ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 62. Вып. 2, 1998

УДК 532.516

© 1998 г. А.Л. Афендиков, В.П. Варин

ВЫРОЖДЕННАЯ БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛА В МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ

Предлагается алгоритм построения рядов Ляпунова – Шмидта в многопараметрических задачах с квадратичной нелинейностью, что позволяет с помощью подготовительной теоремы Вейерштрасса исследовать вырожденную бифуркацию рождения цикла. Рассматривается применение этого алгоритма к изучению многопараметрических задач гидродинамики: течений Колмогорова и Куэтта – Пуазейля в плоском канале.

Один из методов изучения бифуркации рождения цикла (метод Ляпунова – Шмидта) был независимо применен к задаче возникновения автоколебаний в жидкости рядом авторов [1–3]. Позднее было показано [4, 5], как можно индуктивно строить разложения по надкритичности $\varepsilon = \theta(R - R_0)^{1/2}$, $\theta = \pm 1$, где R_0 – критическое число Рейнольдса потери устойчивости основного течения. Была дана [6, 7] конструктивная процедура построения этих рядов и указанные разложения были использованы для изучения потери устойчивости плоского течения Пуазейля.

Однако разложения по ε можно строить только при выполнении условия невырожденности, которое в многопараметрических задачах может нарушаться на некотором многообразии коразмерности единица в пространстве параметров.

Известно [1], что более общими являются разложения по степеням амплитуды. Они могут быть использованы для изучения ответвляющихся решений в окрестности точки вырождения. Однако ни в этой, ни в последующих работах алгоритмической стороне построения этих разложений не было уделено должного внимания, поскольку для нелинейности общего вида эта задача становится необозримой.

Цель данной работы – привести явные формулы, позволяющие строить указанные разложения в задачах гидродинамики и продемонстрировать применение этих результатов в задачах Колмогорова и Куэтта – Пуазейля.

1. Применения метода редукции Ляпунова – Шмидта для изучения возникновения автоколебаний в жидкости. Напомним вкратце, не претендуя на оригинальность, известную конструкцию метода Ляпунова – Шмидта (см. [1–3]). Рассмотрим эволюционное уравнение с квадратичной нелинейностью

$$\partial u / \partial t + R_0 \mathrm{A}_0 u + \varepsilon \mathrm{A} u + \mathrm{B}(u,\ u) = 0, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

где A_0, A – линейные, а $\mathrm{B}(u, v)$ – билинейные ограниченные операторы, действующие из G в H, где G и H – вещественные гильбертовы пространства и $G \subset H$, причем A, B зависят от $\mu \in \mathbb{R}^n$. Разыскивая $2\pi/c$ периодические по времени решения задачи (1.1), получаем

$$c \partial u / \partial t + R_0 \mathrm{A}_0 u + \varepsilon \mathrm{A} u + \mathrm{B}(u,\ u) = 0 \tag{1.2}$$

Обозначим $G_{2\pi}, H_{2\pi}$ – пространства интегрируемых с квадратом функций со значениями в G и H соответственно, а $G_{2\pi}^{\mathbb{C}}$, $H_{2\pi}^{\mathbb{C}}$ – комплексификации этих пространств. Скалярные произведения в $H_{2\pi}^{\mathbb{C}}$ обозначим

$$\langle u(t),\ v(t)\rangle_{H_{2\pi}^{\mathbb{C}}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u(t),\ v(t))_{H^{\mathbb{C}}}\,dt$$

Предположение 1. Оператор $Lu = c_0\partial u/\partial t + R_0A_0u$ имеет двукратное полупростое собственное значение $\lambda = 0$ с отвечающими ему собственными функциями $\varphi_0 = e^{it}\chi_0$ и $\overline{\varphi}_0 = e^{-it}\overline{\chi}_0$, где $\chi_0 \in H^{\mathbb{C}}$. Отметим, что χ_0 – собственная функция спектральной задачи $\lambda\chi + R_0A_0\chi = 0$, отвечающей собственному значению ic_0. Пусть ζ – собственная функция задачи $-ic_0\zeta + R_0A_0^*\zeta = 0$. Полупростота собственного значения $\lambda = 0$ означает, что существует собственная функция $\psi_0 = e^{it}\zeta$, сопряженного оператора $L^*u = -c_0\partial u/\partial t + R_0A_0^*u$ такая, что

$$\langle\varphi_0,\ \psi_0\rangle = 1 \tag{1.3}$$

Пусть

$$Pu = u - Qu, \quad Q(u) = ½(\langle u,\ \psi_0\rangle\varphi_0 + \langle u,\ \overline{\psi}_0\rangle\overline{\varphi}_0), \quad u \in H_{2\pi}$$

