УДК 62–50

© 1998 г. Гафуржан И. Ибрагимов

ОБ ОДНОЙ ИГРЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НЕСКОЛЬКИМИ ОБЪЕКТАМИ ОДНОГО

Исследуется дифференциальная игра преследования m динамическими объектами одного. Все игроки обладают простыми движениями. Время окончания игры фиксировано. На управления первых k ($k \leqslant m$) преследователей и убегающего наложены интегральные ограничения, а на управления остальных преследователей – геометрические ограничения. Платой игры является расстояние между убегающим и ближайшим к нему преследователем в момент завершения игры. Построены оптимальные стратегии игроков и найдена цена игры.

1. Постановка задачи. В R^n движения преследователей P_i и убегающего E описываются уравнениями

$$P_i: \quad \dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_{i0} \tag{1.1}$$

$$E: \quad \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0 \tag{1.2}$$

где x_i, u_i, y, $v \in R^n$, u_i – управляющий параметр преследующего P_i, а v – управляющий параметр убегающего E; здесь и всюду далее $i = 1, 2, ..., m$.

Определение 1. Измеримая функция $u_j = u_j(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, удовлетворяющая ограничению

$$\int_0^\vartheta |u_j(t)|^2\, dt \leqslant \rho_j^2 \quad \text{при } j = 1, 2, ..., k \tag{1.3}$$

$$|u_j(t)| \leqslant \rho_j \quad \text{при } j = k+1, ..., m \tag{1.4}$$

называется допустимым управлением преследующего P_j, где ϑ – заданный фиксированный момент времени, ρ_j – заданные положительные числа, k – неотрицательное целое число.

Определение 2. Измеримая функция $v = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, удовлетворяющая ограничению $|v(t)| \leqslant \sigma$, называется допустимым управлением убегающего E. Если $u_i = u_i(t)$ и $v = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ – допустимые управления преследующего P_i и убегающего E соответственно, то траектория преследующего $x_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, определяется как абсолютно непрерывное решение задачи Коши (1.1), а траектория убегающего $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, – как абсолютно непрерывное решение задачи Коши (1.2).

Через $H(x, r)$ (соответственно $S(x, r)$) обозначим шар (сферу) с центром в точке x и радиусом r.

Определение 3. Функция $U_j(x, y, v)$:

U_j: $R^n \times R^n \times R^n \to R^n$ при $j = 1, ..., k$

U_j: $R^n \times R^n \times H(0,\sigma) \to H(0,\rho_j)$ при $j = k+1, ..., m$ для которой система

$$\dot{x}_j = U_j(x_j, y, v(t)), \quad x_j(0) = x_{j0}$$

$$\dot{y} = v(t), \quad y(0) = y_0$$

имеет единственное абсолютное непрерывное решение для произвольного допустимого управления $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, убегающего E, называется стратегией преследующего P_j. Стратегия U_i называется допустимой, если допустимо каждое управление, формируемое этой стратегией.

Определение 4. Стратегии U_{i0} преследующих P_i, соответственно, называются оптимальными, если

$$\inf_{U_1,...,U_m} \Gamma_1(U_1,...,U_m) = \Gamma_1(U_{10},...,U_{m0})$$

где

$$\Gamma_1(U_1,...,U_m) = \sup_{v(\cdot)} \min_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i(\vartheta) - y(\vartheta)|$$

U_i – допустимые стратегии преследующих P_i, соответственно, $v(\cdot)$ – допустимое управление убегающего E.

Определение 5. Функция $V(x_1, ..., x_m, y)$, V: $R^n \times ... \times R^n \to H(0,\sigma)$, для которой система

$$\dot{x}_i = u_i(t), \quad x_i(0) = x_{i0}$$

$$\dot{y} = V(x_1,...,x_m,y), \quad y(0) = y_0$$

имеет единственное абсолютно непрерывное решение для произвольных допустимых управлений $u_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, преследующих P_i, называется стратегией убегающего E. Если каждое управление, формируемое стратегией V, допустимо, то сама стратегия V называется допустимой.

Определение 6. Стратегия V_0 убегающего E называется оптимальной, если

$$\sup_V \Gamma_2(V) = \Gamma(V_0)$$

где

$$\Gamma_2(V) = \inf_{u_1(\cdot),...,u_m(\cdot)} \min_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i(\vartheta) - y(\vartheta)|$$

$u_i(\cdot)$ – допустимые управления преследующих P_i.

