УДК 531.38

© 1998 г. И.И. Косенко

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В АЛГЕБРЕ КВАТЕРНИОНОВ. СЛУЧАЙ ЭЙЛЕРА

В мультипликативной группе алгебры кватернионов **H**, как в конфигурационном пространстве, строится динамическая система. Используется гомоморфизм $\mathbf{H} \to SO(3)$, такой, что единичная сфера $S^3 \subset \mathbf{H}$, инвариантная относительно системы, переходит в группу поворотов $SO(3)$. Гомоморфный образ построенной системы совпадает с динамикой вращательного движения твердого тела. Проводится полное интегрирование уравнений движения в случае Эйлера. Для этого применяется аппарат эллиптических функций Вейерштрасса. В рамках описываемой методики достигаются следующие цели: а) при представлении алгоритмов моделирования динамики достаточно использовать только одну карту из атласа многообразия фазового пространства, б) точка конфигурационного пространства в реальном движении лежит на единичной сфере, что обеспечивает наилучшую точность в численных процессах, в) в большинстве приложений правые части уравнений возмущенного движения полиномиально зависят от фазовых переменных, что облегчает применение средств компьютерной алгебры в аналитических теориях.

1. Введение. Для построения уравнений возмущенного движения в динамике твердого тела наиболее выгодным с вычислительной точки зрения является использование симметричного представления конфигурационного пространства при помощи параметров Родрига – Гамильтона или Кэли – Клейна [1–4].

В качестве конфигурационного пространства будем использовать алгебру кватернионов **H** [4], координатным является четырехмерное евклидово пространство $\mathbf{R}^4$. Более точно, многообразием конфигураций является алгебра **H** без нулевой точки: $M^4 = \mathbf{H}\backslash\{0\}$. Это многообразие очевидным образом накрывается одной картой $\mathbf{R}^4\backslash\{0\}$. Видно, что M^4 – мультипликативная группа алгебры **H**. Известно, что конфигурационным пространством твердого тела с неподвижной точкой является группа $SO(3)$, состоящая из преобразований поворотов пространства $\mathbf{R}^3$. Гладкое многообразие $SO(3)$ диффеоморфно многообразию $\mathbf{RP}^3$, наследующему гладкую структуру сферы S^3, у которой отождествляются точки, симметричные относительно начала координат. Многообразие S^3 отождествляется с поверхностью единичной сферы, задаваемой в $\mathbf{R}^4$ при помощи уравнения

$$|\mathbf{q}|^2 = 1 \quad \left(|\mathbf{q}|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right) \tag{1.1}$$

Координатные орты в $\mathbf{R}^4$ будем обозначать $\mathbf{1}, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, так что произвольный вектор $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^4$ имеет представление

$$\mathbf{q} = q_0\mathbf{1} + q_1\mathbf{i}_1 + q_2\mathbf{i}_2 + q_3\mathbf{i}_3$$

Алгебра кватернионов $\mathbf{H}$ определяется в $\mathbf{R}^4$ так, что $\mathrm{Re}\mathbf{q} = q_0\mathbf{1}$ – скалярная часть кватерниона, а $\mathrm{Ve}\mathbf{q} = q_1\mathbf{i}_1 + q_2\mathbf{i}_2 + q_3\mathbf{i}_3$ – его векторная часть. Вращательное движение твердого тела описывается лагранжевой системой на $SO(3)$. Эта система допускает корректное расширение на S^3 так, что кинетическая энергия и силовое поле также корректно определены.

В большинстве случаев моменты сил зависят от направляющих косинусов или угловых скоростей. Продолжим силовое поле с S^3 на M^4 так, что компоненты обобщенных сил в точке сферы S^3_R любого радиуса R полагаются равными соответствующим компонентам в точке единичной сферы $S^3 = S^3_1$, лежащей на том же луче, выходящем из начала координат $\mathbf{R}^4$.