(Q – проектор на ядро оператора L).

Предположение 2. Оператор L является фредгольмовым, т.е. уравнение $Lu = f$ разрешимо для $f \in H_{2\pi}$ тогда и только тогда, когда $\langle f,\ \psi_0\rangle = \langle u,\ \overline{\psi}_0\rangle = 0$, а L – изоморфизм пространств $PG_{2\pi}$ и $PH_{2\pi}$.

Перепишем задачу (1.2) в виде

$$Lu = (c_0 - c)du/dt - \varepsilon Au - B(u,\ u) \tag{1.4}$$

Тогда, применяя к (1.4) операторы P и Q, получаем систему уравнений

$$LPu = -P\{\omega du/dt + \varepsilon Au + B(u,\ u)\} \tag{1.5}$$

$$LQu = -Q\{\omega du/dt + \varepsilon Au + B(u,\ u)\} \tag{1.6}$$

где $\omega = (c - c_0)$.

По предположению 2 оператор L осуществляет изоморфизм пространств $PG_{2\pi}$ и $PH_{2\pi}$. Следовательно, положив $u = v + \gamma\mathrm{Re}e^{it}\chi_0$, где $\langle v, \overline{\psi}_0\rangle = 0$, из уравнения (1.5) с помощью теоремы о неявной функции находим $v(\gamma, \omega, \varepsilon)$ и, подставляя найденное выражение в (1.6), получаем уравнение разветвления

$$0 = \gamma f(c - c_0,\ \gamma^2,\ \varepsilon) = \gamma(i\omega + \varepsilon B + \gamma^2D_0 + \gamma^4D_1 + \omega\gamma^2G + \ldots) \tag{1.7}$$

В случае, если

$$\mathrm{Re}B \neq 0 \tag{1.8}$$

то по теореме о неявной функции ω и ε можно задать разложениями

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\gamma^{2n}, \quad \varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\gamma^{2n} \tag{1.9}$$

Если предположить, что

$$\mathrm{Re}D_0 \neq 0 \tag{1.10}$$

то

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n(\theta\varepsilon)^{(n+1)/2}, \quad \omega = \sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}(\theta\varepsilon)^n, \quad \theta = \pm 1 \tag{1.11}$$

где знак θ определяет направление бифуркации.

Заметим, что процедура определения постоянных $\{\gamma_{j-1};\ c_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$, описанная ранее [6, 7], минует стадию применения теоремы о неявной функции к уравнению (1.5), а указанные константы определяются вместе с разложением

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(\theta\varepsilon)^{(j+1)/2} \tag{1.12}$$

В случае, если $\mathrm{Re}D_0 = 0$ (а следовательно, и $\varepsilon_1 = 0$), а $\varepsilon_2 \neq 0$, то разложения для γ и ω следует искать по степеням $(\theta\varepsilon)^{1/4}$, $\theta = \pm 1$. Отметим, что условие (1.8) означает, что для собственного значения $\lambda(\varepsilon)$ задачи

$$\lambda\chi + (R_0\mathrm{A}_0 + \varepsilon\mathrm{A})\chi = 0 \tag{1.13}$$

удовлетворяющего условию $\lambda(0) = ic_0$ выполнено соотношение

$$d\lambda(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = B$$

В случае, если в задаче, как например для течения Пуазейля в плоском канале, имеется дополнительный вещественный параметр α и условие

$$\mathrm{Re}\lambda(\varepsilon, \alpha) = 0$$

определяет в плоскости (ε, α) нейтральную кривую, то условие (1.8) для фиксированного α_* означает, что прямая $\alpha = \alpha_*$ пересекает нейтральную кривую трансверсально.

