УДК 62–50

© 1998 г. Н.Ю. Лукоянов

К ВОПРОСУ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЦЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ ДЛЯ ПОЗИЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА

В рамках теоретико-игровой постановки [1–8] для динамической системы, подверженной воздействиям управления и неконтролируемой помехи, рассматривается задача [8–11] об управлении по принципу обратной связи с показателем качества – позиционным функционалом от движения системы. При общих в меру предположениях о строении этого функционала дана и обоснована процедура для вычисления цены соответствующей дифференциальной игры. Несмотря на исходную многоразмерность задачи, связанную со структурой показателя качества, предлагаемая процедура сводит задачу к последовательному построению выпуклых сверху оболочек от вспомогательных функций в областях, размерность которых не превосходит размерности фазового вектора системы.

Было показано [11], что в дифференциальной игре двух лиц для конфликтно-управляемой системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, линейными по фазовому вектору x, при показателе качества – некоторой полунорме в функциональном пространстве движений $x[\cdot]$ вычисление цены игры можно свести к последовательному построению выпуклых сверху оболочек $\varphi_j(\cdot)$ для вспомогательных функций $\psi_j(\cdot)$, определяемых в подходящих областях G_j (здесь $j = k, k-1,\dots,1$; k – достаточно большое натуральное число) подходящего пространства двойственных переменных. Эффективность получаемой процедуры существенно зависит от размерности и структуры этого пространства, а именно от размерности тех переменных, по которым производится овыпуклление.

Вообще говоря, надлежащее пространство складывается из пространства векторов m, двойственных к фазовому вектору x, и пространства дополнительных параметров, двойственных к своеобразным конечномерным информационным элементам предыстории движения. Количество и размерность дополнительных параметров зависят от конкретных свойств показателя качества. Например, в игре с показателем качества типа суммарного отклонения движения $x[\cdot]$ от заданной траектории (см. [8], с. 86; а также [10]) дополнительные параметры не требуются и построения проводятся в пространстве векторов m. В игре с таким показателем качества, как максимальное отклонение движения $x[\cdot]$ от заданной траектории ([8], с. 92), в построениях участвует дополнительный скалярный параметр ν. Однако оболочки $\varphi_j(m, \nu)$ для функций $\psi_j(m, \nu)$ достаточно строить овыпуклением последних только по m в областях $G_{j,\nu}$, при фиксированных значениях ν. Таким образом, и здесь построения по сути проводятся в пространстве векторов m.

Характерно, что приведенные показатели качества являются позиционными функционалами ([8], с. 43; [9]), поэтому информационным образом для оптимальных стратегий в указанных играх служит текущее состояние $\{t, x[t]\}$ системы. С другой стороны, в игре с показателем качества в виде суммы максимального и суммарного отклонений движения системы от заданной траектории ([11], с. 891), который не является позиционным, для вычисления цены игры надлежит строить выпуклые сверху оболочки $\varphi_j(m, \nu)$ от подходящих функций $\psi_j(m, \nu)$ уже в областях G_j пар $\{m, \nu\}$. Здесь овыпукления функций $\psi_j(m, \nu)$ только по m недостаточно (существует контрпример). Заметим, что в данной игре информационным образом для стратегий, образующих седловую точку игры, служит вся предыстория движения.

Далее подробно разбирается случай, когда рассматриваемый в [11] показатель качества имеет так называемую позиционную структуру (и как следствие является позиционным функционалом). Доказывается, что в этом достаточно общем случае, так же как и в указанных выше частных случаях ([8], с. 86, 92), вычисление цены игры сводится к построению выпуклых сверху оболочек для функций, которые определяются в областях пространства, состоящего только из двойственных векторов m (т.е. здесь овыпукление по дополнительным параметрам не требуется).

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему

$$dx/dt = A(t)x + f(t,u,v), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta$$
$$x \in R^n, \quad u \in P \subset R^r, \quad v \in Q \subset R^s \tag{1.1}$$

Здесь x – фазовый вектор, u – вектор управления, v – вектор помехи; t_0 и ϑ – заданные моменты времени ($t_0 < \vartheta$); P и Q – известные компакты; $A(t)$ и $f(t, u, v)$ – кусочно-непрерывные по t матрица-функция и вектор-функция соответственно.