2. Уравнения движения. Введем в M^4 систему локальных криволинейных координат по формулам

$$q_0 = e^{\alpha_0}\cos\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2},\quad q_1 = e^{\alpha_0}\sin\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}$$

$$q_2 = e^{\alpha_0}\sin\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2},\quad q_3 = e^{\alpha_0}\cos\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2} \tag{2.1}$$

$$\alpha_0 \in (0,\infty),\quad \alpha_2 \in [0,\pi),\quad \alpha_1,\alpha_3 \in [0,2\pi)$$

Тогда на сфере S^3 (а также на $SO(3) \simeq \mathbf{RP}^3$) параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ можно интерпретировать в качестве углов Эйлера: прецессии, нутации и собственного вращения соответственно. Ортогональная матрица U перехода от неподвижной $O\xi_1, \xi_2, \xi_3$ к связанной с телом системе координат Ox_1, x_2, x_3 (твердое тело имеет неподвижную точку O) задается при помощи равенства

$$U = T_3(\alpha_1)T_1(\alpha_2)T_3(\alpha_3)$$

в котором матрицы

$$T_1(\alpha) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix},\quad T_3(\alpha) = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

соответствуют поворотам вокруг первой и третьей координатных осей на угол α. Столбцы матрицы U являются столбцами координат базисных ортов подвижной системы Ox_1, x_2, x_3 в системе $O\xi_1, \xi_2, \xi_3$. Считаем оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 главными осями инерции. Элементами матрицы U являются направляющие косинусы, такие, что

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{|\mathbf{q}|^2}\begin{Vmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_0q_3+q_1q_2) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_0q_1+q_2q_3) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

Заметим, что матрица $U(\mathbf{q})$ зависит только от точек $\mathbf{q}/|\mathbf{q}| \in S^3$.

Известно [4], что отображение $g : \mathbf{q} \mapsto U(\mathbf{q})$ задает двулистное накрытие $g : S^3 \to SO(3)$, расширяемое до гомоморфизма групп $g : \mathbf{H} \to SO(3)$.

В самом деле по аналогии с [4] определим гомоморфизм $h : \mathbf{H} \to SU(2)$ мультипликативной группы алгебры кватернионов в специальную унитарную группу следующим образом:

$$h\ :\ \mathbf{q} \mapsto \frac{1}{|\mathbf{q}|}\begin{Vmatrix} q_0+iq_1 & q_2+iq_3 \\ -q_2+iq_3 & q_0-iq_1 \end{Vmatrix}$$

Отображение h таково, что на сфере единичного радиуса $S^3 \subset \mathbf{H}$ оно является диффеоморфизмом. Известно [5], что имеется гомоморфизм $\sigma : SU(2) \to SO(3)$, обеспечивающий двулистное накрытие группы $SO(3)$ группой $SU(2)$, так что ядро состоит из двух элементов: $\ker\sigma = \{E, -E\}$. В итоге получим гомоморфизм, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H} & \xrightarrow{h} & SU(2) \\ & {\scriptstyle g}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ & & SO(3) \end{array}$$

коммутативна.

Следуя работам [6, 7], введем квазискорости ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{|\mathbf{q}|^2} S^*(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot} \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{Vmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Vmatrix}, \quad S(\mathbf{q}) = \begin{Vmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{q}^{\cdot} = \begin{Vmatrix} q_0^{\cdot} \\ q_1^{\cdot} \\ q_2^{\cdot} \\ q_3^{\cdot} \end{Vmatrix}$$

(звездочка означает транспонирование). Тогда кинетическая энергия механической системы может быть вычислена в виде [6]

$$T = \frac{1}{2}(A\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}); \quad \mathrm{A} = \mathrm{diag}(A_0, A_1, A_2, A_3), \quad A_0 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2 + A_3) \tag{2.4}$$

где A – матрица тензора "инерции", причем A_1, A_2, A_3 – моменты инерции относительно осей Ox_1, Ox_2, Ox_3; $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^4$.