Конечно, условие (1.8) также может нарушаться. В частности, для течения Пуазейля в плоском канале это условие нарушается в точке максимума нейтральной кривой $(R_1, \alpha_1) \simeq (8600,\ 1{,}097311)$. В этом случае естественным бифуркационным параметром является волновое число α. Зависимость уравнений движения от параметра α оказывается довольно сложной (см. [6]) и общие формулы для получения разложений типа (1.9) становятся несколько менее эффективными.

Известно, что для течения Пуазейля в плоском канале условие (1.10) нарушается в точке $(R_3, \alpha_3) \simeq (6842{,}197,\ 0{,}906672976)$ ([7, 8]). Поскольку $\varepsilon_2(\alpha_3) \neq 0$, то, вводя малый параметр $h = \alpha - \alpha_3$, второе равенство (1.9) можно переписать согласно подготовительной теореме Вейерштрасса в виде

$$\varepsilon - \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j(h)\gamma^{2j} = d(\gamma^2,\ \varepsilon,\ h)[H_0(\varepsilon,\ h) + H_1(\varepsilon,\ h)\gamma^2 + \varepsilon_2(\alpha_3)\gamma^4]$$

Здесь d, H_0, H_1 – аналитические функции, однозначно определяемые из (1.9), причем $d(0, 0, 0) = 1$ и $H_0(0, 0) = H_1(0, 0) = 0$.

Уравнение

$$H_0(\varepsilon, h) + H_1(\varepsilon, h)\gamma^2 + \varepsilon_2(\alpha_3)\gamma^4 = 0 \tag{1.14}$$

эквивалентное вблизи нуля второму уравнению в (1.9), позволяет найти складку в множестве решений задачи (1.2). Тем самым анализ вырождений в фазовом пространстве дает дополнительную информацию об ответвляющемся решении, полностью пропадающую, если рассматривать бифуркации, происходящие при изменении одного параметра при фиксированных остальных.

В случае вырождений более высокого порядка возможно еще более сложное поведение ответвляющихся решений (вторичных течений). Для конечномерных задач анализ различных бифуркаций вплоть до вырождений коразмерности три проведен ранее [9, 10]. Однако для применения этих результатов необходимо знать коэффициенты во втором разложении (1.9).

2. Алгоритм вычисления коэффициентов рядов Ляпунова – Шмидта. В соответствии с вышесказанным, решение задачи (1.2) может быть записано в виде

$$u = v + \gamma\mathrm{Re}\varphi_0,\ \langle v, \psi\rangle = 0,\ \gamma \in \mathbb{R}^+$$

а величины u, c, ε могут быть разложены в ряды по степеням γ. Положив для большей симметричности формул $v_0 = \mathrm{Re}\varphi_0$, для определения разложений

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \gamma^{n+1}, \quad c - c_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \gamma^n, \quad \varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \gamma^n \tag{2.1}$$

имеем последовательность задач

$$Lv_n = \Phi_n,\ n = 0, 1, \ldots \tag{2.2}$$

$$\Phi_n = -\left\{ \sum_{j=0}^{n} \left(\omega_{n-j} \frac{\partial v_j}{\partial t} + \varepsilon_{n-j} \mathrm{A} v_j \right) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{B}\ (v_j,\ v_{n-j-1}) \right\}$$

В силу предположения 2 условием разрешимости уравнений (2.2) является

$$\langle \Phi_n, \psi_0 \rangle = 0 \tag{2.3}$$

При $n = 0$ получаем линеаризованную задачу

$$c_0 \partial v_0 / \partial t + \mathrm{R}_0 \mathrm{A}_0 v_0 = 0$$

а при $n = 1$ имеем

$$Lv_1 = -\{\omega_1 \partial v_0 / \partial t + \varepsilon \mathrm{A} v_0 + \mathrm{B}(v_0,\ v_0) + \mathrm{B}(v_0, \bar{v}_0)\}$$