Здесь и далее какая-либо функция $F(t, z)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $z \in Z$ называется кусочно-непрерывной по t, если она имеет конечное число точек t_q разрыва по t, которые не зависят от z, при этом на интервалах непрерывности по t функция $F(t, z)$ непрерывна по совокупности аргументов, а в точках разрыва t_q она непрерывна справа и может быть доопределена слева до функции непрерывной по совокупности на $[t_{q-1}, t_q]\times Z$.

Выполнено условие седловой точки в маленькой игре ([1, 2]; [3], с. 56), т.е. для любых $m \in R^n$ и $t \in [t_0, \vartheta]$ справедливо равенство

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle m, f(t,u,v)\rangle = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle m, f(t,u,v)\rangle \tag{1.2}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение векторов.

Назовем позицией системы (1.1) пару $\{t, x\}$. Пусть задана некоторая позиция $\{t_*, x_*\}$, $t_0 \leq t_* < \vartheta$. Допустимы измеримые по Борелю реализации $u[t_*[\cdot]\vartheta) = \{u[t] \in P, t_* \leq t < \vartheta\}$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta) = \{v[t] \in Q, t_* \leq t < \vartheta\}$. Из позиции $\{t_*, x_*\}$ такие реализации порождают согласно (1.1) (при $u = u[t]$, $v = v[t]$) абсолютно непрерывные движения $x[t_*[\cdot]\vartheta] = \{x[t], t_* \leq t \leq \vartheta, x[t_*] = x_*\}$. Считаем, что в пространстве переменных t, x задано компактное множество K (см. например [7], с. 40) возможных позиций системы (1.1). Проекция K на ось t равна отрезку $[t_0, \vartheta]$. При этом, все траектории системы (1.1), начинающиеся в произвольной позиции $\{t_*, x_*\} \in K$, остаются в K при всех $t \in (t_*, \vartheta]$. Тогда рассматриваемые движения будут удовлетворять по t условию Липшица с одной и той же константой λ_K.

Показатель γ качества движения $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ задан в виде функционала $\gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta])$, который имеет следующее строение.

Заданы натуральное число $N \geq 1$; моменты времени $t^{[i]} \in [t_0, \vartheta]$, $t^{[i]} < t^{[i+1]}$ ($i = 1, \ldots, N-1$), $t^{[N]} = \vartheta$; постоянные ($d^{[i]}\times n$)-матрицы $D^{[i]}$ ($1 \leq d^{[i]} \leq n$) и n-мерные векторы $g^{[i]}$ ($i = 1, \ldots, N$). Предполагается, что строки матриц $D^{[i]}$ линейно независимы. В пространствах ($d^{[i]} + \ldots + d^{[N]}$)-мерных векторов-наборов $\{y^{[i]}, \ldots, y^{[N]}\}$, составленных из $d^{[q]}$-мерных векторов $y^{[q]}$ ($q = i,\ldots, N$), заданы некоторые нормы $\mu^{[i]}(\{y^{[i]}, \ldots, y^{[N]}\})$ ($i = 1, \ldots, N$; при $i = N$ символ $\{y^{[i]}, \ldots, y^{[N]}\}$ означает просто вектор $y^{[N]}$).

Функционал γ имеет вид

$$\gamma = \gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \mu^{[h(t_*)]}(\{D^{[h(t_*)]}(x[t^{[h(t_*)]}] - g^{[h(t_*)]}),\ldots, D^{[N]}(x[t^{[N]}] - g^{[N]})\}) \tag{1.3}$$

