

УДК 532.516

© 1998 г. А.Н. Крайко

**ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ПРОФИЛИРОВАНИИ  
ОПТИМАЛЬНОГО ЗАЗОРА БЕСКОНЕЧНОГО ПЛОСКОГО  
ПОЛЗУНА**

В приближении несжимаемой жидкости сформулирована и решена изопериметрическая задача (ИЗ) оптимального профилирования зазора между плоской опорной поверхностью и бесконечным цилиндрическим (плоским) ползуном. Если в известной задаче Релея (ЗР) реализуется максимум коэффициента несущей способности  $C_N$ , то в ИЗ обеспечивается минимум сопротивления при заданном  $C_N$ . Выяснена структура оптимального решения и установлено, что при коэффициентах  $C_N$ , меньших коэффициента  $C_{NR}$ , отвечающего ЗР, высота зазора  $h$  – непрерывная функция координаты  $x$ , отсчитываемой вдоль опорной поверхности. В общем случае оптимальная функция  $h = h(x)$  может содержать участки четырех типов. Два из них  $h = 1$  и  $h = N > 1$  – участки краевого экстремума (УКЭ1 и УКЭН) появляются из-за ограничения на  $h$  снизу и сверху. Другие два – участки двустороннего экстремума. УДЭ1 аналогичен УДЭ задачи Релея. На нем  $h = h_1$ , где  $1 < h_1 < N$ . УДЭ2 есть только в ИЗ. Он имеет отрицательный наклон и соединяет УКЭ1 с УКЭН или с УДЭ1. При  $C_N \rightarrow C_{NR}$  тангенс угла наклона УДЭ2 обращается в минус бесконечность, а сам он превращается в ступеньку, т.е. в известный разрыв  $h$  в ЗР.

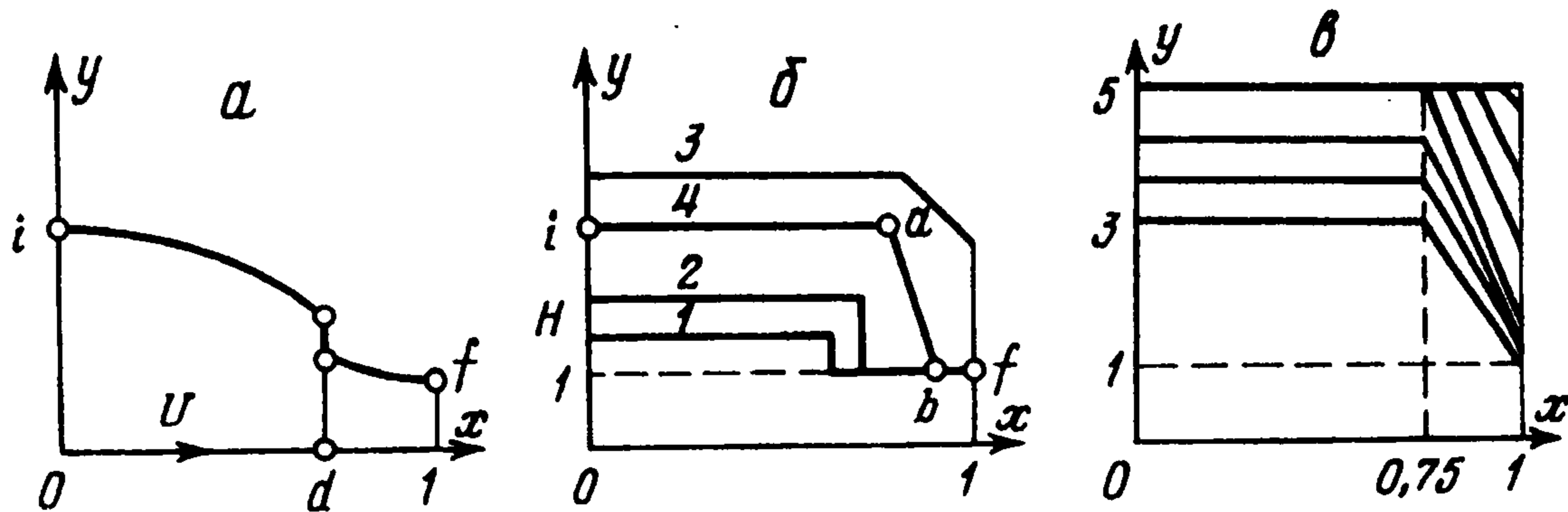
Впервые проблема оптимального профилирования зазора в приближении теории смазки рассматривалась Релеем [1]. В решенной им в рамках несжимаемой вязкой жидкости задаче определения зазора бесконечного цилиндрического ползуна, реализующего максимум  $C_N$ , оптимален кусочно-постоянный зазор с одной ступенькой. На начальном его участке – УДЭ1 высота зазора  $h \equiv h_1 > 1$  удовлетворяет уравнению Эйлера. Концевой участок  $h \equiv 1$ , где величина  $h$  отнесена к минимально допустимой по постановке задачи высоте  $h_m$ , является участком краевого экстремума (УКЭ1). Ступенчатое решение ЗР имеет и для политропного газа, при переменной высоте зазора на УДЭ1 [2, 3]. В последние годы ЗР решалась и в пространственной постановке [4–9]. Вариационные задачи, решенные в перечисленных выше работах, являются обобщением ЗР о максимуме  $C_N$  с ее характерной особенностью – ступенчатым распределением  $h$ .

Наряду с ЗР имеет смысл рассмотреть и другие вариационные задачи, в частности, – задачу минимизации коэффициента сопротивления  $C_D$  при фиксированном  $C_N$ . Такая задача сформулирована и решена ниже.

Для плоского ползуна ИЗ рассматривалась в [10], где вместо  $C_N$  фиксировалась несущая способность  $N$  при отсутствии ограничений на  $h$ , а роль  $h_m$  играла подбираемая для обеспечения заданного  $N$  величина  $h_N$ . В такой постановке ИЗ свелась к минимизации  $R^0 = C_D / \sqrt{C_N}$  при  $h(x) \geq 0$ . Там же была рассмотрена задача оптимизации зазора по минимуму  $R = C_D / C_N$ . Соотношение результатов [10] и данной работы обсуждается в конце статьи.

1. Пусть  $x, y, z$  – декартовы координаты, связанные с цилиндрическим и бесконечным по оси  $z$  ползуном, который движется над плоскостью  $y = 0$  в отрицательном направлении оси  $x$  с постоянной скоростью  $-U$ . В такой системе координат ползун покоится,

а плоскость  $y = 0$  движется со скоростью  $U > 0$ , как изображено на фиг. 1, а. Высота зазора  $y = h(x)$ , которая образует основание ползуна  $if$ , в общем случае может иметь ступеньку при  $x = x_d$ . Значениям переменных в точках  $i, f, d, \dots$  будем приписывать соответствующие нижние индексы, а если они рвутся в точке  $d$ , то слева (справа) от нее – дополнительный индекс минус (плюс). За масштабы  $x$  и  $h$  возьмем ширину ползуна  $L$  и его минимально допустимую высоту  $h_m$ . Давление  $p$  при  $x = 0$  и  $1$  фикси-



Фиг. 1

ровано. За масштабы давления  $p$  и  $x$ -компоненты вектора скорости  $u$  возьмем  $\rho U^2$  и  $U$ , где  $\rho$  – плотность жидкости. Тогда ( $p_0$  – известная постоянная)

$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, h) = 0, \quad p(0, y) = p(1, y) = p_0 \quad (1.1)$$

Согласно оценкам теории смазки [11] давление  $p$  не зависит от  $y$ , а инерционные члены в проекции уравнения движения на ось  $x$  малы по сравнению с вязкими. Проинтегрировав его дважды по  $y$  с учетом первых двух условий из (1.1), найдем

$$\gamma u(x, y) = \gamma - \frac{\gamma + 3p'(x)h^2(x)}{h(x)}y + 3p'(x)y^2, \quad \gamma = \frac{6L\mu}{h_m^2\rho U} \quad (1.2)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по  $x$ . Величины в правой части безразмерного комплекса  $\gamma$  – размерные, а  $\mu$  – вязкость, принятая постоянной.