Учитывая условие $B = \mathrm{Re}\langle \mathrm{A}\varphi_0, \psi_0 \rangle \neq 0$, находим $\varepsilon_1 = \omega_1 = 0$. Если использовать фредгольмовость L, то из условий разрешимости уравнений (2.2) индуктивно устанавливается, что $\varepsilon_{2n+1} = \omega_{2n+1} = 0$, а v_n – тригонометрический полиномом по t степени $n + 1$, четный при $n = 2l + 1$ и нечетный при $n = 2l$. Тем самым,

$$v_n = \mathrm{Re}\, w_n, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n+1} e^{ikt} w_{nk}$$

$$\Phi_n = \mathrm{Re}\, F_n, \quad F_n = \sum_{k=0}^{n+1} e^{ikt} F_{nk}, \quad n = 0,\ 1, \ldots$$

Поэтому условие разрешимости (2.3) сводится к равенству

$$(F_{n1},\ \zeta)_{H^{\mathbb{C}}} = 0 \tag{2.4}$$

Ключевое наблюдение состоит в том, что если зафиксировать $\mathrm{Im}F_{n0} = \mathrm{Im}w_{n0} = 0$, то комплексные тригонометрические полиномы F_n и w_n определяются однозначно. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся тем, что

$$\mathrm{B}(v_k,\ v_{n-k-1}) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathrm{B}(w_k,\ w_{n-k-1}) + \mathrm{B}(w_k,\ \bar{w}_{n-k-1}))$$

и следующим элементарным утверждением.

Лемма. Пусть задан вещественный тригонометрический полином Φ_{n-1} степени n

$$\Phi_{n-1} = \mathrm{Re} \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}, \quad a_0 = 0$$

Тогда существует единственный комплексный тригонометрический полином $F_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} F_{n-1,k} e^{ikt}$, такой, что $\mathrm{Re}F_{n-1} = \Phi_{n-1}$, причем $F_{n-1,k} = a_k + \bar{a}_{-k}$.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\mathrm{Re} \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt} = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} (a_k + \bar{a}_{-k}) e^{ikt}$$

Теперь из выражения

$$\Phi_n = -\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=0}^{n}\left(\omega_{n-j}\frac{\partial w_i}{\partial t} + \varepsilon_{n-j}\mathrm{A}w_j\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{B}(w_j,\ w_{n-j-1}) + \mathrm{B}(w_j,\ \overline{w}_{n-j-1})\right\}$$

получаем

$$F_{nk} = -\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(p^j_{nk} + q^j_{nk}) + \sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon_{n-j}\mathrm{A}w_{jk} + \sum_{j=0}^{n-1} ij\omega_{n-j}w_{jk}\right\}$$

где

$$p^j_{nk} = \sum_{l=\max(0,k+j-n)}^{\min(j+1,k)} \mathrm{B}(w_{jl},\ w_{n-j-1,k-l}),\quad q^j_{n0} = \mathrm{Re}\sum_{l=0}^{\min(n+1,n-j)} \mathrm{B}(w_{jl},\ \overline{w}_{n-j-1,l})$$

а при $k \neq 0$

$$q^j_{nk} = \sum_{s=k}^{\min(j+1,n-j+k)} \mathrm{B}(w_{jk},\ \overline{w}_{n-j-1,s-k}) + \sum_{s=0}^{\min(j+1,n-k-j)} \mathrm{B}(\overline{w}_{jk},\ w_{n-j-1,s-k})$$

Тем самым однозначно определены задачи для комплексных функций w_{nk}

$$L_k w_{nk} = F_{nk},\quad n = 0,\ 1,\ldots;\quad k = 0,\ 1,\ldots,\ n+1;\quad L_k = ikc_0 + R_0\mathrm{A}_0 \tag{2.5}$$

которые разрешимы при $k \neq 1$ в силу предположения 1, а условие разрешимости при $k = 1$ может быть удовлетворено за счет выбора постоянных $\{\omega_j,\ \varepsilon_j\}$.