Если M_1, M_2, M_3 – проекции на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 главного момента сил, действующих на тело, то уравнения Лагранжа второго рода эквивалентны расширенной системе динамических уравнений Эйлера

$$\mathbf{I}^{\cdot} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \circ \mathbf{I} - \mathbf{I} \circ \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M} \tag{2.5}$$

Вектор $\mathbf{I} = A\boldsymbol{\omega}$ составлен из компонент вектора кинетического момента, $\mathbf{M} = (0, M_1, M_2, M_3)$, а символ $\circ$ означает операцию группового умножения в алгебре $\mathbf{H}$. К (2.5) следует добавить систему, аналогичную кинематическим уравнениям

$$\mathbf{q}^{\cdot} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \circ \boldsymbol{\omega} \tag{2.6}$$

Преимущество системы (2.5), (2.6) состоит в том, что она имеет форму Коши, а правые части полиномиально зависят от переменных q_k, ω_k ($k = 0, 1, 2, 3$). В приложениях моменты M_k ($k = 0, 1, 2, 3$) часто полиномиально зависят от направляющих косинусов. В силу (2.2) в правых частях уравнений (2.5) появятся члены, имеющие в качестве множителей величины $|\mathbf{q}|^{-2}$. Следует, однако, вспомнить, что реальное движение происходит на конфигурационном подмногообразии (1.1).

Многообразия вида $|\mathbf{q}|^2 = \mathrm{const}$ являются инвариантными относительно динамической системы (2.5), (2.6). Иными словами, (1.1) представляет собой инвариантное соотношение. Ясно, что если в правых частях (2.5) положить всюду $|\mathbf{q}| = 1$, то на (1.1) полученная динамическая система совпадет с исходной, т.е. будет описывать динамику твердого тела.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Если моменты сил полиномиально зависят от направляющих косинусов и компонент угловой скорости, то динамические и кинематические уравнения Эйлера допускают с использованием параметров Родрига – Гамильтона расширение, при котором они будут иметь форму Коши с полиномиальными правыми частями.

В задачах моделирования может оказаться полезной каноническая форма уравнений движения. При помощи преобразования Лежандра можно получить выражение для обобщенных импульсов [6]

$$\mathbf{p}=\left(p_0,p_1,p_2,p_3\right)^*=2S(\mathbf{q})\mathbf{I}/|\mathbf{q}|^2$$

После этого квазискорости выражаются через канонические переменные в виде

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}S^*(\mathbf{q})\mathbf{p} \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в формулу (2.4) получим выражение для кинетической энергии

$$T=\left(8A_0\right)^{-1}\left(q_0p_0+q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3\right)^2+\left(8A_1\right)^{-1}\left(-q_1p_0+q_0p_1+q_3p_2-q_2p_3\right)^2+$$
$$+\left(8A_2\right)^{-1}\left(-q_2p_0-q_3p_1+q_0p_2+q_1p_3\right)^2+\left(8A_3\right)^{-1}\left(-q_3p_0+q_2p_1-q_1p_2+q_0p_3\right)^2$$

Обобщенные силы также вычисляются в виде

$$\mathbf{Q}=\left(Q_0,Q_1,Q_2,Q_3\right)^*=2S(\mathbf{q})\mathbf{M}/|\mathbf{q}|^2$$

В итоге система уравнений Гамильтона принимает форму

$$q_k^\cdot=\partial T/\partial p_k,\quad p_k^\cdot=-\partial T/\partial q_k+Q_k,\quad k=0,1,2,3 \tag{2.8}$$

Далее будем полагать, что существует силовая функция $V(q)$, такая, что

$$Q_k=\partial V/\partial q_k,\ k=0,1,2,3$$

В этом случае существует функция Гамильтона

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p})=T(\mathbf{q},\mathbf{p})+V(\mathbf{q})$$

В фазовом пространстве T^*M^4 вместо ковектора $\mathbf{p}\in T_{\mathbf{q}}^*M^4$ при фиксированном $\mathbf{q}\in M^4$ можно в силу равенств (2.7) использовать ковектор $\mathbf{I}\in T_{\mathbf{q}}^*M^4$. Для функции Гамильтона будем применять два обозначения:

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p})=F(\mathbf{q},\mathbf{I})$$