Если справедливо равенство $\Gamma_1(U_{10}, ..., U_{m0}) = \Gamma_2(V_0) = \gamma$, то говорят, что игра имеет цену γ [1].

Требуется найти оптимальные стратегии U_{i0}, V_0 игроков P_i, E соответственно и цену игры.

Аналогичные задачи исследовались во многих работах. Например, был рассмотрен случай, когда $k = 0$, $m = 2$ [2], случай, когда $k = 0$ [3], и случай, когда $k = 0$, $m \leqslant n$ (n – размерность пространства) [4].

В данной работе развивается метод, использованный автором[1].

2. Оптимальное сближение *m* преследователей с одним убегающим. Рассмотрим дифференциальную игру (1.1), (1.2). Можно проверить, что областью достижимости преследующего P_j, из начального положения x_{j0} к моменту времени ϑ является шар

$$H(x_{j0}, \rho_j\sqrt{\vartheta}) \quad \text{при } j = 1,...,k, \quad H(x_{j0}, \rho_j\vartheta) \quad \text{при } j = k+1,...$$

[1] *Ибрагимов Г.И.* Об оптимальном сближении двух преследователей с одним убегающим. Москва, 1987. 16 с. – Деп. в ВИНИТИ 1987 г. N: 5384 – В 87.

Пусть

$$G_j(l) = H(x_{j0}, \rho_j\sqrt{\vartheta} + l) \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, k$$

$$G_j(l) = H(x_{j0}\rho_j\vartheta + l) \quad \text{при} \quad j = k+1, \ldots, m$$

$$\gamma = \min\left\{ l \geqslant 0: \quad H(y_0, \sigma\vartheta) \subset \bigcup_{1}^{m} G_i(l) \right\} \tag{2.1}$$

Теорема. Если $\sigma\vartheta \leqslant \rho_j\vartheta + \gamma$ ($j = k + 1, \ldots, m$) и $(y_0 - x_{i0}, p_0) \geqslant 0$ для некоторого ненулевого вектора p_0, определяемое формулой (2.1), то число γ – цена дифференциальной игры (1.1), (1.2).

Доказательство теоремы основано на нескольких леммах.

Пусть C – граница замкнутого ограниченного множества $D \subset R^n$, $X_i = \{x: x \in R^n, (x, p_i) \leqslant d_i\}$ – некоторые полупространства, при этом p_i – заданные единичные векторы, d_i – заданные числа.

Лемма 1. Если для некоторого ненулевого вектора p_0 выполнены неравенства $(p_0, p_i) \geqslant 0$ и включение $C \subset \cup X_i$, то $D \subset \cup X_i$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\operatorname{int} D \neq \emptyset$. Предположим противное. Пусть $\bar{y} \in \operatorname{int} D$ и $\bar{y} \notin \cup X_i$. Отсюда следует, что $\bar{y}$ не принадлежит никакому из полупространств X_i, т.е. $(\bar{y}, p_i) > d_i$. Тогда никакая точка полупрямой $y(t) = \bar{y} + tp_0$, $t \geqslant 0$ не принадлежит множеству $\cup X_i$, ибо $(y(t), p_i) = (\bar{y}, p_i) + t(p_0, p_i) > d_i$. С другой стороны, эта полупрямая пересекает границу C множества D в некоторой точке y_1. Тогда по условию леммы $y_1 \in \cup X_i$. Противоречие. Лемма 1 доказана.

Пусть X – некоторое n-мерное полупространство, содержащее точку x_{j0}, где $j \in \{1, \ldots, m\}$ – некоторый индекс. Возможны два случая: на управление $u_j(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, преследующего наложено либо интегральное ограничение (1.3), либо геометрическое ограничение (1.4). Пусть имеет место первый случай. Введем обозначение $Y = X \cap H(y_0, \sigma\vartheta)$.

Лемма 2. Если $y(\vartheta) \in X$ и

$$Y \subset H(x_{j0}, \rho_j\sqrt{\vartheta}) \tag{2.2}$$

то существует стратегия преследующего P_j, обеспечивающая равенство $x_j(\vartheta) = y(\vartheta)$.