Проинтегрируем уравнение (1.2) по  $y$  от  $y = 0$  до  $y = h$ , учтя условия для  $u$  из (1.1) и то, что интеграл от левой части (1.2), пропорциональный расходу  $q/2$  через зазор, постоянен. В результате получим

$$\pi' = (h - q)/h^3 \quad (\pi = p/\gamma) \quad (1.3)$$

Пусть  $N$  – несущая способность ползуна, а  $D$  – сила испытываемого им сопротивления – сумма силы трения и интеграла сил давления (разности  $p - p_0$ ) по  $y$  вдоль его основания, включая возможную ступеньку, где  $p = p_d$ . Имеем

$$C_N = \frac{N}{\gamma L \rho U^2} = \int_0^1 (\pi - \pi_0) dx, \quad C_D = \frac{D}{\gamma h_m \rho U^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{3h} + \pi' h \right) dx \quad (1.4)$$

В ЗР ищется такая высота зазора  $h = h(x)$ , которая при функции  $\pi$ , определяемой уравнением (1.3) и граничными условиями:  $\pi(0) = \pi(1) = \pi_0 = p_0/\gamma$  с фиксированным  $\pi_0$ , реализует максимум  $C_N$ . В ИЗ  $C_N \leq C_{NR}$  фиксируется, а минимизируется  $C_D$ . В обеих задачах высота  $h$  ограничена снизу и сверху, т.е. в согласии с выбором масштаба  $h$  при заданной постоянной  $H \geq 1$

$$1 \leq h(x) \leq H \quad (1.5)$$

2. Для вывода условий оптимальности составим функционал Лагранжа

$$J = \alpha C_D + \beta C_N + \Lambda, \quad \Lambda = \int_0^1 \lambda(x)(h - \pi' h^3 - q) dx$$

где  $\lambda$  – переменный множитель Лагранжа, в ЗР  $\alpha = 0$ , а  $\beta = 1$ , в ИЗ  $\alpha = 1$ , а  $\beta$  – постоянный множитель Лагранжа, выражение в скобках в подынтегральном выражении равно нулю в силу уравнения (1.3). При допустимом варьировании вариации  $J$  и оптимизируемого функционала из (1.4) совпадают при любых ограниченных множителях Лагранжа. Поэтому для оптимального зазора

$$\delta J = \delta C_N \leq 0 \text{ в ЗР, } \delta J = \delta C_D \geq 0 \text{ в ИЗ} \quad (2.1)$$

при любых  $\delta h$ , удовлетворяющих ограничениям (1.5). Варьируя  $J$ , учтем, что на входе и выходе из зазора функция  $\pi$  фиксирована, а в сечениях возможных скачков высоты  $h$  – непрерывна. В результате для любой (необязательно оптимальной) высоты зазора  $h(x)$  и пока произвольных ограниченных  $\lambda(x)$ , а в ИЗ – и  $\mu$  имеем

$$\begin{aligned} \delta J = & \left\{ \frac{1}{2} \alpha (h_- - h_+) + [(\lambda h^3)_+ - (\lambda h^3)_-] \right\}_d \Delta \pi_d + X_d \Delta x_d - \\ & - \Delta q \int_0^1 \lambda dx + \int_0^1 (A^h \delta h + A^\pi \delta \pi) dx \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$X = \frac{\alpha}{6} \left( \frac{1}{h_-} - \frac{1}{h_+} \right) + \lambda_- (h - q)_- + \lambda_+ (h - q)_+$$

$$3h^3 A^h = AB, \quad A = h - 3q/2, \quad B = \alpha - 6\lambda h^2, \quad 2A^\pi = 2\beta - (\alpha h - 2\lambda h^3)'$$

Здесь  $\Delta \pi_d$  и  $\Delta x_d$  – разности  $\pi$  и  $x$  в сечениях скачка  $h$  для проварьированного и непроварьированного зазоров, а  $\delta \pi$  и  $\delta h$  – разности  $\pi$  и  $h$  для них при фиксированном значении  $x$ . Коэффициент  $X$  преобразован с учетом уравнения (1.3).

Используя произвол в выборе  $\lambda$ , обратим в нуль  $A^\pi$ . Это приводит к справедливому для любого зазора на участках непрерывности  $h$  уравнению

$$(\alpha h - 2\lambda h^3)' = 2\beta \quad (2.3)$$

В возможных сечениях скачка  $h$  условия, связывающие  $\lambda_{d-}$  и  $\lambda_{d+}$ , получим, приравняв нулю множитель при  $\Delta \pi_d$ . Это даст

$$\alpha (h_- - h_+)_{d+} + 2[(\lambda h^3)_+ - (\lambda h^3)_-]_d = 0 \quad (2.4)$$

В силу (2.4), выражение в скобках в (2.3) непрерывно. Уравнения (2.3) и условий (2.4) в точках  $d$  для определения  $\lambda$  недостаточно. Недостающее условие получим, приравняв нулю коэффициент при  $\Delta q$

$$\int_0^1 \lambda dx = 0 \quad (2.5)$$

Пусть непрерывная или разрывная функция  $h(x)$  задана. Для нее, интегрируя уравнение (1.3) с заданным  $\pi(0) = \pi_0$  и подбирая постоянную  $q$ , удовлетворим условию  $\pi(1) = \pi_0$ , решив прямую задачу теории смазки. Затем в линейно зависящем от  $\lambda_0 = \lambda(0)$  решении уравнения (2.3) постоянную  $\lambda_0$  найдем из условия (2.5), решив сопряженную задачу для  $\lambda$ . После этого получим

$$\delta J = X_d \Delta x_d + \int_0^1 A^h \delta h dx \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{\alpha (h_+ - h_-)}{6h_+ h_-^3} [3qh_+ - h_- (3h_+ - h_-)] + \frac{\lambda_+}{h_-^3} (h_+ - h_-) f = \\ &= \frac{\alpha (h_+ - h_-)}{6h_- h_+^3} [3qh_- - h_+ (3h_- - h_+)] + \frac{\lambda_-}{h_+^3} (h_+ - h_-) f \end{aligned}$$

$$f = h_+ h_- (h_+ + h_-) - (h_+^2 + h_+ h_- + h_-^2) q$$

$$3h^3 A^h = AB, \quad A = h - 3q/2, \quad B = \alpha - 6\lambda h^2$$

Оба эквивалентных представления коэффициента  $X$  получены из (2.2) после исключения с помощью (2.4)  $\lambda_-$  или  $\lambda_+$ .

В ЗР, в которой  $\alpha = 0$ , а  $\beta = 1$ , анализ выражения (2.6) показывает, что оптимальный зазор может состоять из участков краевого экстремума: УКЭ1 и УКЭН, где  $h = 1$  и  $h = H$ , и участка двустороннего экстремума – УДЭ1. На УДЭ1 высота  $h$  определяется обращением в нуль  $A^h$  или  $A$ , т.е. равенством

$$2h - 3q = 0 \quad (2.7)$$

На УКЭ1 допустимые  $\delta h \geq 0$ , а на УКЭН  $\delta h \leq 0$ . В ЗР  $\delta J = \delta C_N$ , а допустимое варьирование оптимального зазора может вести только к уменьшению  $\delta C_N$ . Поэтому условия оптимальности на них принимают вид

$$\lambda(2 - 3q) \geq 0, \quad h = 1; \quad \lambda(2H - 3q) \leq 0, \quad h = H \quad (2.8)$$

Разные участки могут стыковаться с разрывом и без разрыва  $h$ . Для оптимальной "разрывной" стыковки и в ЗР, и в ИЗ необходимо, чтобы в сечении скачка функции  $h$  обращался в нуль коэффициент при  $\Delta x_d$  из (2.6). В ЗР, где  $\alpha = 0$ , это условие показывает, что "разрывная" стыковка УДЭ1 с любым из участков краевого экстремума возможна, если в сечении скачка функции  $h$

$$\lambda_{d-} = \lambda_{d+} = 0 \quad (2.9)$$

Согласно (2.7) и (1.3), на УДЭ1

$$h = 3q/2, \quad \pi' = 4/(27q^2) \quad (2.10)$$

Следовательно, на УДЭ1  $h \equiv \text{const}$ , а  $\pi$  растет линейно по  $x$ . Поэтому в силу (2.8)–(2.10) в ЗР оптимальная высота зазора  $h(x)$  имеет один разрыв. Он расположен либо между УКЭН и УКЭ1 в случае, когда  $H \approx 1$  и УДЭ1 просто нет, либо между УДЭ1 и УКЭ1. Такие зазоры на фиг. 1, б помечены цифрами 1 и 2.

В ИЗ  $\alpha = 1$ , и  $A^h = 0$  не только при  $A = 0$ , но и при  $B = 0$ , что по-прежнему приводит к (2.7) и к УДЭ1, но и из-за обращения в нуль множителя  $B$ . Во втором случае

$$6\lambda h^2 = 1 \quad (2.11)$$

Поэтому в ИЗ возможен УДЭ2. Он в силу (2.3) и (2.11) определяется уравнением

$$h' = 3\beta \quad (2.12)$$

Аналогично (2.8) в ИЗ должны выполняться неравенства

$$(1 - 6\lambda)(2 - 3q) \geq 0, \quad h = 1; \quad (1 - 6\lambda H^2)(2H - 3q) \leq 0, \quad h = H \quad (2.13)$$

Если  $\lambda_+$  или  $\lambda_-$  из (2.11) подставить в  $X_d$  с  $\alpha = 1$  из (2.6), то, как можно показать,  $X_d = 0$  только при  $h_{d+} = h_{d-}$ , т.е. УДЭ2 стыкуется с другими участками непрерывным образом.