Здесь

$$h(t_*) = \min_{i=1,\dots,N} \{i : t^{[i]} \geqslant t_*\} \tag{1.4}$$

Будем еще предполагать, что существуют функции $\sigma^{[i]}(y^{[i]}, \beta)$, $y^{[i]} \in R^{d^{[i]}}$, $\beta \in R$, $\beta \geqslant 0$, для которых справедливы равенства

$$\mu^{[i]}(\{y^{[i]},\dots,y^{[N]}\}) = \sigma^{[i]}(y^{[i]},\beta'), \quad \beta' = \mu^{[i+1]}(\{y^{[i+1]},\dots,y^{[N]}\}) \tag{1.5}$$

$$i = 1,\dots,N-1$$

Без ограничения общности функции $\sigma^{[i]}(y^{[i]}, \beta)$ можно доопределить для $\beta < 0$ так, чтобы они были четными по β, т.е. для $\beta < 0$ полагаем $\sigma^{[i]}(y^{[i]}, \beta) = \sigma^{[i]}(y^{[i]}, -\beta)$, $i = 1,\dots,N-1$. Тогда из (1.5) следует, что функции $\sigma^{[i]}(y^{[i]}, \beta)$ будут нормами в пространствах $(d^{[i]} + 1)$-мерных векторов $\{y^{[i]}, \beta\}$.

Теперь, какова бы ни была история $x[t_*[\cdot]t^*) = \{x[\tau], t_* \leqslant \tau < t^*\}$, $t^* \leqslant \vartheta$ движения $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1), функционал γ из (1.3) может быть представлен в виде

$$\gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \sigma(x[t_*[\cdot]t^*),\beta^*), \quad \beta^* = \gamma(x[t^*[\cdot]\vartheta])$$

Здесь в случае $h(t_*) = h(t^*)$ имеем $\sigma(x[t_*[\cdot]t^*), \beta^*) = \beta^*$, а в случае $h(t_*) < h(t^*)$ полагаем $\sigma(x[t_*[\cdot]t^*),\beta^*) = \sigma_{[h_*]}^{[h^*]}(x[t_*[\cdot]t^*),\beta^*)$, $h_* = h(t_*)$, $h^* = h(t^*)$, где $\sigma_{[h_*]}^{[h^*]}(x[t_*[\cdot]t^*),\beta^*)$ определяется из следующих рекуррентных соотношений

$$\sigma_{[h^*-1]}^{[h^*]}(x[t_*[\cdot]t^*),\beta^*) = \sigma^{[h^*-1]}(D^{[h^*-1]}(x[t^{[h^*-1]}] - g^{[h^*-1]}),\beta^*)$$

$$\sigma_{[i]}^{[h^*]}(x[t_*[\cdot]t^*),\beta^*) = \sigma^{[i]}(D^{[i]}(x[t^{[i]}] - g^{[i]}), \sigma_{[i+1]}^{[h^*]}(x[t_*[\cdot]t^*),\beta^*))$$

$$i = h_*,\dots,h^* - 2$$

Из отмеченных выше свойств функций $\sigma^{[i]}(y^{[i]}, \beta)$ вытекает, что для любой фиксированной истории $x[t_*[\cdot]t^*)$ функционал $\sigma(x[t_*[\cdot]t^*), \beta^*)$ не убывает по β^* ($\beta^* \geqslant 0$). Таким образом, при условии (1.5) функционал (1.3) является позиционным ([8], с. 43; [9]).

Требуется найти управление (или помеху), нацеленное минимизировать (нацеленную максимизировать) показатель γ (1.3), (1.5).

Эти две задачи объединяются согласно ([7], с. 75; [8], с. 51) в антагонистическую дифференциальную игру двух лиц (u – действие первого игрока, v – действие второго) в классе чистых позиционных универсальных стратегий $u(t, x, \varepsilon)$ и $v(t, x, \varepsilon)$, где $\{t, x\} \in K$, а $\varepsilon > 0$ – параметр точности. В силу условия (1.2) и позиционности функционала γ для каждой исходной позиции $\{t_*, x_*\} \in K$ данная игра имеет цену $\rho(t_*, x_*)$. При этом игра имеет седловую точку, которая складывается из оптимальных минимаксной $u°(t, x, \varepsilon)$ и максиминной $v°(t, x, \varepsilon)$ стратегий. В согласии с определениями цены игры и оптимальных стратегий, для любого числа $\zeta > 0$ найдутся число $\varepsilon(\zeta) > 0$ и функция $\delta(\zeta, \varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(\zeta)$, такие, что каковы бы ни были исходная позиция $\{t_*, x_*\} \in K$, $t_* < \vartheta$, число $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\zeta)$ и разбиение $\Delta_M\{t_j\} = \{t_j : t_1 = t_*, t_j < t_{j+1}, j = 1, \dots, M, t_{M+1} = \vartheta\}$ с шагом $\delta_M = \max_{j=1,\dots,M}(t_{j+1} - t_j) \leqslant \delta(\zeta, \varepsilon)$, с одной стороны, пошаговый закон управления $U° = \{u°(\cdot), \varepsilon, \Delta_M\{t_j\}\}$, формирующий воздействия