Доказательство. Пусть $v = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, – произвольное допустимое управление убегающего E. Стратегию преследующего P_j на отрезке времени $[0, \vartheta]$ определим так:

$$u_j(t) = \begin{cases} (y_0 - x_{j0})/\vartheta + v(t), & 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0, & T < t \leqslant \vartheta \end{cases} \tag{2.3}$$

где $T \in [0; \vartheta]$ – момент времени, для которого

$$\int_0^T |u_j(t)|^2 \, dt = \rho_j^2$$

если такой момент существует.

Пусть $x_{j0} = y_0$. Тогда из (2.2) следует, что $\sigma\vartheta \leqslant \rho_j\sqrt{\vartheta}$, а (2.3) имеет вид $u_j(t) = v(t)$. Следовательно,

$$\int_0^\vartheta |u_j(t)|^2 \, dt = \int_0^\vartheta |v(t)|^2 \, dt \leqslant \vartheta\sigma^2 \leqslant \rho_j^2$$

т.е. управление $u_j(t) = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, допустимо. Ясно, что оно обеспечивает выполнение равенства $x_j(t) = y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$. Таким образом, в этом случае лемма верна.

Пусть теперь $x_{j0} \neq y_0$. Обозначим

$$e = (y_0 - x_{j0})/|y_0 - x_{j0}|$$

$a = \max\{(z - x_{j0}, e): z \in Y\}$, $b = \max\{(z - y_0, e): z \in Y\}$, где (x, y) скалярное произведение векторов x и y. Заметим, что

$$a - b = (y_0 - x_{j0}, e) = |y_0 - x_{j0}| \tag{2.4}$$

Из включения (2.2) вытекает неравенство

$$\rho_j^2\vartheta - \sigma^2\vartheta^2 \geqslant a^2 - b^2 \tag{2.5}$$

Покажем допустимость стратегии (2.3). Учитывая неравенство

$$\int_0^{\vartheta} (v(t), e)dt \leqslant b$$

вытекающее из включения $y(\vartheta) \in X$ и соотношения (2.4) и (2.5), получаем, что

$$\int_0^{\vartheta} |u_j(t)|^2\, dt = \frac{1}{\vartheta}|y_0 - x_{j0}|^2 + \frac{2}{\vartheta}|y_0 - x_{j0}| \int_0^{\vartheta} (v(t), e)dt + \sigma^2\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\vartheta}((a-b)^2 + 2(a-b)b + \sigma^2\vartheta^2) \leqslant \rho_j^2$$

т.е. построенная стратегия преследующего допустима.

Покажем теперь, что стратегия (2.3) обеспечивает равенство $x_j(\vartheta) = y(\vartheta)$. Действительно,

$$x_j(\vartheta) = x_{j0} + \int_0^{\vartheta} u_j(t)dt = y_0 - x_{j0} + x_{j0} + \int_0^{\vartheta} v(t)dt = y(\vartheta)$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда на управление преследующего наложено геометрическое ограничение (1.4).

Лемма 3. Если $y(\vartheta) \in X$, $\sigma \leqslant \rho_j$ и

$$Y \subset H(x_{j0}, \rho_j\vartheta), \tag{2.6}$$

то существует стратегия преследующего P_j, обеспечивающая равенство $x_j(\vartheta) = y(\vartheta)$.

Доказательство. Пусть $v = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, – произвольное допустимое управление убегающего. Стратегию преследующего P_j определим так:

$$u_j(t) = \begin{cases} v(t) - (v(t), e)e - er_j(t), & x_j(t) \neq y(t) \\ v(t), & \tau \leqslant t \leqslant \vartheta \end{cases} \tag{2.7}$$

$$r_j(t) = [\rho_j^2 - \sigma^2 + (v(t), e)^2]^{1/2}$$

где $\tau \in [0; \vartheta]$ – момент времени, при котором впервые выполняется равенство $x_j(\tau) = y(\tau)$. Ясно, что построенная стратегия преследующего P_j допустима.

Если $x_{j0} = y_0$, то из (2.7) получаем, что $u_j(t) = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$. Тогда ясно, что $x_j(\vartheta) = y(\vartheta)$.