3. Решение ИЗ начнем со случая  $C_N = 0$ . Последнее равенство имеет место при любом постоянном зазоре ( $h \equiv \text{const}$ ), в то время как  $C_D$  уменьшается с ростом высоты зазора. Поэтому при  $C_N = 0$  в силу ограничения на  $h$  сверху решение ИЗ дается равенством

$$h(x) = H \quad (3.1)$$

Из (1.3) и (3.1) при граничных условиях  $\pi(0) = \pi(1) = \pi_0$  следует, что

$$\pi(x) \equiv \pi_0 \quad (3.2)$$

Чтобы решение (3.1) давало минимум  $C_D$ , должно выполняться второе условие из (2.13). Так как согласно (1.3), (3.1) и (3.2)  $h \equiv H = q$ , а  $2H - 3q = -q < 0$ , то оно сводится к

$$1 - 6\lambda H^2 \geq 0 \text{ при } 0 \leq x \leq 1 \quad (3.3)$$

Определив  $\lambda(x)$  из уравнения (2.3) с  $h$  из (3.1) и из условия (2.5), получим

$$\lambda(x) = \beta(1 - 2x)/(2H^3) \quad (3.4)$$

В силу (3.4),  $\lambda$  – линейная функция  $x$ . Так как в (3.3)  $\lambda$  также входит линейно, то оно выполняется, если левая часть (3.3) неотрицательна при  $x = 0$  и  $1$ . Поэтому неравенство (3.3) имеет место при  $-H/3 \leq \beta \leq H/3$ . Точное значение  $\beta$  определяет непрерывный переход от  $C_N = 0$  к  $C_N > 0$ . Для его возможности сколь угодно малый положительный коэффициент  $C_N$  реализуется введением малого УДЭ2 в окрестности  $x = 1$ . Следовательно, для  $C_N = 0$  неравенство (3.3) должно при  $x = 1$  становиться равенством. Поэтому случаю  $C_N = 0$  отвечает

$$\beta = -H/3 < 0 \quad (3.5)$$

а положительные  $C_N$  в некоторой окрестности  $C_N = 0$  дает зазор, состоящий из УКЭН на входе (при  $0 \leq x \leq x_a < 1$ ) и сужающегося УДЭ2 – на его выходе (профиль 3 на фиг. 1, б). Теперь на УКЭН давление согласно (1.3) растет по  $x$ , так как из-за сужающегося концевого УДЭ2  $q$  меньше, чем при  $h \equiv H$ . На УКЭН  $\pi$  а в силу (2.3) и  $\lambda$  – линейные функции  $x$ . В точке  $a$ , где непрерывно стыкуются УКЭН и УДЭ2,  $h_a = H$ ,  $V_a = 0$  с  $V$  из (2.6) и  $\lambda_a = 1/(6H^2)$ . Справа от нее  $\lambda = 1/(6h^2)$ .

Согласно (2.12) и (3.5) в момент "зарождения" УДЭ2 он, как и должно быть, является сужающимся. Найдя из (3.5)  $h$  как функцию  $x$ ,  $x_a$ ,  $\beta$  и  $H$ , можно подставить ее в уравнение (1.3) и с использованием уже определенного в зависимости от  $q$  и  $x_a$  давления  $\pi_a$  найти  $\pi$  всюду при  $x_a \leq x \leq 1$ . Условие  $\pi(1) = \pi_0$  вместе с интегральным равенством (2.6), после подстановки в последнее  $\lambda(x)$ , определенного, как описано выше, дает две связи между  $q$ ,  $x_a$ ,  $\beta$  и  $H$ . Если ввести  $\beta^\circ = 3\beta/H$  и  $q^\circ = q/H$ , то эти связи принимают вид

$$2(q^\circ - 1)x_a = \frac{1 - x_a}{[1 + \beta^\circ(1 - x_a)]^2} [2(1 - q^\circ) + \beta^\circ(2 - q^\circ)(1 - x_a)] \quad (3.6)$$

$$x_a + \beta^\circ x_a^2 + \frac{1 - x_a}{1 + \beta^\circ(1 - x_a)} = 0, \quad \beta^\circ = \frac{3\beta}{H}, \quad q^\circ = \frac{q}{H}$$

Первая из них – "условие для давления", т.е. условие отсутствия перепада давления на зазоре. Вторая – следствие выполнения условия (2.5) для  $\lambda$ , далее называется "условием для  $\lambda$ ". После перехода от  $\beta$  и  $q$  к  $\beta^\circ$  и  $q^\circ$  из этих условий в форме (3.6) исчезла величина  $H$ . Этого следовало ожидать, ибо до тех пор, пока в решении нет УКЭ1, за характерную высоту зазора естественно взять не  $h_m$ , а  $H$ . После этого  $H$  проявляется себя только через постоянную  $\gamma$  с заменой в ней  $h_m$  на  $H$ .

В силу (3.6),  $\beta^\circ$  и  $q^\circ$  – функции только  $x_a$ . Согласно (3.5),

$$\beta^\circ(1) = -1, \quad q^\circ(1) = 1 \quad (3.7)$$

Разрешив второе уравнение из (3.6) относительно  $\beta^\circ$  и взяв из двух корней тот, который при  $x_a \rightarrow 1$  дает значение из (3.7), получим  $\beta^\circ$ , а после подстановки найденного выражения в первое уравнение (3.6) – и  $q^\circ$ . Имеем

$$\beta^\circ = \frac{\sqrt{4x_a - 3} - 1}{2x_a(1 - x_a)}, \quad q^\circ = 2 \frac{3x_a - 2 + x_a\sqrt{4x_a - 3}}{5x_a - 3 + (3x_a - 1)\sqrt{4x_a - 3}} \quad (3.8)$$

Согласно (3.8)  $\beta^\circ$  изменяется от  $-1$  до  $-8/3$  при изменении  $x_a$  от  $1$  до  $3/4$ . При  $x_a < 3/4$  подкоренное выражение в (3.8) отрицательно. Однако, поскольку  $q^\circ = 2/3$  при  $x_a = 3/4$  и  $\beta^\circ = -8/3$ , в момент достижения  $x_a$  значения  $3/4$  обращается в нуль множитель  $A = 2H - 3q$  в  $A^h$  из (2.6), и на всем УКЭН первое неравенство из (2.13) становится равенством. После этого оптимальный зазор "замораживается" в том смысле, что оптимальные  $h(x)$ , отвечающие бóльшим  $C_N$ , получаются с фиксированными  $x_a = 3/4$ ,  $\beta^\circ = -8/3$  и  $q^\circ = 2/3$ . Теперь, однако, в условиях (3.6)  $\beta$  и  $q$  относятся не к заданному значению  $H$ , а к меньшей  $H$  высоте зазора  $h_1$  на входном горизонтальном УДЭ1. Уменьшение  $h_1$  уменьшает расход  $q = 2h_1/3$  и модуль тангенса угла наклона УДЭ2  $3\beta = -8h_1/3$  и увеличивает давление и трение в зазоре. При этом  $h^\circ(x) = h/h_1$  и коэффициенты  $C_{N1} = N/(\gamma_1 L \rho U^2)$  и  $C_{D1} = D/(\gamma_1 h_1 \rho U^2)$  с  $\gamma_1 = 6L\mu/(h_1^2 \rho U)$  не изменяются. В частности,  $h_f^\circ = 1/3$ . Вспомнив определения (1.4), найдем

$$C_N = h_m^{\circ 2} C_{N1}, \quad C_D = h_m^\circ C_{D1}, \quad h_m^\circ = h_m / h_1 \quad (3.9)$$

Для  $h_1 \leq H$  эти равенства верны до достижения значения  $C_N$ , при котором  $h_f = h_f^\circ h_1 = h_1/3 = 1$ , т.е. на выходе из сужающегося УДЭ2 зазор достигает минимально допустимой величины. Если же "двигаться" в направлении уменьшения  $C_N$ , то при  $H \rightarrow \infty$  диапазон справедливости (3.9) и "автомодельного" (в описанном выше смысле) оптимального зазора в плоскости коэффициентов  $C_N$  и  $C_D$  простирается до начала координат. В конечной его окрестности – до значений  $C_N = C_{N3}$  и  $C_D = C_{D3}$ , отвечающих  $H = 3$ , оптимальное значение  $C_D$  и величина  $h_1$ , в силу (3.9), связаны с  $C_N$  формулами (значения  $C_{N3}$  и  $C_{D3}$  приведены в следующем разделе):

$$C_D = k_D \sqrt{C_N}, \quad h_1 = k_h / \sqrt{C_N}; \quad k_D = C_{D1} / \sqrt{C_{N1}} = C_{D3} / \sqrt{C_{N3}}, \quad k_h = 3\sqrt{C_{N3}} \quad (3.10)$$

При отсутствии ограничения на  $h$  сверху ( $H = \infty$ ) оптимальный зазор, состоящий из двух участков двустороннего экстремума – горизонтального УДЭ1 при  $0 \leq x \leq 3/4$  и прямолинейного сужающегося УДЭ2 при  $3/4 \leq x \leq 1$ , реализуется до достижения значения  $h_1 = 3$ . До этого же значения  $h_1$  справедливы формулы (3.10). Фиг. 1, в показывает эволюцию оптимальных зазоров при  $H = 5$  и  $3 \leq h_1 \leq 5$ .