в результате значительных по объему преобразований можно получить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{Vmatrix}\mathbf{q}^\cdot\\ \mathbf{I}^\cdot\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & \frac{1}{2}S(\mathbf{q})\\ -\frac{1}{2}S^*(\mathbf{q}) & P(\mathbf{I})\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\partial F/\partial\mathbf{q}\\ \partial F/\partial\mathbf{I}\end{Vmatrix} \tag{2.9}$$

$$P(\mathbf{I})=2\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -I_3 & I_2\\ 0 & I_3 & 0 & -I_1\\ 0 & -I_2 & I_1 & 0\end{Vmatrix}$$

Замечание. Уравнения (2.8), (2.9) также допускают трансформацию, описанную в утверждении. Именно полагая в функциях Q_k (k = 0, 1, 2, 3) величины $|\mathbf{q}|$, входящие в знаменатели, равными единице, можно без искажения движения на многообразии (1.1) добиться полиномиальной зависимости обобщенных сил от координат и импульсов. При этом в M^4 получим, вообще говоря, динамическую систему, отличную от (2.8). Например, если Q_k допускают силовую функцию, то новые обобщенные силы не обязаны быть потенциальными. Однако с точки зрения применения полуаналитических и проекционных [8] методов приближенного построения решений это обстоятельство не имеет значения.

3. Погружение. Установим взаимосвязь рассмотренной динамической системы и системы, задающей стандартным образом на $SO(3)$ динамику твердого тела. Можно убедиться, что квазискорости (2.3) при помощи формул (2.1) допускают представление

$$\boldsymbol{\omega} = B(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\cdot}$$

$$B(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha_2\sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha_2\cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}^{\cdot} = \begin{Vmatrix} \alpha_0^{\cdot} \\ \alpha_1^{\cdot} \\ \alpha_2^{\cdot} \\ \alpha_3^{\cdot} \end{Vmatrix}$$

Отсюда видно, что величины $\alpha_1^{\cdot}, \alpha_2^{\cdot}, \alpha_3^{\cdot}$ это просто угловые скорости прецессии, нутации и собственного вращения соответственно.

При помощи преобразования Лежандра $\boldsymbol{\alpha}^{\cdot} \mapsto \boldsymbol{\beta}$, где

$$\boldsymbol{\beta} = \partial T / \partial\boldsymbol{\alpha}^{\cdot} = B^* A B \boldsymbol{\alpha}^{\cdot}, \quad \boldsymbol{\alpha}^{\cdot} = B^{-1}A^{-1}\left(B^{-1}\right)^* \boldsymbol{\beta}$$

можно вычислить кинетическую энергию через обобщенные импульсы β. Имеем (ср. [9, 10])

$$T = \frac{1}{2}\left(B^{-1}A^{-1}\left(B^{-1}\right)^*\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\right) = \frac{1}{4A_0}\beta_0^2 + \frac{1}{2A_1}\left(\beta_1\frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_2} + \beta_2\cos\alpha_3 - \right.$$

$$\left. -\beta_3\frac{\cos\alpha_2\sin\alpha_3}{\sin\alpha_2}\right)^2 + \frac{1}{2A_2}\left(\beta_1\frac{\cos\alpha_3}{\sin\alpha_2} - \beta_2\sin\alpha_3 - \beta_3\frac{\cos\alpha_2\cos\alpha_3}{\sin\alpha_2}\right)^2 + \frac{1}{2A_3}\beta_3^2 \qquad (3.1)$$

Так как силовая функция V не зависит от координаты α_0 и вместе с тем зависит от направляющих косинусов, которые в свою очередь являются однозначными функциями на $SO(3)$, то эта переменная в силу (3.1) – циклическая. Таким образом, по переменным α_k, β_k (k = 1, 2, 3) уравнения движения отделяются и имеют известный в динамике твердого тела вид. Таким образом, любая сфера $S_R^3 \subset M^4$ будет инвариантным многообразием. Напомним, что локально отображение $g : S^3 \to SO(3)$ является диффеоморфизмом. При этом в M^4 движение можно в отличие от $SO(3)$ глобально описать пользуясь только одной картой – самой M^4. Это означает отсутствие дефекта карт конфигурационного пространства $SO(3)$, описываемых углами ориентации тела (Эйлера, самолетными или др.). При подходе решения к границе такой карты необходимо перейти к другой, в которой данное движение описывается более регулярными функциями.