Пусть $x_{j0} \neq y_0$. Тогда в силу (2.4) и (2.7) имеем

$$y(\tau) - x_j(\tau) = ef(\tau), \quad f(\tau) = a - b - \int_0^{\tau} (r_j(t) - (v(t), e))dt$$

Очевидно, что $f(0) = a - b = |x_{j0} - y_0| > 0$.

Покажем теперь, что $f(\vartheta) \leqslant 0$. Тогда будет доказано, что $f(\tau) = 0$ при некотором $\tau \in [0; \vartheta]$. Рассмотрим вектор-функцию $g(t) = (\sqrt{\rho_j^2 - \sigma^2};\ (v(t), e))$. Из неравенства

$$\int_0^{\vartheta} |g(t)|\,dt \geqslant \left|\int_0^{\vartheta} g(t)dt\right|$$

получаем, что

$$f(\vartheta) \leqslant a-b+b-[(\rho_j^2-\sigma^2)\vartheta^2+b^2]^{1/2} \leqslant 0$$

(используем неравенство $a^2-b^2 \leqslant (\rho_j^2-\sigma^2)\vartheta^2$, вытекающее из включения (2.6)).

Следовательно, при некотором $\tau \in [0, \vartheta]$ имеем $x_j(\tau) = y(\tau)$. По построению стратегии преследующего (2.7) выполняется равенство $u_j(t) = v(t)$ при $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$. Отсюда вытекает выполнение равенства $x_j(\vartheta) = y(\vartheta)$. Лемма 3 доказана.

Введем фиктивных преследующих (ФП) $z_1, ..., z_k, z_{k+1}, ..., z_m$, движения которых описываются уравнениями

$$\dot{z}_i = w_i, \quad z_i(0) = x_{i0}$$

и на управления которых наложены ограничения

$$\int_0^\vartheta |w_j(t)|^2\, dt \leqslant \left(\rho_j + \frac{\gamma}{\sqrt{\vartheta}}\right)^2, \qquad j = 1,...,k$$

$$|w_j(t)| \leqslant \rho_j + \frac{\gamma}{\vartheta}, \qquad j = k+1,...,m$$

Можно показать, что областью достижимости ФП z_i из начального положения x_{i0} к моменту времени ϑ является шар $G_i(\gamma)$. Из определения числа γ следует, что

$$H(y_0, \sigma\vartheta) \subset \cup\, G_i(\gamma) \tag{2.8}$$

Пусть

$$I = \{j:\ j \in \{1,...,m\},\ \ S(y_0,\sigma\vartheta) \cap G_j(\gamma)\} \neq \emptyset$$

Тогда из (2.8) следует, что

$$H(y_0,\sigma\vartheta) \subset \bigcup_{j \in I} G_j(\gamma) \tag{2.9}$$

Обозначим

$$e_i = \begin{cases} (y_0 - x_{i0})/\,|y_0 - x_{i0}|, & x_{i0} \neq y_0 \\ p_0, & x_{i0} = y_0 \end{cases}$$

$$a_j = \max\{(z - x_{j0}, e_j):\ z \in S(y_0,\sigma\vartheta) \cap G_j(\gamma)\}, \quad j \in I$$

$$X_j = \{x:\ x \in R^n,\ (x - x_{j0}, e_j) \leqslant a_j\}, \ \ j \in I$$

Ясно, что

$$S(y_0,\sigma\vartheta) \cap G_j(\gamma) \subset X_j, \qquad j \in I$$

Отсюда, учитывая (2.9), имеем

$$y(\vartheta) \subset \bigcup_{j \in I} X_j \tag{2.10}$$

Если теперь учесть условие теоремы: $(p_0, e_j) \geqslant 0, j \in I$, то в силу леммы 1 получим

$$H(y_0,\sigma\vartheta) \subset \bigcup_{j \in I} X_j$$

Стратегии ФП на отрезке времени $[0, \vartheta]$ определим так:

$$w_j(t) = \begin{cases} (y_0 - x_{j0})/+v\ (t), & 0 \leqslant t \leqslant T_j \\ 0, & T_j < t, \quad j \in I_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