$$u°[t] = u°(t_j, x[t_j], \varepsilon), \quad t_j \leqslant t < t_{j+1}, \quad j = 1,\dots,M \tag{1.6}$$

обеспечивает неравенство

$$\gamma \leqslant \rho(t_*, x_*) + \zeta$$

какова бы ни случилась допустимая реализация помехи $v[t_*[\cdot]\vartheta)$; а с другой стороны, пошаговый закон $V^\circ = \{v^\circ(\cdot), \varepsilon, \Delta_M\{t_j\}\}$, формирующий воздействия помехи

$$v^\circ[t] = v^\circ(t_j, x[t_j], \varepsilon), \quad t_j \leqslant t < t_{j+1}, \quad j = 1, \dots, M \tag{1.7}$$

гарантирует неравенство

$$\gamma \geqslant \rho(t_*, x_*) - \zeta$$

какова бы ни случилась допустимая реализация управления $u[t_*[\cdot]\vartheta)$.

Оптимальные стратегии $u^\circ(t, x, \varepsilon)$ и $v^\circ(t, x, \varepsilon)$ строятся как экстремальные (см. [7], с. 210, 220 или [8], с. 62–64) к функции цены $\rho(t, x)$. Таким образом, для формирования оптимального управления и контроптимальной помехи достаточно уметь эффективно вычислять цену игры для любой текущей позиции $\{t, x\}$ как исходной. Этому и посвящена данная статья.

Замечание 1. Если в рассматриваемой дифференциальной игре не выполнено условие (1.2), то решение переносится в класс смешанных стратегий ([8], с. 247; [9]). Однако вспомогательные построения, предлагаемые в настоящей статье, остаются одним из основных элементов и в тех более сложных конструкциях.

Замечание 2. Показатель качества (1.3) может быть задан изначально, или такой функционал вводится как аппроксимирующий для исходного показателя $\gamma_*(x[t_*[\cdot]\vartheta])$, который учитывает континуум значений $x[t]$. Например, пусть показатель качества имеет вид

$$\gamma_*^{(p)} = \gamma_*^{(p)}(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \left(\int_{t_*}^{\vartheta} [\chi(t, D(t)(x[t] - g(t)))]^p \, dt\right)^{1/p} \tag{1.8}$$

где p – заданное число ($1 < p < \infty$); $g(t)$ – известная кусочно-непрерывная n-мерная вектор-функция; $D(t)$ – заданная кусочно-постоянная $(d(t) \times n)$-матрица-функция ($1 \leqslant d(t) \leqslant n$); $\chi(t, D(t)x)$ – кусочно-непрерывная по t полунорма-функция ($\chi(t, \cdot)$ – норма в пространстве $d(t)$-мерных векторов при каждом фиксированном t).

Функционал (1.8) является позиционным. Пусть $\rho_*^{(p)}(t_*, x_*)$ – цена, а $\overset{\circ}{u}_{(p)*}(t, x, \varepsilon)$ и $\overset{\circ}{v}_{(p)*}(t, x, \varepsilon)$ – оптимальные стратегии в дифференциальной игре для системы (1.1), (1.2) при показателе качества $\gamma_*^{(p)}$.