Дальнейшее увеличение  $C_N$  требует рассмотрения зазоров с тремя участками (профиль 4 на фиг. 1, б): горизонтальным УДЭ1 –  $ia$  с  $h = h_1 < 3$ , наклонным УДЭ2 –  $ab$  и УКЭ1, на котором  $h = 1$ . Участок  $ab$  соединяет точки с координатами  $x = x_a$ ,  $h = h_a = h_1$  и  $x = x_b \geq x_a$  и  $h_b = 1$ . Последнее условие вместе с уравнением наклонного участка позволяет выразить  $x_b$  через  $h_1$ ,  $\beta$  и  $x_a$ :

$$x_b = x_a + (1 - h_1)/(3\beta) \quad (3.11)$$

Равенство (3.11) справедливо не только при горизонтальном участке – УДЭ1, где  $h_1 = 3q/2$ , но и, если это – УКЭН. Последнее может быть при  $H < 3$ .

Условие для давления и условие для  $\lambda$  для зазора из двух горизонтальных УКЭ и соединяющего их наклонного УДЭ2 после исключения  $x_b$  с помощью формулы (3.11) принимают вид

$$1 - h_1 \omega^2 + \varepsilon[1 + (3 - 2h_1)h_1 \omega] + \varepsilon^2(1 - h_1)^3 = 0 \quad (3.12)$$

$$2(h_1 - q) + 2(1 - q)h_1^2 \omega + \varepsilon(h_1 - 1)^2[2h_1(1 - q) - q] = 0$$

$$\omega = h_1(1 - x_a)/x_a, \quad \varepsilon = h_1/(3\beta x_a)$$

Исключение  $\epsilon$  из системы (3.12) приводит к квадратному уравнению

$$a\omega^2 - 2b\omega + c = 0 \quad (3.13)$$

$$a = -h_1[h_1^2(3q^2 - 6q + 4) + 2h_1q(q - 2) + q^2] = -4h_1^3(h_1 - 1)(4 - 3h_1)/9$$

$$b = h_1[2h_1^2(q^2 - 2q + 2) + h_1q(q - 6) + 3q^2] = 4h_1^3(h_1 - 1)(2h_1 - 3)/9$$

$$c = 4h_1^4(q - 1)^2 - 4h_1^3(q^2 - 3q + 3) - h_1^2(3q^2 - 12q - 4) - 6h_1q(q + 1) + 3q^2 = \\ = 4h_1^2(h_1 - 1)[4(h_1 - 1)^3 + 1]/9$$

где вторые выражения для  $a$ ,  $b$  и  $c$  получены из первых подстановкой  $q = 2h_1/3$ , которая отвечает зазору с УДЭ1.

В данном решении  $h_1 = 3$  и  $q = 2h_1/3 = 2$  отвечают  $x_a = 3/4$  и  $\omega = 1$ . Этим определяется выбор знака в решении квадратного уравнения (3.13). С учетом такого выбора для  $q = 2h_1/3$  имеем

$$\omega = \frac{h_1(2h_1 - 3) - 2\sqrt{3h_1}(h_1 - 1)^2}{h_1(4 - 3h_1)} \quad (3.14)$$

При достаточно жестком ограничении на  $h$ , когда  $h_1 = H < 3q/2$ , что имеет место при  $H < 3$ , (3.14) следует заменить на

$$\omega = (b - d)/a \quad (3.15)$$

$$d = (2h_1^2q - 2h_1^2 - h_1q + 2h_1 - q)[h_1^2(3q^2 - 6q + 4) + 3h_1q(q - 6) + 3q^2]^{1/2}\sqrt{h_1}$$

Здесь  $b$  и  $a$  определяются по  $h_1 = H$  и  $q$  первыми выражениями из (3.13).

Коэффициенты уравнения (3.13) и его решения в форме (3.14) и (3.15) получены с помощью системы REDUCE.

При  $H < 3$  переход от оптимального зазора из УКЭН и УДЭ2 к зазору из двух горизонтальных и соединяющего их сужающегося участка происходит без промежуточного "замороженного" решения из УДЭ1 и УДЭ2. Значения  $x_{a1}$ , при котором  $h_f = 1$  в конце наклонного участка, в этом случае меньше  $3/4$ . Чтобы найти это значение  $x_{a1}$ , нужно в уравнение УДЭ2:  $h = H + \beta^\circ H(x - x_a)$  подставить  $x = h = 1$  и  $\beta^\circ$  из (3.8). Разрешив получившееся в результате квадратное уравнение для  $x_a$  и выбрав тот его корень, который при  $H = 3$  дает уже известную величину  $x_a = 3/4$ , придем к искомой формуле

$$x_{a1} = \frac{2H}{2H - 1 + \sqrt{4H - 3}}, \quad 1 \leq H \leq 3 \quad (3.16)$$

Подстановка  $x_a = x_{a1}$  из (3.16) в первую формулу (3.6) дает "граничное" значение  $q^\circ = q_1^\circ$ , а следовательно, и  $q_1 = q_1^\circ H$  как функцию  $H$

$$q_1^\circ = \frac{2H + 3 + \sqrt{4H - 3}}{H^2 + 2H + 3}, \quad 1 \leq H \leq 3 \quad (3.17)$$

Как следует из (3.17),  $q_1^\circ(3) = 2/3$ ,  $q_1^\circ(1) = 1$ , чему отвечают  $q_1(3) = 2$  и  $q_1(1) = 1$ .

Наконец, значение  $\beta_1^\circ$ , отвечающее  $x_{a1}$  из (3.16), равно

$$\beta_1^\circ = (2 - 3H - H\sqrt{4H - 3})/(2H), \quad 1 \leq H \leq 3$$

В ИЗ особая роль принадлежит ЗР, которая определяет максимальное значение  $C_N = C_{NR}$ , задаваемое как изопериметрическое условие. Решение ЗР, во-первых, можно получить из отвечающих ей уравнений и условий разд. 2, включая (2.9) – условие равенства нулю множителя  $\lambda$  в сечении скачка  $h$ . При  $x < x_d$  в решении ЗР расположен горизонтальный УДЭ1, на котором в

силу (2.10)  $h \equiv h_R = 3q_R/2$ . Здесь, как и у  $C_{NR}$ , индекс  $R$  приписан оптимальным величинам из ЗР. При  $x > x_d$  в ЗР расположен также горизонтальный УКЭ1 с  $h \equiv 1$ . На обоих участках производные  $\pi'$  и  $\lambda'$ , в силу уравнений (1.3) и (2.3) с  $\alpha = 0$  и  $\beta = 1$ , постоянны. Поэтому  $\pi$  и  $\lambda$  – линейные функции  $x$ , зависящие от  $x_d$  и  $h_R$  или  $q_R = 2h_R/3$ , которые определяются условиями (3.6). В ЗР они сводятся к равенствам

$$h_R \omega^2 = 1, \quad (2h_R - 3)h_R \omega = 1 \quad (3.18)$$

с  $\omega$ , получающимся из (3.12) заменой  $x_d$  на  $x_d$ . Исключение из (3.18)  $\omega$  или  $h_R$  дает кубическое уравнение. Решив его и взяв корень  $h_R > 1$ , получим

$$h_R = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \approx 1,866, \quad x_{dR} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{9} \approx 0,7182, \quad q_R = \frac{2 + \sqrt{3}}{3} \approx 1,244$$

$$q_R^0 = \frac{2}{3}, \quad C_{NR} \approx 0,03438, \quad C_{DR} \approx 0,1409 \quad (3.19)$$

Те же уравнения (3.18) и значения  $h_R$ ,  $x_{dR}$  и  $q_R$  получаются, если в системе (3.12) ИЗ положить  $\varepsilon = 0$ , что соответствует обращению в минус бесконечность множителя Лагранжа  $\beta$ . Это означает, что переход от решения ИЗ к решению ЗР осуществляется при  $C_N \rightarrow C_{NR}$  за счет непрерывного уменьшения длины и роста наклона (по модулю) УДЭ2.