4. Случай Эйлера. Пусть $(\mathbf{q}^0, \mathbf{I}^0)$ – фазовый вектор в начальный момент времени $t =$ $= t_0$. Имея в виду приложения к теории возмущений, найдем формулы, обеспечивающие вычисление этого вектора в процессе движения: $(\mathbf{q}^0, \mathbf{I}^0) \mapsto (\mathbf{q}(t), \mathbf{I}(t))$. В случае Эйлера $\mathbf{M}(t) \equiv \mathbf{0}$. Поэтому из (2.5) динамические уравнения можно получить в виде [11]

$$I_0^{\cdot} = 0$$

$$I_1^{\cdot} = a_1 I_2 I_3, \quad a_1 = \left(A_2 - A_3\right)/\left(A_2 A_3\right) \quad (1\ 2\ 3) \qquad (4.1)$$

Первое уравнение сразу дает интеграл $I_0(t) = I_0^0$, соответствующий циклической переменной α_0.

Рассмотрим ситуацию общего положения, когда все главные моменты инерции попарно различны: $a_k \neq 0$ ($k = 1, 2, 3$). Тогда последние три уравнения системы (4.1) можно представить в следующем традиционном виде:

$$\frac{I_1 dI_1}{a_1} = \frac{I_2 dI_2}{a_2} = \frac{I_3 dI_3}{a_3} = I_1 I_2 I_3 dt$$

При помощи дифференциального уравнения

$$d\tau/dt = I_1 I_2 I_3 \tag{4.2}$$

введем новую независимую переменную τ, которая позволяет легко получить квадратуры

$$I_k^2 = 2a_k\tau + \left(I_k^0\right)^2, \quad k = 1,2,3 \tag{4.3}$$

Для определенности считаем, что в начальный момент времени t_0 переменная τ равна нулю. Для функции $\tau(t)$ имеем уравнение (4.2) в виде

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(2a_1\tau + \left(I_1^0\right)^2\right)\left(2a_2\tau + \left(I_2^0\right)^2\right)\left(2a_3\tau + \left(I_3^0\right)^2\right) \tag{4.4}$$

Переходя здесь к новой независимой переменной $u = \left(2a_1a_2a_3\right)^{1/2} t$ получим уравнение

$$\left(\frac{d\tau}{du}\right)^2 = 4(\tau - e_1)(\tau - e_2)(\tau - e_3) \tag{4.5}$$

$$e_k = \varepsilon_k - e, \quad \varepsilon_k = -\left(I_k^0\right)^2 / 2a_k, \quad k = 1,2,3, \quad e = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$$

определяющее двоякопериодическую мероморфную (эллиптическую) функцию комплексного аргумента – $\wp$-функцию Вейерштрасса [12] $\tau = \wp(u)$, такую, что полупериоды ω, ω' можно задать при помощи равенств

$$\wp(\omega) = e_1, \quad \wp(\omega') = e_2, \quad \wp(\omega + \omega') = e_3$$

Таким образом, решение уравнения (4.4) вычисляется по формуле

$$\tau = \wp\left(\left(2a_1a_2a_3\right)^{1/2} t + u_0\right)$$

где величина u_0 выбирается так, чтобы $\wp\left(\left(2a_1a_2a_3\right)^{1/2} t_0 + u_0\right) = -e$.