Функционал $\gamma^{(p)}$, аппроксимирующий для $\gamma_*^{(p)}$, можно построить следующим образом. Зададимся каким-либо разбиением

$$\Delta_N\{t^{[i]}\} = \{t^{[i]} : t^{[0]} = t_0, \ t^{[i-1]} < t^{[i]}, \ i = 1, \dots, N, \ t^{[N]} = \vartheta\} \tag{1.9}$$

отрезка $[t_0, \vartheta]$, в которое включим все моменты времени, определяющие участки постоянства матрицы-функции $D(t)$, а также все точки разрыва по t функций $g(t)$ и $\chi(t, D(t)x)$ из (1.8). Обозначим

$$\begin{gathered} D^{[i]} = D(t^{[i]})(t^{[i]} - t^{[i-1]})^{1/p}, \quad d^{[i]} = d(t^{[i]}), \quad g^{[i]} = g(t^{[i]}) \\ \chi^{[i]}(y^{[i]}) = \chi(t^{[i]}, y^{[i]}), \quad y^{[i]} \in R^{d^{[i]}}, \quad i = 1, \dots, N \end{gathered} \tag{1.10}$$

Далее полагаем

$$\gamma^{(p)} = \gamma^{(p)}(x[t_*[\cdot]\vartheta]; \Delta_N\{t^{[i]}\}) = \left(\sum_{i=h(t_*)}^{N} \left[\chi^{[i]}(D^{[i]}(x[t^{[i]}] - g^{[i]}))\right]^p\right)^{1/p} \tag{1.11}$$

причем $h(t_*)$ определяется равенством (1.4).

Тогда для любого $\zeta > 0$ найдется такое $\delta(\zeta) > 0$, что для всякого разбиения $\Delta_N\{t^{[i]}\}$ (1.9) с шагом $\delta_N = \max_{i=1,\dots,N}(t^{[i]} - t^{[i-1]}) \leq \delta(\zeta)$ будет справедливо неравенство

$$\left|\gamma_*^{(p)}(x[t_*[\cdot]\vartheta]) - \gamma^{(p)}(x[t_*[\cdot]\vartheta];\ \Delta_N\{t^{[i]}\})\right| \leq \zeta \tag{1.12}$$

какова бы ни была вектор-функция $x[t_*[\cdot]\vartheta] = \{x[t],\ \{t, x[t]\} \in K,\ t_* \leq t \leq \vartheta\}$, $t_* \in [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющая по t условию Липшица с константой λ_K.

Функционал $\gamma^{(p)}$ имеет строение (1.3), (1.5). В данном случае моменты времени $t^{[i]}$ $(i = 1,\dots,N)$ определяются выбором разбиения $\Delta_N\{t^{[i]}\}$ из (1.9), матрицы $D^{[i]}$ и векторы $g^{[i]}$ – из (1.10), а нормы $\mu^{[i]}(\cdot)$ и функции $\sigma^{[i]}(\cdot)$ задаются равенствами

$$\mu^{[i]}(\{y^{[i]},\dots,y^{[N]}\}) = \left(\sum_{q=i}^{N}\left[\chi^{[q]}(y^{[q]})\right]^p\right)^{1/p}, \quad i = 1,\dots,N$$

$$\sigma^{[i]}(y^{[i]},\beta) = \left([\chi^{[i]}(y^{[i]})]^p + |\beta|^p\right)^{1/p}, \quad i = 1,\dots,N-1$$

Пусть $\rho^{(p)}(t_*,x_*;\Delta_N\{t^{[i]}\})$ – цена, а $\overset{\circ}{u}_{(p)}(t,x,\varepsilon;\Delta_N\{t^{[i]}\})$ и $\overset{\circ}{v}_{(p)}(t,x,\varepsilon;\Delta_N\{t^{[i]}\})$ – оптимальные стратегии в игре для системы (1.1), (1.2) с показателем качества $\gamma^{(p)}$ из (1.11) (при некотором достаточно мелком фиксированном разбиении $\Delta_N\{t^{[i]}\}$ (1.9)). Рассматривая движения системы (1.1), реализующиеся в случае, когда первый игрок руководствуется стратегией $\overset{\circ}{u}_{(p)*}(\cdot)$, а второй игрок, при этом, формирует свое управляющее воздействие на основе стратегии $\overset{\circ}{v}_{(p)}(\cdot;\Delta_N\{t^{[i]}\})$, и наоборот в случае, когда игроки соответственно следуют стратегиям $\overset{\circ}{u}_{(p)}(\cdot;\Delta_N\{t^{[i]}\})$ и $\overset{\circ}{v}_{(p)*}(\cdot)$, в силу (1.12) получаем, что для любого $\eta > 0$ существует $\delta(\eta) > 0$, такое, что для всякого разбиения $\Delta_N\{t^{[i]}\}$ из (1.9) с шагом $\delta_N = \max_{i=1,\dots,N}(t^{[i]} - t^{[i-1]}) \leq \delta(\eta)$ будет выполнено неравенство