ЗР имеет смысл при любых ограничениях на  $h$ , в том числе при  $H < h_R$ . В таких случаях оптимальный зазор вместо входного УДЭ1 содержит также горизонтальный УКЭН с  $h = H < h_R$ . Оптимальные длина  $x_{dRH}$  и расход  $q_{RH}$  по-прежнему определяются условиями (3.6), но без замены в них  $q$  на  $2h/3$ , т.е.

$$1 = H \omega^2, \quad H - q_{RH} = (q_{RH} - 1)H^2 \omega, \quad \omega = (1 - x_{dRH})H / x_{dRH}$$

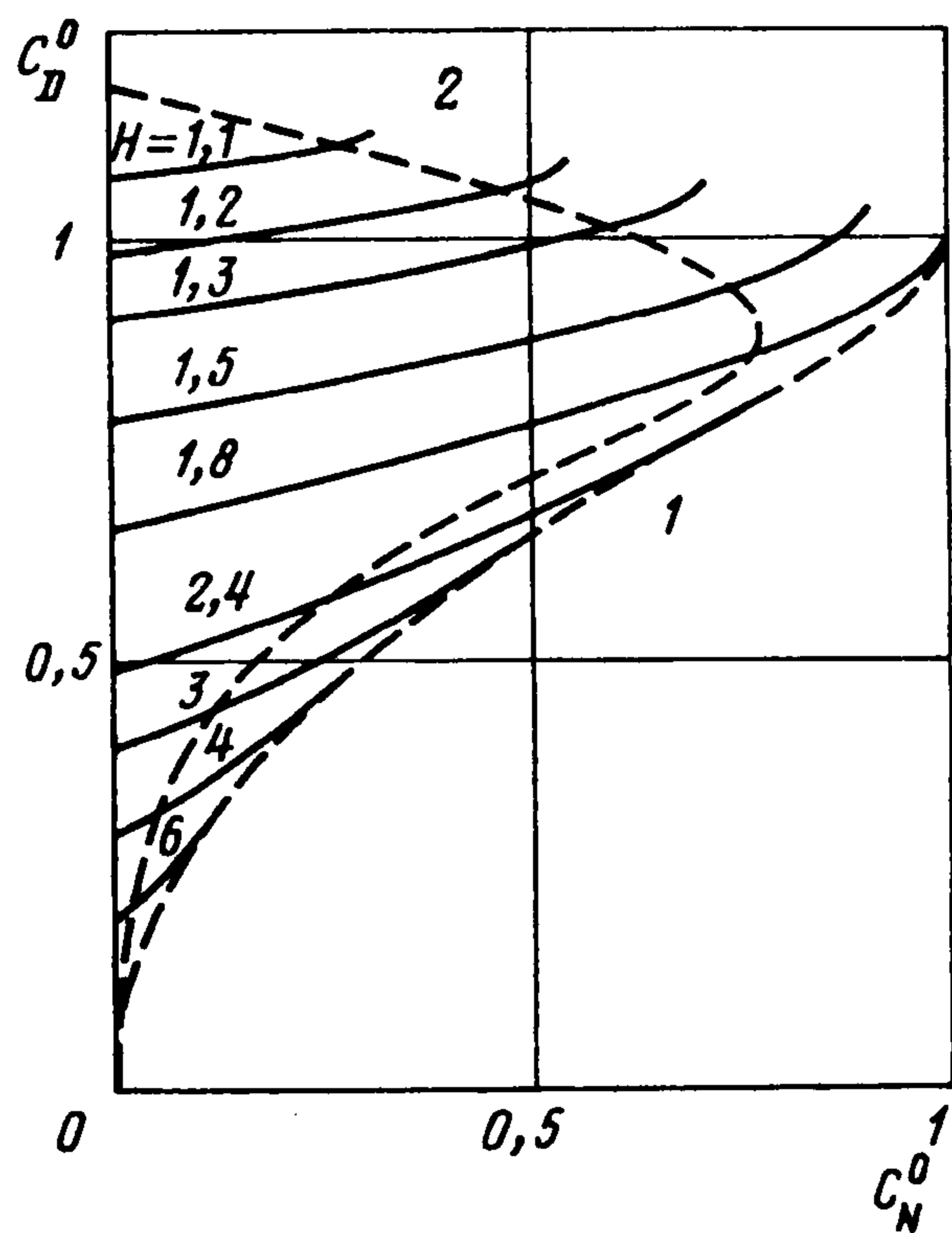
Отсюда

$$x_{dRH} = \frac{H^{3/2}}{1 + H^{3/2}}, \quad q_{RH} = \frac{H(1 + \sqrt{H})}{1 + H^{3/2}}, \quad 1 \leq H \leq \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \quad (3.20)$$

Полученные формулы дают решения ЗР и ИЗ для любых  $H \geq 1$ . Коэффициент  $A^h$  на входящих в них УКЭ1 и УКЭН имеет требуемый знак.

4. Характеристики оптимальных ползунов, построенных согласно условиям, полученным выше, собраны на фиг. 2, где по осям отложены  $C_N^0 = C_N/C_{NR}$  и  $C_D^0 = C_D/C_{DR}$  с  $C_{NR}$  и  $C_{DR}$  из (3.19). Так как  $C_N \leq C_{NR}$ , то  $0 \leq C_N^0 \leq 1$ . В то же время  $C_D^0$  может превышать единицу, ибо максимальное значение  $C_D$ , получающееся для зазора с  $h \equiv 1$ , который отвечает ИЗ с  $H = 1$ , равно  $1/6$ . Это дает максимум  $C_D^0 \approx 1,184$ . На фиг. 2 сплошные кривые отвечают разным значениям  $H$ . Поскольку в ЗР  $h_R \approx 1,866$ , то все кривые, отвечающие  $H \geq h_R$ , при некотором  $C_N^0 \leq 1$  приходят на "огibaющую" (штриховая кривая 1), которая получается в ИЗ при отсутствии ограничений на  $h$  сверху. Пять верхних кривых, рассчитанных для  $H < h_R$ , на огibaющую не приходят и заканчиваются при  $C_N^0 < 1$ . Их правые точки соответствуют ЗР с дополнительным ограничением  $h \leq H < h_R$ , а  $x_{dR} = x_{dRH}$  и  $q_R = q_{RH}$  определяются формулами (3.20). При  $H \rightarrow 1$  в силу этих формул  $x_{dRH} \rightarrow 1/2$ .

Упомянутые выше коэффициенты  $C_{N3}$  и  $C_{D3}$  и



Фиг. 2

отвечающие им  $C_{N3}^0$  и  $C_{D3}^0$  оказались такими:  $C_{N3} \approx 0,0172$ ,  $C_{D3} \approx 0,0916$ ,  $C_{N3}^0 = 0,5$ ,  $C_{D3}^0 \approx 0,650$ . Поэтому согласно (3.10) для автомодельного решения, которое дает половину огибающей 1,  $C_D^0 = 0,92\sqrt{C_N^0}$ ,  $h_1 = 2,12/\sqrt{C_N^0}$  и  $0 \leq C_N^0 \leq 0,5$ .

Оптимальные ползуны сравнивались с неоптимальными, имеющими наклонный зазор:  $h(x) = 1 + (N - 1)(1 - x)$ . Для "наклонных" ползунов  $h = 1$  при  $x = 1$  и  $h = N$  при  $x = 0$ , а  $C_N$  и  $C_D$  определяются формулами

$$C_N = \frac{1}{(N-1)^2} \left( \ln N - 2 \frac{N-1}{N+1} \right), \quad C_D = \frac{1}{N-1} \left( \frac{2}{3} \ln N - \frac{N-1}{N+1} \right) \quad (4.1)$$

Зависимость  $C_D^0$  и  $C_N^0$ , рассчитанная по этим формулам, на фиг. 2 дана штриховой кривой 2. На ней отсутствует "разметка по N", что без приводимой ниже информации не позволяет провести аккуратное сравнение  $C_D^0$  оптимальных и наклонных ползунов. Однако для малых  $C_N^0$ , т.е. для больших N, когда в силу (4.1) и (3.19)  $C_D^0 \approx 0,82\sqrt{\ln N}\sqrt{C_N^0}$  сравнение с  $C_D^0$  оптимальных ползунов указывает на их существенное преимущество.

