$, но $\Phi_3 \neq 0$ и $r^{-2/3}$ при $\Phi_2 = \Phi_3 = 0$, но $\Phi_4 \neq 0$.

Поясним геометрический смысл этих условий.

Условие $\Phi_2 = 0$ определяет конус S критических направлений θ, φ, для которых плоскость Σ: $\eta\cos\theta + \zeta\sin\theta\cos\varphi + \gamma\sin\theta\sin\varphi = 0$ касается в точке O поверхности $\tilde{\omega} = 0$. Если Φ_3 меняет знак на конусе S, то на этом конусе имеются направления θ_i, φ_i, для которых $\Phi_3 = 0$. Назовем эти направления суперкритическими. Для этих направлений плоскость Σ соприкасается в точке O с поверхностью $\tilde{\omega} = 0$. В общем случае в суперкритических направлениях функция Φ_4 не обращается в нуль.

Таким образом, W_2 имеет порядок r^{-1} для направлений θ, φ, отличных от критических, порядок $r^{-3/4}$ для критических направлений, отличных от суперкритических и порядок $r^{-2/3}$ для суперкритических направлений.

Эта асимптотика неравномерна, т.е. она неприменима для направлений θ, φ, близких соответственно к критическим и суперкритическим направлениям. В первом случае, т.е. при малых Φ_2 и ограниченных снизу по модулю Φ_3 модельным интегралом, описывающим равномерную асимптотику W_2, является интеграл

$$J_2 = r^{-3/4} |\Phi_3|^{-1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i(\alpha\xi^2 + \xi^4 \,\mathrm{sign}\,\Phi_3)d\xi, \quad \alpha = r^{1/2}\Phi_2 |\Phi_3|^{-1/2}$$

сводящийся к интегралу Пирси [7].

Аналогично в окрестности суперкритического направления, т.е. направления, в котором Φ_2 и Φ_3 малы, а функция Φ_4 ограничена снизу по модулю, модельным является интеграл

$$J_3 = r^{-2/3} |\Phi_4|^{-1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i(\alpha\xi^2 + \beta\xi^4 + \xi^6 \,\mathrm{sign}\,\Phi_4)d\xi$$

$$\alpha = r^{2/3}\Phi_2 |\Phi_4|^{-1/3}, \quad \beta = r^{1/3}\Phi_3 |\Phi_4|^{-2/3}$$

Он сводится к введенным в [8] обобщенным функциям Эйри.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (M3L000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill J.* Studies on magneto-hydrodynamic waves and other anisotropic wave motions // Phil. Trans. Roy Soc. London. Ser. A. 1960. V. 252. N 1014. P. 397–430.
2. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
3. *Chee-Seng L.* Water waves generated by an oscillatory surface pressure travelling at critical speed // Wave motion. 1981. V. 3. N 2. P. 159–179.
4. *Yanovitch M.* Gravity waves in a heterogeneous incompressible fluid // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15. N 1. P. 45–51.
5. *Федорюк М.В.* Метод перевала М.: Наука, 1977. 368 с.
6. *Borovikov V.A.* Uniform stationary phase method. IEE electromagnetic series. London, 1994. N 40.
7. *Pearcey T.* The structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a casp of a caustic // Phil. Mag. 1946. V. 37. N 7. P. 311–316.
8. *Ludwig D.* Uniform asymptotic expansions at a caustic // Comm. Pure Appl. Math. 1966. V. 19. N 2. P. 215–250.

Москва

Поступила в редакцию
4.IV.1996