В случае, когда одна из величин $a_k = 0$, соответствующая компонента вектора кинетического момента постоянна: $I_k(t) = I_k^0$. Пусть, например, $a_3 = 0$. При этом имеет место случай динамической симметрии: $A_1 = A_2$. Второе и третье уравнения системы (4.1) описывают равномерное вращение вектора кинетического момента вокруг оси Ox_3 и приводятся к виду

$$\dot{I_1} = -aI_2, \quad \dot{I_2} = aI_1 \quad \left(a = (A_3 - A_1)/(A_3A_1)I_3^0\right)$$

Решение задачи Коши для этой системы известно

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos at & -\sin at \\ \sin at & \cos at \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I_1^0 \\ I_2^0 \end{Vmatrix}$$

В ситуации общего положения $a_k \neq 0$ (k = 1, 2, 3) компоненты вектора кинетического момента (решение задачи Коши для (4.1)) могут быть выражены при помощи тета-функций [12]

$$I_k = \left[2a_k\left(\wp(u) - e_k\right)\right]^{1/2} = \frac{\theta_1'(0)\theta_{k+1}(v)}{2\omega\theta_{k+1}(0)\theta_1(v)}, \quad k = 1,2,3; \quad \theta_4 \equiv \theta_0, \; v = \frac{u}{2\omega}$$

В этих формулах зависимость от начальных данных реализуется через параметры ω, ω', которые в свою очередь однозначно вычисляются через e_k (k = 1, 2, 3) [12].

Переходя к рассмотрению кинематических уравнений (2.6), будем далее полагать квазискорости $\omega_k(t)$ (k = 1, 2, 3) известными функциями времени. В случае Эйлера $\omega_k(t)$ – либо постоянные (перманентные вращения), либо асимптотические (сепаратрисы), либо периодические (общее положение) функции времени.

В соответствии с традицией используем интеграл момента количества движения. В алгебре **H** он имеет вид

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{I} \circ \mathbf{q}^{-1} = I_0\mathbf{1} + \mathbf{G}, \quad \mathbf{G} = G_1\mathbf{i}_1 + G_2\mathbf{i}_2 + G_3\mathbf{i}_3$$

(кватернион **G** составлен из компонент вектора кинетического момента в проекциях на неподвижные оси). Постоянство **G** легко проверить при помощи уравнений (2.5), (2.6) прямым дифференцированием. Этот кватернион вычисляется через начальные данные по формуле

$$\mathbf{G} = \mathbf{q}^0 \circ \mathbf{I}^0 \circ \left(\mathbf{q}^0\right)^{-1} - I_0^0\mathbf{1}$$

Перейдем к новой неподвижной системе координат, такой, что единичный кватернион $\mathbf{g} = g_1\mathbf{i}_1 + g_2\mathbf{i}_2 + g_3\mathbf{i}_3 = \mathbf{G}/G$ ($G = |\,\mathbf{G}\,|$) совпадет в ней с третьим координатным ортом. Для этого достаточно выполнить два поворота исходного трехгранника: на угол прецессии ψ и угол нутации θ, определяемые из равенств

$$\cos\psi = -(\mathbf{g}, \mathbf{i}_2), \; \sin\psi = (\mathbf{g}, \mathbf{i}_1); \; \cos\theta = \left(\mathbf{g}, \mathbf{i}_3\right), \; \sin\theta = \left(1 - \cos^2\theta\right)^{1/2}$$

Известно [4], что кватернион перехода к новой неподвижной системе координат вычисляется по формуле

$$\mathbf{a} = \exp\left(\frac{\psi}{2}\mathbf{i}_3\right) \circ \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{i}_1\right)$$

где $\exp(\alpha\mathbf{j}) = \cos\alpha\mathbf{1} + \sin\alpha\mathbf{j}$ – кватернион, соответствующий повороту на угол 2α вокруг орта $\mathbf{j}$. При этом следует воспользоваться формулами перехода к половинному углу.

Теперь, чтобы описывать движение по отношению к новой неподвижной системе координат, следует с учетом гомоморфизма g : $\mathbf{H} \to SO(3)$ перейти в уравнении (2.6) к новой неизвестной функции **z** такой, что $\mathbf{q} = \mathbf{a} \circ \mathbf{z}$. Поскольку кватернион **a** является постоянным, функция $\mathbf{z}(t)$ так же, как и $\mathbf{q}(t)$, удовлетворяет линейному уравнению (2.6). Начальные условия для искомого решения задачи Коши следует задать в виде

$$\mathbf{z}^0 = \mathbf{a}^{-1} \circ \mathbf{q}^0$$

причем поскольку $\mathbf{a} \in S^3$, то $\mathbf{a}^{-1} = \bar{\mathbf{a}}$, где черта над кватернионом означает операцию сопряжения.