где $I_0 = I \cap \{1, ..., k\}$, T_j – момент времени, для которого

$$\int_0^{T_j} |w_j(t)|^2\, dt = \left(\rho_j + \frac{\gamma}{\sqrt{\vartheta}}\right)^2$$

если такой момент существует

$$w_j(t) = \begin{cases} \upsilon(t) - (\upsilon(t),\ e_j)e_j + e_j \bar{r}_j(t), & z_j(t) \neq y(t) \\ \upsilon(t), \ \ \tau_j \leqslant t \leqslant \vartheta, & j \in I_1 \end{cases} \tag{2.12}$$

$\bar{r}_j(t) = [(\rho_j + \gamma/\vartheta)^2 - \sigma^2 + (\upsilon(t), e_j)^2]^{1/2}$, $I_1 = I \cap \{k+1, ..., m\}$, τ_j – первый момент времени, для которого $z_j(\tau_j) = y(\tau_j)$.

Из (2.10) следует, что $y(\vartheta) \in X_s$ при некотором $s \in I$. Тогда, принимая во внимание включение

$$X_s \cap H(y_0, \sigma\vartheta) \subset G_s(\gamma), \quad s \in I$$

вытекающее из определения полупространства X_s, окажемся в условиях леммы 2, если $s \in \{1, ..., k\} \cap I$, или в условиях леммы 3, если $s \in \{k + 1, ..., m\} \cap I$. В силу этих лемм стратегия ФП (2.11) при $s \in I_0$ или стратегия (2.12) при $s \in I_1$ обеспечивает равенство $z_s(\vartheta) = y(\vartheta)$.

Итак, построенные стратегии ФП обеспечивают выполнение равенства $z_s(\vartheta) = y(\vartheta)$ при некотором $s \in I$.

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Стратегии преследующих построим с помощью стратегии ФП:

$$u_j(t) = \frac{\rho_j \vartheta^{\xi}}{\rho_j \vartheta^{\xi} + \gamma} w_j(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

$$\xi = \begin{cases} 1/2, & j \in I_0 \\ 1, & j \in I_1 \end{cases}$$

$$u_j(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad j \in \{1, ..., m\} / I$$

Из равенства $z_s(\vartheta) = y(\vartheta)$ при $s \in I_0$ получаем

$$|x_s(\vartheta) - y(\vartheta)| = |x_s(\vartheta) - z_s(\vartheta)| = \left| \int_0^{\vartheta} (u_s(t) - w_s(t) dt \right| \leqslant \frac{\gamma}{\rho_s \sqrt{\vartheta} + \gamma} \int_0^{\vartheta} |w_s(t)|\, dt \leqslant \gamma$$

(использовано неравенство Коши–Буняковского).

Если теперь $s \in I_1$, то получаем аналогичное неравенство, поскольку $|w_s(t)| \leqslant \rho_s + \gamma/\vartheta$.

Таким образом, стратегии преследующих обеспечивают выполнения неравенства $|x_s(\vartheta) - y(\vartheta)| \leqslant \gamma$ при некотором $s \in I$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, остается показать существование стратегии убегающего E, гарантирующей выполнения неравенств

$$|x_i(\vartheta) - y(\vartheta)| \geqslant \gamma \tag{2.13}$$

для любых допустимых управлений $u_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$.

По определению числа γ существует точка $z_0 \in H(y_0, \sigma\vartheta)$, такая, что $\max|x - z_0| = \gamma$, где максимум берется по всем

$$x \in \bigcup_{j=1}^{k} H(x_{j0}, \rho_j \sqrt{\vartheta}) \cup \bigcup_{j=k+1}^{m} H(x_{j0}, \rho_j \vartheta)$$

Управление убегающего определим так:

$$v(t) = \sigma(z_0 - y_0)/|z_0 - y_0|, \quad 0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

Ясно, что это управление обеспечивает выполнение неравенств (2.13). Следовательно, γ – цена игры. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
2. *Пашков А.Г., Теорехов С.Д.* Об одной игре оптимального преследования двумя объектами одного // ПММ. 1983. Т.47. Вып. 6. С. 898–903.
3. *Рихсиев Б.Б.* Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент: Фан, 1989. 232 с.
4. *Синицын А.В.* Построение функции цены в игре преследования несколькими объектами // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 52–57.

Поступила в редакцию
6.II.1996

Ташкент