При $n = 2$ условие разрешимости дает соотношение

$$i\omega_2 + \varepsilon_2 B + \tfrac{1}{2}(\mathrm{B}_0(\overline{w}_0,\ w_{12}) + 2\mathrm{B}_0(w_0,\ w_{10}),\ \psi_0) = 0 \tag{2.6}$$

где $\mathrm{B}_0(u,\ v) = \mathrm{B}(u,\ v) + \mathrm{B}(v,\ u)$.

Очевидно, что если построен численный алгоритм, позволяющий, вычислив соответствующие функционалы, определить ω_2, ε_2, то этот же алгоритм, с помощью описанного выше метода, может быть без принципиальных изменений использован для последовательного определения любого конечного числа коэффициентов $\{\omega_j,\ \varepsilon_j\}_{j=2}^{n}$. Тем самым, используя полученные ранее результаты [9, 10], можно исследовать поведение ответвляющихся решений в окрестности точек вырождения сколь угодно высокого порядка.

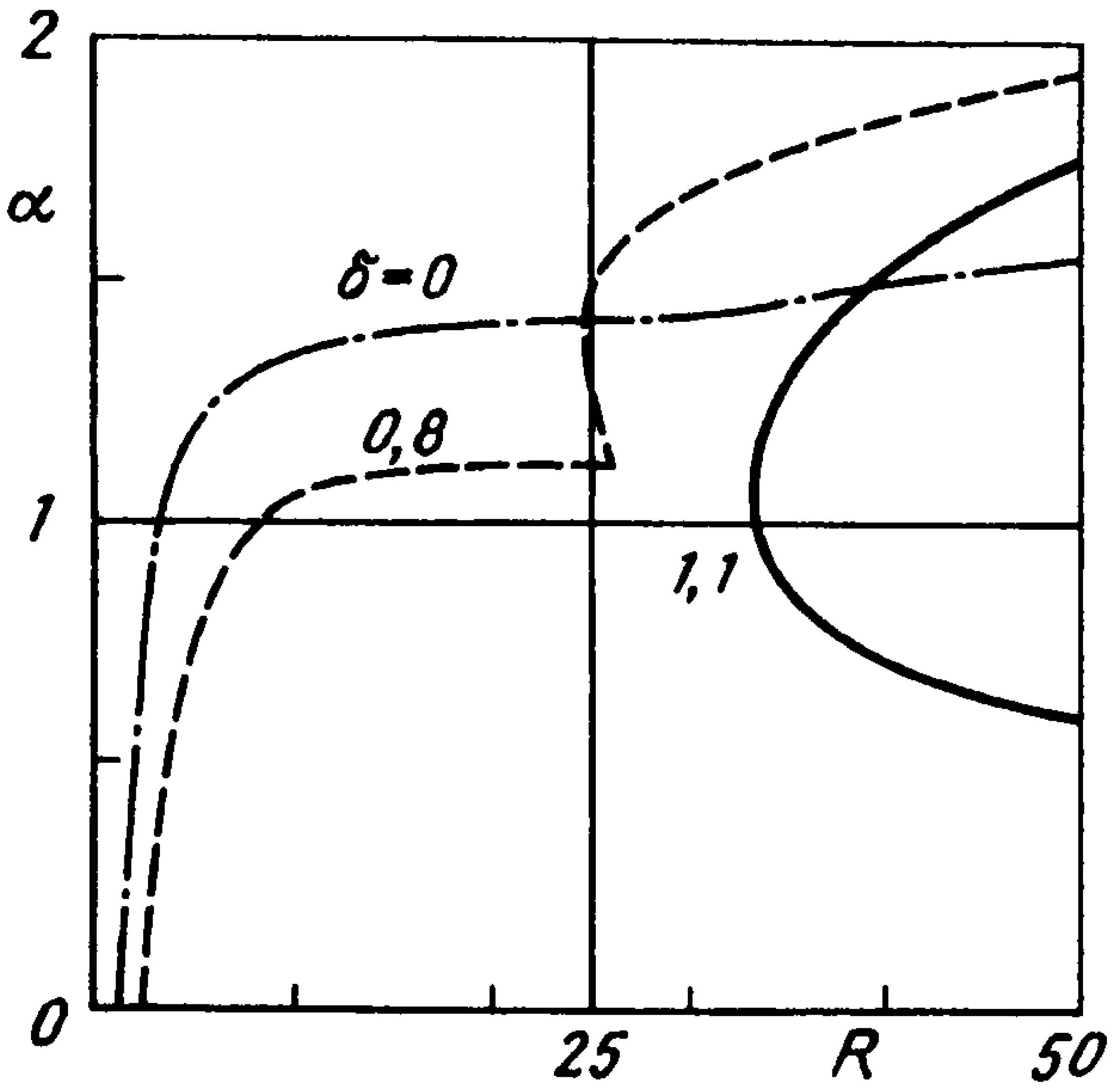
Границу применимости указанного метода в конкретных гидродинамических задачах устанавливает точность численного решения спектральной и краевых задач (2.5).