Коэффициенты сопротивления оптимальных и наклонных ползунов сравнивались при одинаковых  $C_N$  и N. Результаты сравнения даны ниже

N	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	3,0	4,0	5,0	6,0	11
$C_N \times 10^3$	6	17	22	26	26	27	27	26	25	21	17	14	7
$C_D \times 10^2$	16	15	14	13	13	13	12	12	12	11	10	9	8
$\delta C_D(\%)$	4	8	10	12	11	10	8	7	6	9	12	15	29

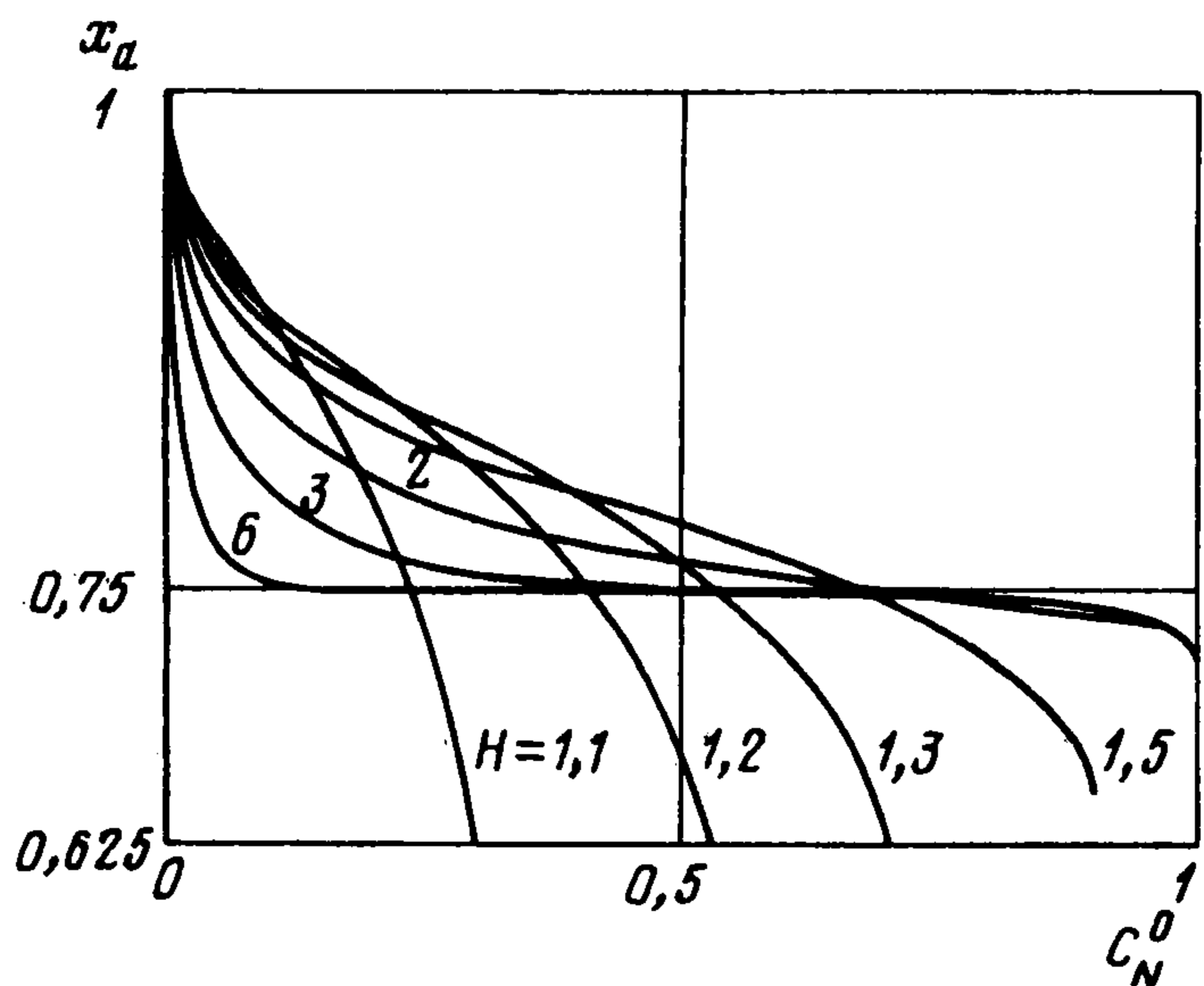
Здесь  $C_D$  – коэффициент сопротивления наклонного ползуна, а  $\delta C_D$  – его превышение над аналогичным коэффициентом оптимального. При этом максимальная высота оптимального зазора, удовлетворяя условию  $h \leq N$ , как правило, меньше N. Видно, что  $\delta C_D$  ведет себя немонотонно. При N, для которых коэффициент несущей способности  $C_N$  наклонных ползунов близок к максимуму, преимущество оптимальных ползунов по  $C_D$  составляет величину порядка 10% и быстро растет с уменьшением  $C_N^0$  при  $C_N^0 < 0,5$ .

Оптимальные ползуны имеют зазор, состоящий либо из двух горизонтальных участков, соединенных наклонным, либо (при малых  $C_N^0$ ) из двух: входного – горизонтального и замыкающего – наклонного. Информация об их геометрии собрана на фиг. 3 – 6. Фиг. 3 для значений N от 1,1 до 6 в зависимости от  $C_N^0$  дает координату  $x_a$  начала наклонного участка, а фиг. 4 – координату  $x_b$  его конца. Для больших N оптимальная координата  $x_a$  меняется сильно (от 0,75 до 1) только для малых  $C_N^0$ . Так, если  $N \geq 5$ , то значениям  $0,2 \leq C_N^0 \leq 1$  отвечают  $0,75 \geq x_a \geq x_{dR} \approx 0,718$ . Значительно меняется  $x_a$  во всем диапазоне значений  $C_N^0$  для N, близких и меньших  $h_R \approx 1,866$ .

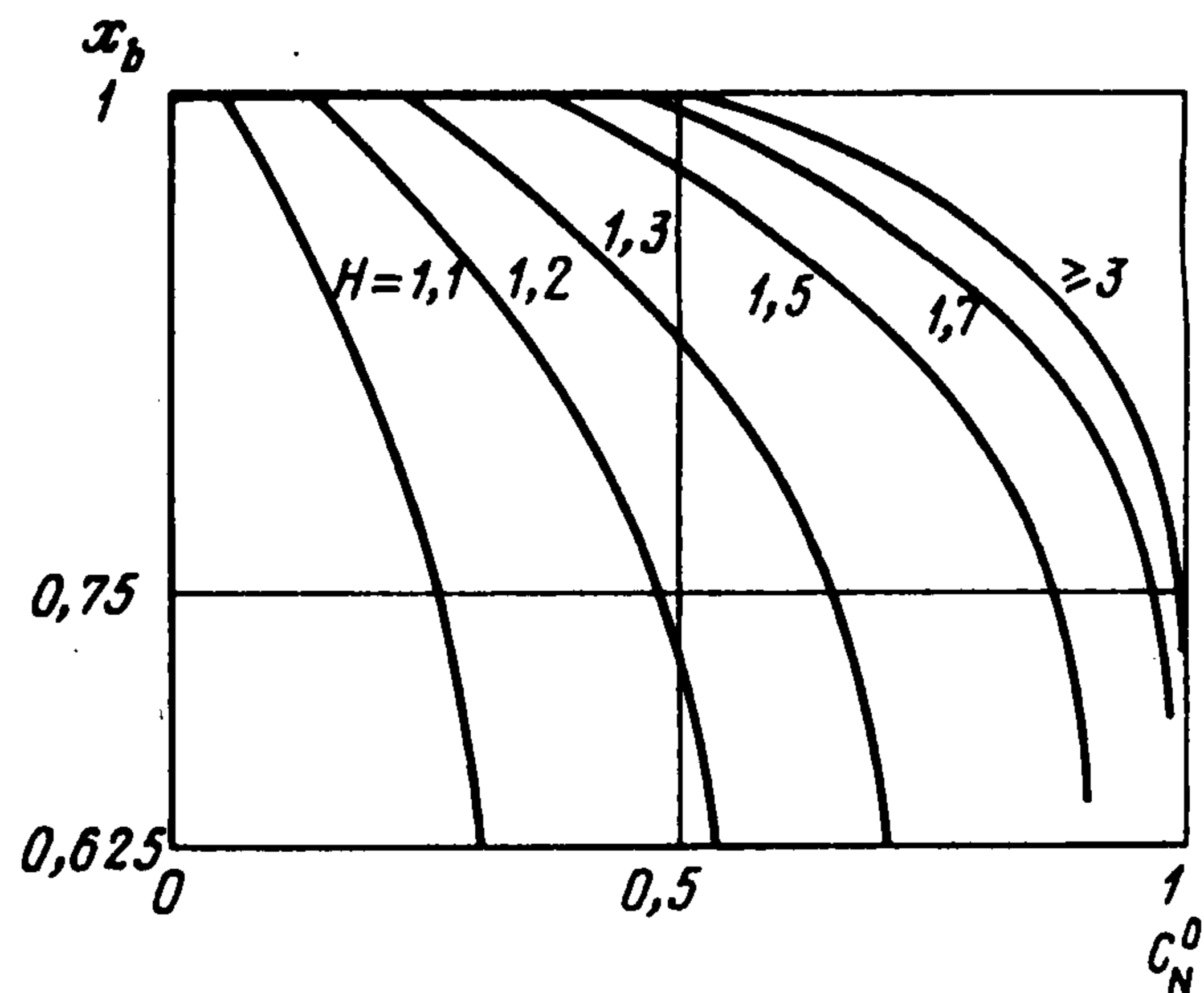
Координата  $x_b$  как функция  $C_N^0$ , начиная со значения, отвечающего появлению УКЭ1 (на фиг. 4 этому соответствует приход наклонной кривой на горизонталь  $x_b = 1$ ), изменяется достаточно сильно. Однако и здесь кривые  $x_b = x_b(C_N^0, N)$  при  $N \geq h_R$  либо совпадают, либо весьма близки.