$$\left|\rho_*^{(p)}(t_*,x_*) - \rho^{(p)}(t_*,x_*;\Delta_N\{t^{[i]}\})\right| \leq \eta$$

какова бы ни была позиция $\{t_*, x_*\} \in K$.

Таким образом, задача построения минимаксного (максиминного) управления для системы (1.1), (1.2) при показателе качества $\gamma_*^{(p)}$ (1.8) сводится к построению функции $\rho^{(p)}(t,x;\Delta_N\{t^{[i]}\})$ цены дифференциальной игры для аппроксимирующего функционала $\gamma^{(p)}$ (1.11), который имеет строение (1.3), (1.5).

2. Процедура вычисления цены игры. Итак, рассмотрим дифференциальную игру для системы (1.1), (1.2) при показателе качества (1.3), (1.5). Пусть реализовалась позиция $\{t_*, x_*\} \in K$. Пусть $t_* < \vartheta$. Назначим разбиение

$$\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\} = \{\tau_j : \tau_1 = t_*,\ \tau_j < \tau_{j+1},\ j = 1, \dots, k,\ \tau_{k+1} = \vartheta\} \tag{2.1}$$

отрезка времени $[t_*, \vartheta]$, в которое включим все точки разрыва по t функций $A(t)$ и $f(t, u, v)$, а также все моменты времени $t^{[i]}$ $(i = h(t_*), \dots, N)$ из (1.3). Пусть $X(t, \tau)$ – фундаментальная матрица решений для уравнения $dx/dt = A(t)x$. Обозначим

$$\Delta\psi_j(t_*,m) = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle m, X(\vartheta,\tau)f(\tau,u,v)\rangle d\tau \tag{2.2}$$

$$m \in R^n, \quad j = 1,\dots,k$$

Двигаясь попятно по шагам разбиения $\Delta_k\{\tau_j\}$ (2.1), построим последовательность областей $G_j(t_*,\tau_j \pm 0)$ в пространстве R^n векторов m и последовательность функций $\varphi_j(t_*,\tau_j \pm 0,m)$, $m \in G_j(t_*,\tau_j \pm 0)$ $(j = k+1, k,\dots,1)$.

Именно, при $j = k + 1$ полагаем

$$G_{k+1}(t_*, \tau_{k+1} + 0) = \{m : m = 0\}, \quad \varphi_{k+1}(t_*, \tau_{k+1} + 0, m) \equiv 0$$

$$G_{k+1}(t_*, \tau_{k+1} - 0) = \left\{m : m = D^{[N]T} l, \ l \in R^{p^{[N]}}, \ \mu^{[N]*}(l) \leqslant 1\right\} \tag{2.3}$$

$$\varphi_{k+1}(t_*, \tau_{k+1} - 0, m) = -\langle m, g^{[N]}\rangle, \quad m \in G_{k+1}(t_*, \tau_{k+1} - 0)$$

Верхний индекс T означает транспонирование; $\mu^{[N]*}(\cdot)$ – норма, сопряженная к норме $\mu^{[N]}(\cdot)$ из (1.3). Здесь и ниже при описании областей приняты следующие правила: сначала в фигурных скобках записывается обозначение элемента, затем после двоеточия указываются условия принадлежности элемента к области (так, область $G_{k+1}(t_*, \tau_{k+1} + 0)$ состоит только из одного вектора $m = 0$, а включение $m \in G_{k+1}(t_*, \tau_{k+1} - 0)$ имеет место тогда и только тогда, когда для этого m существует такой $p^{[N]}$-мерный вектор l, $\mu^{[N]*}(l) \leqslant 1$, для которого справедливо равенство $m = D^{[N]T} l$).