3. Вырожденные бифуркации в задачах Колмогорова и Куэтта – Пуазейля. А.Н. Колмогоров (1959 г.) предложил рассмотреть модельную задачу о течении вязкой жидкости в плоском канале под воздействием синусоидальной внешней силы, причем вместо условия прилипания предполагается выполненным условие периодичности по координате y, нормальной к оси канала x.

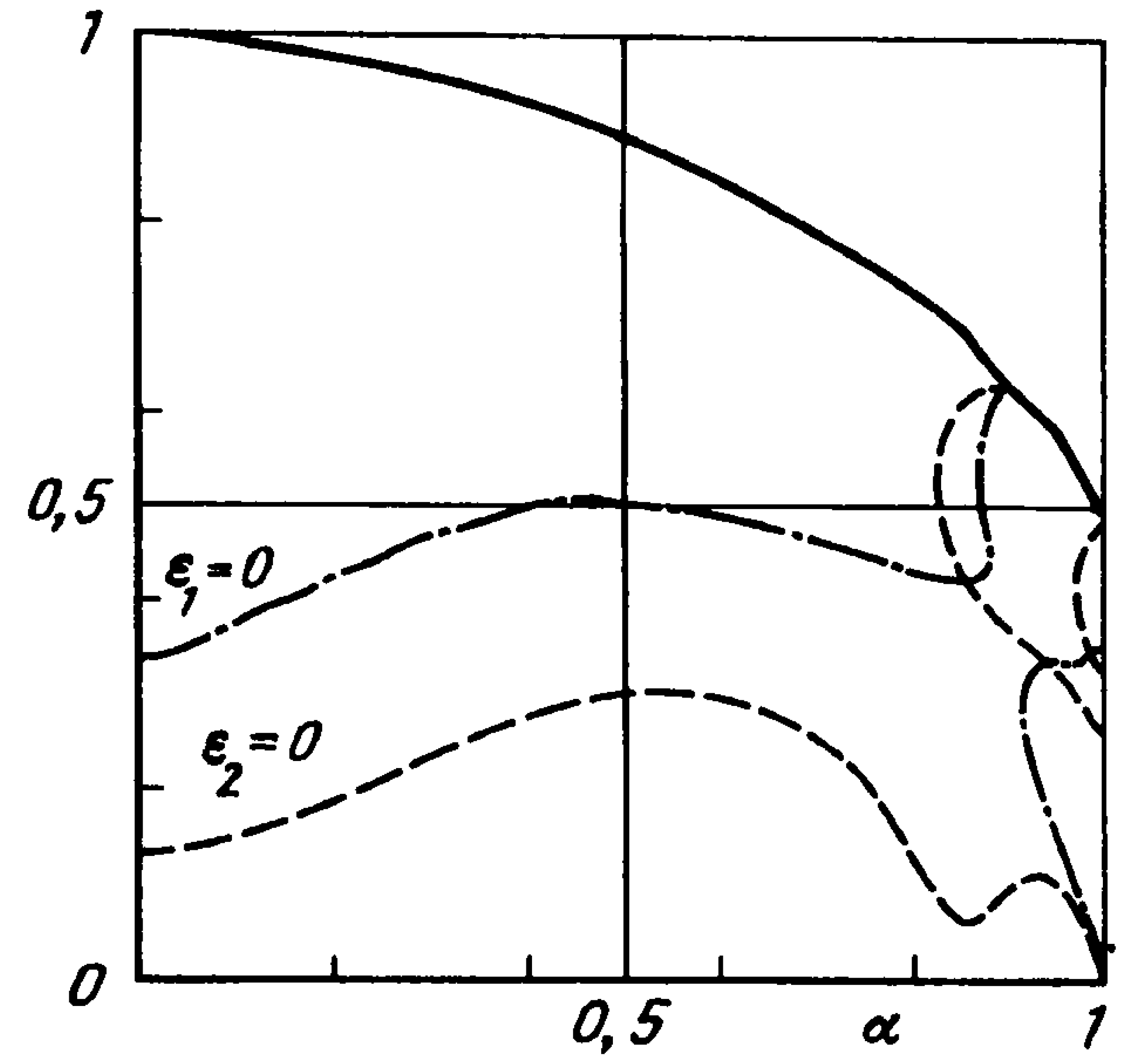
Анализ линейной устойчивости течения Колмогорова показал [11, 12], что минимальное критическое число Рейнольдса отвечает волновому числу $\alpha = 0$, нейтральная кривая задается функцией, монотонно возрастающей на интервале $\alpha \in (0,\ 1)$, а при $\alpha > 1$ течение абсолютно устойчиво.