Для завершения процесса интегрирования остается выполнить одну квадратуру. Для этого представим интеграл сохранения кинетического момента в подвижной системе координат в виде

$$\mathbf{z}^{-1} \circ \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{z} = \mathbf{i}(t), \quad \mathbf{i}(t) = \gamma_1\mathbf{i}_1 + \gamma_2\mathbf{i}_2 + \gamma_3\mathbf{i}_3 = \left(\mathbf{I}(t) - I_0^0\mathbf{1}\right)/G \qquad (4.6)$$

(единичный кватернион $\mathbf{i}(t)$ является ортом, определяющим направление вектора кинетического момента в подвижных осях).

При любом фиксированном t решение уравнения (4.6) определено с точностью до централизатора $\mathrm{St}(\mathbf{i}_3)$ элемента $\mathbf{i}_3 \in \mathbf{H}$ в мультипликативной группе $\mathbf{H}$. Все кватернионы централизатора удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{x} = \mathbf{i}_3$$

и, как легко проверить, имеют вид $\mathbf{x} = x_0\mathbf{1} + x_3\mathbf{i}_3$, что в случае $|\,\mathbf{x}\,| = 1$ соответствует повороту вокруг орта $\mathbf{i}_3$. Общее решение уравнения (4.6) составляется по формуле $\mathbf{z} = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}$, где $\mathbf{x} \in \mathrm{St}(\mathbf{i}_3)$, а $\mathbf{y}$ – какое-либо частное решение этого уравнения.

В самом деле, если $\mathbf{z}$ – общее и $\mathbf{y}$ – частное решения уравнения (4.6), то $\mathbf{z}^{-1} \circ \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{z} = \mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{y}$. Поэтому $\left(\mathbf{z} \circ \mathbf{y}^{-1}\right)^{-1} \circ \mathbf{i}_3 \circ \left(\mathbf{z} \circ \mathbf{y}^{-1}\right) = \mathbf{i}_3$, т.е. $(\mathbf{z} \circ \mathbf{y}^{-1}) \in \mathrm{St}(\mathbf{i}_3)$. Зафиксировав какое-либо частное решение $\mathbf{y}(t)$, получим дифференциальное уравнение в подгруппе $\mathrm{St}(\mathbf{i}_3)$, которое и позволит получить требуемую квадратуру.

Уравнение (4.6) эквивалентно уравнению $\mathbf{i}_3 \circ \mathbf{z} - \mathbf{z} \circ \mathbf{i}(t) = \mathbf{0}$ или линейной алгебраической системе

$$\begin{Vmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 - 1 \\ -\gamma_1 & 0 & -\gamma_3 - 1 & \gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_3 + 1 & 0 & -\gamma_1 \\ -\gamma_3 + 1 & -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

которая определяет при $\gamma_3 \neq 1$ двумерное линейное пространство с векторами базиса $\mathbf{y}^1 = \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}(t)$, $\mathbf{y}^2 = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}(t)$.

Таким образом, любой элемент этого пространства имеет вид $\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{d} \circ \mathbf{i}(t)$, где $\mathbf{c} = y_1\mathbf{i}_1 + y_2\mathbf{i}_2$, $\mathbf{d} = y_2\mathbf{i}_1 - y_1\mathbf{i}_2$ при произвольных величинах $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$. Производя в уравнении (2.6) замену $\mathbf{z} = \mathbf{x} \circ (\mathbf{c} + \mathbf{d} \circ \mathbf{i}(t))$ и используя тождества

$$\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{i}_2 = -2q_0\mathbf{1} + 2q_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{i}_1 = 2q_3\mathbf{1} + 2q_0\mathbf{i}_3$$

получаем уравнение

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{x} \circ \boldsymbol{\delta}(t), \quad \left(\boldsymbol{\delta}(t) = \alpha(t)\mathbf{1} + \beta(t)\mathbf{i}_3\right) \tag{4.7}$$