Далее по индукции. Пусть для $1 < j + 1 \leqslant k + 1$ уже построены области $G_{j+1}(t_*, \tau_{j+1} \pm 0)$ и функции $\varphi_{j+1}(t_*, \tau_{j+1} \pm 0, m)$, $m \in G_{j+1}(t_*, \tau_{j+1} \pm 0)$.

Тогда для текущего j сначала определяем

$$G_j(t_*, \tau_j + 0) = G_{j+1}(t_*, \tau_{j+1} - 0)$$

$$\psi_j(t_*, m) = \Delta\psi_j(t_*, m) + \varphi_{j+1}(t_*, \tau_{j+1} - 0, m), \quad m \in G_j(t_*, \tau_j + 0) \tag{2.4}$$

$$\varphi_j(t_*, \tau_j + 0, m) = \left\{\psi_j(t_*, \cdot)\right\}^*_{G_j(t_*, \tau_j + 0)}$$

Символ $\{\psi(\cdot)\}^*_G$ означает выпуклую сверху оболочку функции $\psi(m)$, конструируемую овыпуклением по m в области G. Такая оболочка, по ее определению, является минимальной вогнутой по m функцией, которая мажорирует функцию $\psi(m)$, $m \in G$.

Далее если момент τ_j не совпадает ни с одним из моментов времени $t^{[i]}$ из (1.3) (в согласии с (1.4) это означает, что $\tau_j < t^{[h]}$, где $h = h(\tau_j)$), то полагаем

$$G_j(t_*, \tau_j - 0) = G_j(t_*, \tau_j + 0), \quad \varphi_j(t_*, \tau_j - 0, m) \equiv \varphi_j(t_*, \tau_j + 0, m) \tag{2.5}$$

Если же $\tau_j = t^{[h]}$, $h = h(\tau_j)$, то определяем

$$G_j(t_*, \tau_j - 0) = \{m : \ m = \nu m_* + X^T(t^{[h]}, \vartheta) D^{[h]T} l,$$

$$\nu \geqslant 0, \ l \in R^{p^{[h]}}, \ \sigma^{[h]*}(l, \nu) \leqslant 1, \ m_* \in G_j(t_*, \tau_j + 0)\} \tag{2.6}$$

где $\sigma^{[h]*}(\cdot)$ – норма, сопряженная к норме $\sigma^{[h]}(\cdot)$ из (1.5) (при $i = h$);

$$\varphi_j(t_*, \tau_j - 0, m) = \max_{\{\nu, m_*, l\}|m} [\nu\varphi_j(t_*, \tau_j + 0, m_*) - \langle l, D^{[h]} g^{[h]}\rangle] \tag{2.7}$$

$$m \in G_j(t_*, \tau_j - 0)$$

где максимум вычисляется по всем возможным тройкам $\{\nu, \ m_*, \ l\}$, которые согласно (2.6) отвечают заданному вектору $m \in G_j(t_*, \ \tau_j - 0)$.

Следуя описанной индукции, при $j = 1$ построим области $G_1(t_*, \ \tau_1 \pm 0)$ и функции $\varphi_1(t_*, \ \tau_1 \pm 0, m)$, $m \in G_1(t_*, \ \tau_1 \pm 0)$.

Можно проверить, что для любого j ($j = k + 1, k, \ldots, 1$) построенные таким образом области $G_j(t_*, \ \tau_j \pm 0)$ будут выпуклыми компактами в R^n, содержащими вектор $m = 0$, а функции $\varphi_j(t_*, \ \tau_j \pm 0, \ m)$ будут вогнутыми, ограниченными и полунепрерывными сверху в областях своего определения, причем

$$\varphi_j(t_*, \tau_j \pm 0, 0) \geqslant 0 \tag{2.8}$$

Введем величины

$$\begin{gathered} e(t_* \pm 0, x_*; \Delta_k) = \max_{m \in G_1(t_*, \tau_1 \pm 0)} \alpha_1^{\pm}(t_*, x_*, m) \\ \alpha_q^{\pm}(t_*, w, m) = \langle m, X(\vartheta, t_*) w \rangle + \varphi_q(t_*, \tau_q \pm 0, m), \quad q = 1, 2 \end{gathered} \tag{2.9}$$