С другой стороны, для течения Колмогорова с иными внешними силами (обобщенные течения Колмогорова) ситуация может оказаться иной, и исследование этого класса течений несомненно интересно [13]. Предположим, что средняя скорость $Q = (0,\ \delta)$ и внешняя сила $F = (\gamma f(y),\ 0)'$, где $f(y)$ – некоторый тригонометрический полином, фиксированы. Тогда стационарное решение имеет вид $U_*(y) = (V(y),\ \delta)'$, где V удовлетворяет уравнению

$$\nu V''(y) - \delta V'(y) + \gamma f(y) = 0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В силу произвольности γ можно считать, что $\|V\|_{L_2} = 1$, и ввести число Рейнольдса $R = \gamma/\nu$. Расчеты показывают, что при $\delta = 0$ минимальному числу Рейнольдса для всех $f(y)$ соответствует $\alpha = 0$.

Классическому течению Колмогорова отвечает профиль скорости $U_k(y) = (\gamma/\nu \sin y, \delta)'$ и $\delta = 0$. Наши расчеты показали, что $R \to \infty$ при $\delta \to 1$ для фиксированного $\alpha \in (0, 1)$. При $\delta > 1$ течение Колмогорова устойчиво для всех чисел Рейнольдса.

Для обобщенных течений Колмогорова при $\delta > 1$ форма нейтральной кривой может приобретать вид, характерный для задач с условием прилипания на стенках канала. Например, на фиг. 1 для профиля скорости $U(y) = \cos y + \sin 2y$ штриховой линией показана нейтральная кривая при $\delta = 0$, штрих-пунктирной линией – при $\delta = 0{,}8$ и сплошной линией – при $\delta = 1{,}1$.

Расчеты показывают[1], что для течения Колмогорова с профилем скорости $U_k(y)$ кривые $\varepsilon_1(\alpha, \delta) = 0$ (штриховая линия на фиг. 2) и $\varepsilon_2(\alpha, \delta) = 0$ (штрих-пунктирная) линия имеют точки пересечения. В этих точках имеет место вырожденная бифуркация коразмерности три. Сплошной линией на фиг. 2 ограничена область вне которой течение Колмогорова устойчиво в линейном приближении.

Для задачи Куэтта – Пуазейля расчеты показали[1], что кривые $\varepsilon_1(\alpha, \delta) = 0$ и $\varepsilon_2(\alpha, \delta) = 0$ имеют две точки пересечения: $A_1 = (\alpha_1, \delta_1) \simeq (0{,}691398427,\ 0{,}069459369)$, и $A_2 = (\alpha_2, \delta_2) \simeq (0{,}516880749,\ 0{,}141800789)$. Напомним, что в задаче о течении Куэтта – Пуазейля предполагается, что кроме постоянного градиента давления вдоль оси канала задана также постоянная скорость стенок $u|_{y=\pm 1} = \pm V$. Это приводит, после перехода к безразмерным переменным, к плоскому течению Куэтта – Пуазейля $u = (1 - y^2) + \delta y$, переходящему при $\delta = 0$ в плоское течение Пуазейля.