Минимальная высота зазора  $h_b$  превышает минимально допустимую величину  $h_b = 1$  в окрестности  $C_N^0 = 0$  (фиг. 5). При  $N \geq h_R$  эта окрестность простирается до  $C_N^0 = 0,5$ , причем согласно сказанному ранее, для  $N \geq 3$  не зависит от величины N. При  $N < h_R$  размер указанной окрестности и само изменение  $h_b$  уменьшаются с приближением N к единице. На фиг. 5 величина N для каждой кривой равна ее ординате при  $C_N^0 = 0$ .

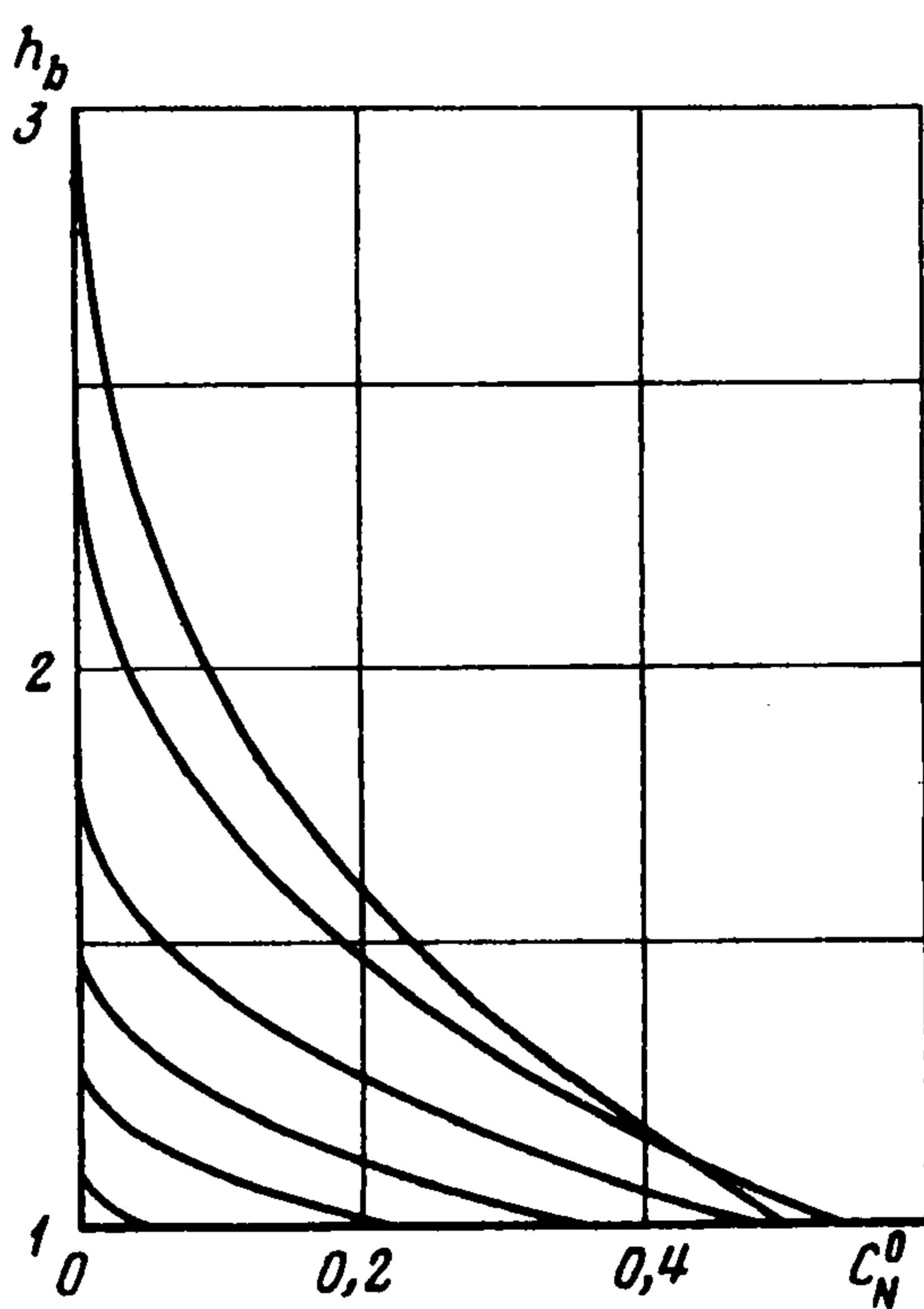
Если  $N > h_R$ , то согласно сказанному ранее величина  $h = h_1$  при превышении некоторого, зависящего от N значения  $C_N^0$  уменьшается до  $h_1 = h_R$  по одному для всех значений N закону (фиг. 6, кривая 1). Для каждого значения  $N > h_R$  зависимость  $h_1 = h_1(C_N^0, N)$  дается горизонтальным отрезком с  $h_1 \equiv N$ , а после его пересечения с кривой 1 – этой кривой. Если же



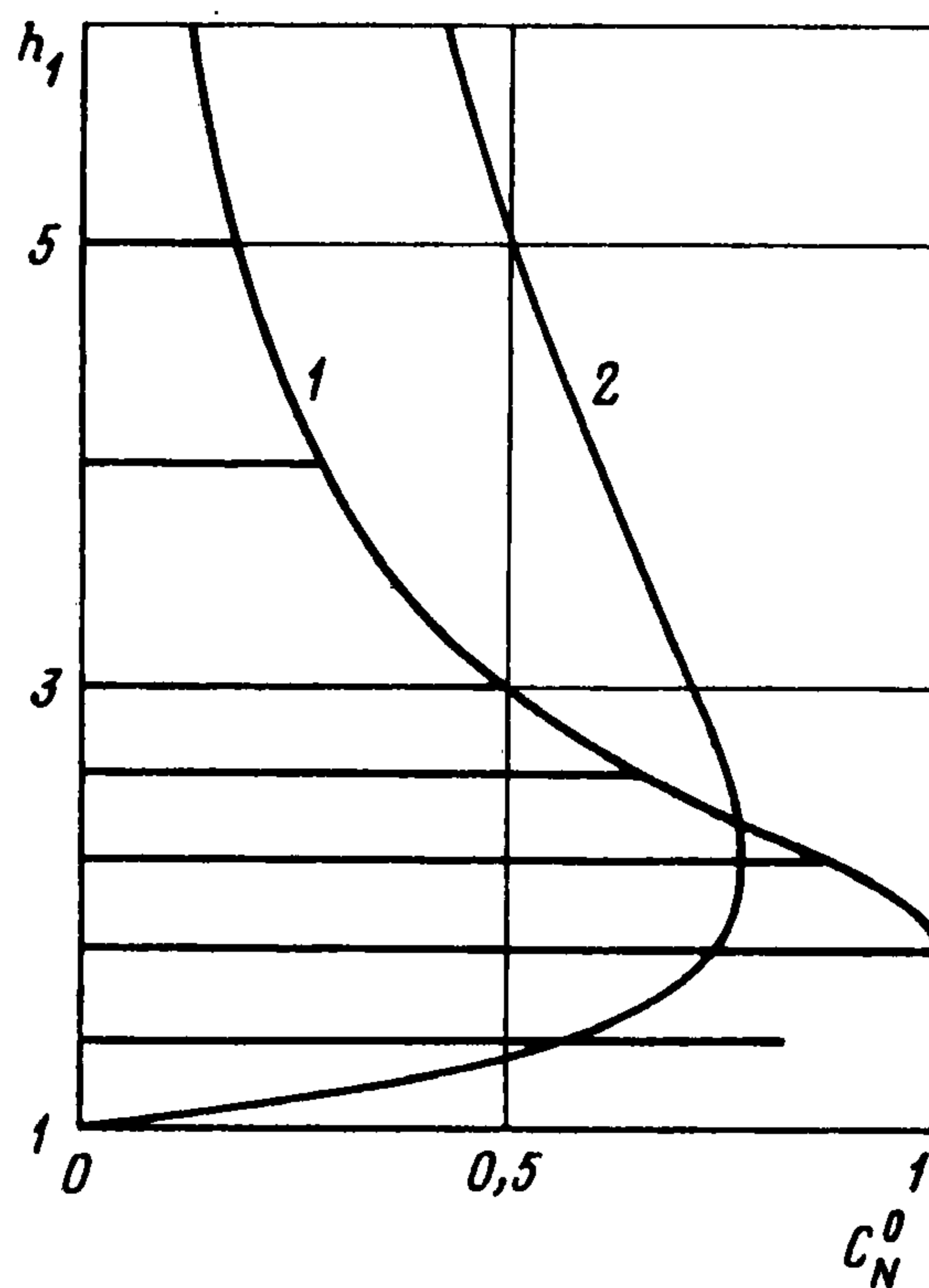
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