где

$$\alpha(t) = \left(\omega_0 + \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2 - \omega_0\gamma_3\right)\left[2\left(1 - \gamma_3\right)\right]^{-1}$$

$$\beta(t) = \left(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 + \omega_3\gamma_3 - \omega_3\right)\left[2\left(1 - \gamma_3\right)\right]^{-1}$$

Получили дифференциальное уравнение в алгебре $\mathrm{St}(\mathbf{i}_3)$, поскольку $\mathbf{x}(t) \in \mathrm{St}(\mathbf{i}_3)$ при любом t. Но централизатор $\mathrm{St}(\mathbf{i}_3)$ элемента $\mathbf{i}_3$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{H}$, построенной на образующих $\mathbf{1}, \mathbf{i}_3$. Поэтому на $\mathrm{St}(\mathbf{i}_3)$ существует естественная структура поля комплексных чисел и $\mathrm{St}(\mathbf{i}_3) \simeq \mathbf{C}$.

Уравнение (4.7) можно интерпретировать в комплексном смысле так, что $\mathbf{i}_3 = \sqrt{-1}$. Имеет место коммутативность и искомая квадратура имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 \circ \exp \int_{t_0}^{t} \left(\alpha(\tau)\mathbf{1} + \beta(\tau)\mathbf{i}_3\right) d\tau, \quad \mathbf{x}^0 = \mathbf{z}^0 \circ \frac{-\mathbf{c} + \mathbf{i}(t_0) \circ \mathbf{d}}{\left|\mathbf{c} + \mathbf{d} \circ \mathbf{i}(t_0)\right|^2}$$

Заметим, что на реальном движении в последней квадратуре первообразная от функции $\alpha(t)$ – в общем положении чисто периодическая функция.

В самом деле, на реальном движении $\omega_0 = 0$. Поэтому

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}\left(\omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2\right) = \frac{A_1 - A_2}{2G}\omega_1\omega_2$$

а функция $\omega_1(t)\omega_2(t)$ имеет в случае Эйлера нулевое среднее, что легко выводится из свойств четности сомножителей.

Если в какой-либо момент времени t' в противоположность предыдущему выполнено условие $\gamma_3(t') = 1$, то в силу динамических уравнений (2.5) это условие будет выполняться во все время движения – имеет место перманентное вращение. В этом случае справедливы тождества $\gamma_1(t) \equiv 0$, $\gamma_2(t) \equiv 0$, $\gamma_3(t) \equiv 1$. Поэтому кинематическое уравнение (2.6) примет вид

$$\mathbf{z}^{\cdot} = \frac{1}{2}\mathbf{z} \circ \frac{I_3^0}{A_3}\mathbf{i}_3 \tag{4.8}$$

а интеграл сохранения кинетического момента $\mathbf{z}^{-1} \circ \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{z} = \mathbf{i}_3$.

Это означает, что $\mathbf{z}(t) \in \mathrm{St}(\mathbf{i}_3)$. Как и выше, уравнение (4.8) можно интерпретировать в комплексном смысле, и решение

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}^0 \circ \exp\left(\frac{I_3^0}{2A_3}\left(t - t_0\right)\mathbf{i}_3\right)$$

получилось в виде равномерного вращения вокруг орта $\mathbf{i}_3$.

Автор благодарит А.П. Маркеева за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00665).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 500 с.
2. *Бранец В.Н., Шмыглевский Н.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
3. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 286 с.
4. *Кирпичников С.Н., Новоселов В.С.* Математические аспекты кинематики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 249 с.
5. *Наймарк М.А.* Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958. 376 с.
6. *Khanukaev Yu.I.* On the equations of the dynamics of the attracting point massess // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1990. V. 48. N. 1. P. 1–21.
7. *Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: уравнения движения, постановка задач, программное движение и управление. // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 7–14.
8. *Косенко И.И.* О методе Галеркина в нелинейной механике // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 5. С. 586–588.
9. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
10. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
11. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
12. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.XI.1996