Вернемся к разложению (1.9). Вырождение $\varepsilon_1(\alpha_*, \delta_*) = 0$ означает, что для этих значений параметров ответвляющееся решение задается рядом по степеням $(\theta(R - R_0))^{1/4}$, $\theta = \pm 1$. Если фиксировать параметр δ_* и рассматривать волновое число α в качестве дополнительного бифуркационного параметра, то в случае $\varepsilon_2(\alpha_*, \delta_*) \neq 0$ вблизи точки $(R_0(\alpha_*, \delta_*)\,,\ \alpha_*)$ в множестве ответвляющихся решений имеется складка, проекция которой на плоскость (α, R) задается дискриминантной кривой уравнения (1.14).

Включение в рассмотрение дополнительного бифуркационного параметра δ приводит, например, к тому, что для всех точек нейтральной кривой $(R_0(\alpha, \delta_*(\alpha)), \alpha_*)$ ответвляющееся решение разлагается в ряд по степеням $(\theta(R - R_0))^{1/4}$, $\theta = \pm 1$. Если фиксировать значение параметров (α_c, δ_c), отвечающее точке пересечения кривых $\varepsilon_1(\alpha, \delta) = 0$ и $\varepsilon_2(\alpha, \delta) = 0$, то ответвляющееся решение разлагается в ряд по степеням $(\theta(R - R_0))^{1/8}$, $\theta = \pm 1$, а множество ответвляющихся решений для значений параметров, близких к (α_c, δ_c), устроено сложнее, чем в предыдущем случае и описывается уже бикубическим уравнением. Более подробная информация об этой конечномерной задаче имеется в [9, 10].

---

[1] Авторы готовы выслать подробные таблицы по запросу. E-mail: varin@spp. keldysh. ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01411) и Международного научного фонда (M3W000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдович В.И.* Возникновение автоколебаний в жидкости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 4. С. 638–655.
2. *Joseph D.D., Sattinger D.H.* Bifurcating time periodic solutions and their stability // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1972. V. 45. № 2. P. 79–109.
3. *Iooss G.* Existence et stabilité de la solution periodique secondaire intervenant dans les problems d'evolution du type Navier-Stokes // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1972. V. 47. № 4. P. 301–321.
4. *Юдович В.И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 3. С. 450–459.
5. *Babenko B.* Investigation of hydrodinamic stability by means of computer // Fluid Dynamics Transactions. Warszawa. Polish Scient. Publ. 1980. V. 10. P. 9–75.
6. *Афендиков А.Л., Варин В.П.* Исследование автоколебательных режимов, близких к течению Пуазейля в плоском канале // Докл. АН СССР. 1991. Т. 13. № 6. С. 1407–1412.
7. *Afendikov A., Varin V.* An analysis of periodic flows in the vicinity of the plane Poiseuille flow // Eur. J. Mech. B/Fluids. 1991. V. 10. № 6. P. 577–603.
8. *Афендиков А.Л., Варин В.П.* О потере устойчивости и бифуркации автоколебательных режимов, близких к течению Пуазейля // Изв. АН СССР. 1991. МЖГ. № 2. С. 41–48.
9. *Golubitsky M., Langford W.F.* Classification and unfolding of degenerate Hopf bifurcation // J. Different. Equat. 1981. V. 41. № 3. P. 375–415.
10. *Golubitsky M., Stewart J., Shaeffer D.* Singularities and groups in bifurcation theory // Appl. Math. Sci. New-York: Springer. 1988. V. 2. № 69. P. 533.
11. *Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г.* Исследования устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1140–1143.
12. *Юдович В.И.* Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 453–467.
13. *Afendikov A., Varin V.* Bifurcations of some plane viscous fluid flow and transition to turbulence // Eur. J. Mech. B/Fluids. 1991. V. 10. № 2. Suppl. P. 13–18.

Королев,
Московская обл.

Поступила в редакцию
14.V.1996