$H \leq h_R$ , то оптимальное значение  $h_1$  совпадает с  $H$  для всех  $C_N^0$ , достижимых при таких  $H$ . Этим случаям отвечают две нижних горизонтали на фиг. 6. Наконец, кривая 2 дает зависимость  $H$  от  $C_N^0$  для наклонных ползунов. Кривые 1 и 2 на фиг. 6 вместе с информацией о форме оптимальных ползунов для больших  $H$  позволяют находить  $\delta C_D$  для любых  $C_N^0$  и  $H$ .

Выполненный выше анализ и представленные результаты отвечают  $C_N \geq 0$ . Возможны приложения, в которых  $N$  и коэффициент  $C_N$  отрицательны. Можно показать, что в ЗР зазор, реализующий минимум отрицательного коэффициента  $C_N$ , т.е. максимум его модуля, получается зеркальным отражением относительно оси  $y$  зазора ЗР с  $N > 0$ . В ИЗ с заданным  $C_{N1} < 0$  оптимальный зазор получается таким же отражением из зазора ИЗ с  $C_N = |C_{N1}|$ . Зависимость коэффициента  $C_D^0$  от  $C_N^0$  и от  $H$  и в этом случае дают кривые фиг. 2.

5. Сравнение результатов данного исследования и [10] начнем с того, что в [10] "силой трения" называется полное сопротивление ползуна. Далее  $R = C_D/C_N$  и  $R^0 = C_D/\sqrt{C_N}$ , по которым оптимизировался зазор в [10], являются частными случаями нелинейного функционала  $F = F(C_D, C_N)$ . Пусть  $F_D$  и  $F_N$  – производные от  $F$  по  $C_D$  и  $C_N$  соответственно,  $r = F_N/F_D$  и, как в [10],  $F_D > 0$  при  $C_N > 0$ . Тогда при решении задачи на минимум  $F$  – "задачи  $F$ " как задачи Лагранжа вариация функционала Лагранжа с точностью до несущественного множителя

$$\delta J = \delta C_D + r(C_D, C_N) \delta C_N + \Lambda$$

С другой стороны, в ИЗ

$$\delta J = \delta C_D + \beta \delta C_N + \Lambda$$

Отсюда видно, что, во-первых, условия минимума  $F$  получаются из условий разд. 2 и 3 заменой  $\beta$  на  $r$ . При  $F_D < 0$  в дополнение к этому в условиях на УКЭ меняются знаки неравенств. Во-вторых, при  $F_N \neq 0$  и  $F_D \neq 0$  в задаче  $F$  наряду с УДЭ1 возможен наклонный УДЭ2 с  $h' = 3r$ . Для  $F = R$ , когда  $r = -R$ , наличие такого участка впервые установлено в [10], что представляется наиболее важным результатом этой работы. Наконец, решению задачи  $F$  отвечает то решение ИЗ, для которого  $\beta = r(C_N, C_D)$ . При  $F = R$  это имеет место в единственной точке кривой 1 фиг. 2 с  $C_N^0 \approx 0,9673$ ,  $C_D^0 \approx 0,9427$ ,  $h_1 \approx 2,0024$ ,  $x_a \approx 0,7342$ ,  $h_b = 1$ ,  $x_b \approx 0,8179$  и  $R = 3,994$ . В задаче с  $F = R^0$ , когда  $r = -R/2$ ,  $\beta = r$  на начальном участке кривой 1, где  $0 \leq C_N^0 \leq 0,5$ . На нем  $R^0 \approx 0,699$ ,  $x_a = 0,75$ ,  $x_b = 1$  и  $h_1/h_b = 3$ .

С учетом различий в определениях (например, в [10]  $R^0 = C_D \sqrt{6/C_N}$ ) приведенные значения практически не отличаются от найденных в [10] "прямым методом". Последнее естественно, так как в [10] структура оптимального зазора была установлена из условий оптимальности, а численный поиск сводился к определению  $x_a$ ,  $x_b$  и  $h_1/h_b$ , реализующих минимум  $R$  или  $R^0$ . То, что в [10] эти условия получены в рамках отличной от общепринятой "нелокальной" формулировки, несущественно. Более важно понять, почему найденные в [10] решения ИЗ из всего многообразия оптимальных зазоров дали лишь те, которые отвечают нижней половине ( $C_N^0 \leq 0,5$ ) кривой 1 на фиг. 2. Причина этого связана с использованным в [10] способом удовлетворения изопериметрического условия на  $N$  путем подбора минимальной размерной высоты зазора  $h_N$ . В отличие от  $h_N$  также размерная минимально допустимая высота зазора  $h_m$  определяется соображениями физического характера (шероховатостью поверхностей, наличием твердых примесей в смазке, возможными колебаниями ползуна и т.д.). Поэтому по постановке задачи при заданной величине  $h_m$  возможен УКЭ1, на котором  $h = 1$ , а допустимые  $\delta h \geq 0$ . Если же высота  $h$  отнесена к  $h_N$ , то при  $h = 1$  допустимы  $\delta h$  любого знака и УКЭ1 не может быть. В результате из всего многообразия решений ИЗ минимизация  $R^0$  дает только автотельное решение (3.10), т.е. нижнюю половину кривой 1 фиг. 2. Хотя, несмотря на это, в [10] при поиске минимума  $R^0$  вводился участок  $h = 1$ , отличие от нуля его "оптимальной" длины, равной 0,001, связано только с погрешностями счета. Наконец, отсутствие в [10] ограничения на  $h$  сверху исключило решения с УКЭН.

Автор благодарит Ю.П. Федорченко, В.И. Грабовского, Н.И. Тилляеву, Ю.Я. Болдырева и Г.Г. Черного за обсуждения, а К.С. Реента, В.Г. Александрова, В.А. Вострецову и Д.Е. Пудовикова – за помощь.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01825 и 96-15-96158).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lord Rayleigh. Notes on the theory of lubrication // Phil. Mag. 1918. V. 35. P. 1–12.
2. Madau C.J. A bounded variable approach to the optimum slider bearing // Trans. ASME. Ser. F.J. Lubr. Technol. 1968. V. 90. № 1. P. 240–242 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1968. Т. 90. № 4. С. 252–255.
3. Madau C.J. The one-dimensional optimum hydrodynamics gas slider bearing // Trans. ASME. Ser. F.J. Lubr. Technol. 1968. V. 90. № 1. P. 281–284 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1968. Т. 90. № 4. С. 294–299.
4. Chow C.Y., Cheng H.S., Wilcock D.F. Optimum surface profile for the enclosed pocket hydrodynamic gas thrust bearing // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1970. V. 92. № 2. P. 318–324 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1970. Т. 92. № 2. С. 148–154.
5. Болдырев Ю.Я., Троицкий В.А. Одна пространственная вариационная задача газодинамической теории смазки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 34–39.
6. Rohde S.M., McAllister G.T. On the optimization of fluid film bearings // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1976. V. 351. № 1667. P. 481–497.

7. *Gregory E.W., Maday C.J.* A class of maximum load capacity sector thrust bearings // *Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol.* 1977. V. 99. № 2. P. 180–186 = *Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки.* 1977. Т. 99. № 2. С. 37–44.
8. *Болдырев Ю.Я., Борисов Ю.В.* Упорный секторный подшипник с газовой смазкой, имеющий максимальную несущую способность // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1990. № 6. С. 35–42.
9. *Болдырев Ю.Я., Лупуляк С.В., Шиндер Ю.К.* Численное решение вариационной задачи Рэлея теории газовой смазки // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 6. С. 31–38.
10. *Rohde S.M.* The optimum slider bearing in terms of friction // *J. Lubr. Technol.* 1972. V. 94. № 3. P. 275–280 = *Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки.* 1972. Т. 94. № 3. С. 82–87.
11. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию  
31.1.1997