В случае $t_* = \vartheta$ будем полагать, что в (2.9) через Δ_k обозначено вырожденное разбиение, состоящее из одной точки $\tau_1 = t_* = \vartheta = \tau_{k+1}$, при этом области $G_1(t_*, \tau_1 \pm 0) = G_{k+1}(t_*, \tau_{k+1} \pm 0)$, а функции $\varphi_1(t_*,\ \tau_1 \pm 0,\ m) \equiv \varphi_{k+1}(t_*,\ \tau_{k+1} \pm 0,\ m)$ (см. (2.3)). Тогда

$$e(\vartheta - 0, x_*; \Delta_k) = \mu^{[N]}(D^{[N]}(x_* - g^{[N]})) = \gamma(x[\vartheta[\vartheta]\vartheta])$$

Теорема. Для любого числа $\xi > 0$ найдется число $\delta(\xi) > 0$, такое, что, каковы бы ни были исходная позиция $\{t_*,\ x_*\} \in K$ и разбиение Δ_k отрезка времени $[t_*,\ \vartheta]$ с шагом $\delta_k = \max_{j=1,\ldots,k}(\tau_{j+1} - \tau_j) \leqslant \delta(\xi)$, будет выполнено неравенство

$$|\rho(t_*, x_*) - e(t_* - 0,\ x_*; \Delta_k)| \leqslant \xi$$

где $\rho(t_*,\ x_*)$ – цена дифференциальной игры для системы (1.1), (1.2) при показателе качества γ из (1.3), (1.5), а $e(t_* - 0,\ x_*;\ \Delta_k)$ – величина (2.9).

Итак, описанная процедура (2.1)–(2.9) вычисления величины $e(t_* - 0,\ x_*;\ \Delta_k)$ на базе функций $\varphi_j(t_*,\ \tau_j \pm 0,\ m)$, $m \in G_j(t_*,\ \tau_j \pm 0)$ (j = 1,..., k + 1) приводит к цене рассматриваемой дифференциальной игры. При этом так же как и в частных случаях ([8], с. 117, 129; [10]), управляющие воздействия $u^\circ(t_j, x[t_j], \varepsilon)$ в (1.6) и $v^\circ(t_j, x[t_j], \varepsilon)$ в (1.7) можно эффективно формировать как экстремальные к величине $e(t_j - 0, \cdot)$ (2.9). Подчеркнем, что независимо от числа N моментов времени $t^{[i]}$ из (1.3) в ходе данных построений вспомогательные функции $\psi_j(t_*,\ m)$ определяются и овыпукляются в областях $G_j(t_*,\ \tau_j + 0)$, размерность которых не превосходит размерности фазового вектора исходной системы.

3. Обоснование результата. Следующие две леммы устанавливают нужные свойства величин $e(t_* \pm 0,\ x_*;\ \Delta_k)$.

Лемма 1. Каковы бы ни были позиция $\{t_*,\ x_*\} \in K$, $t_* < \vartheta$ и разбиение Δ_k (2.1) отрезка времени $[t_*,\ \vartheta]$, имеем

$$e(t_* - 0, x_*; \Delta_k) = \begin{cases} e(t_* + 0, x_*; \Delta_k), & t_* < t^{[h]} \\ \sigma^{[h]}(D^{[h]}(x_* - g^{[h]}),\ e(t_* + 0, x_*; \Delta_k)), & t_* = t^{[h]} \end{cases}$$

Здесь $h = h(t_*)$ из (1.4).

Доказательство. В случае $t_* < t^{[h]}$ утверждение леммы 1 вытекает из (2.5) (при j = 1) и (2.9), если учесть, что $\tau_1 = t_*$.

Пусть $t_* = t^{[h]}$. В этом случае области $G_1(t_*,\ \tau_1 \pm 0)$ связаны соотношением (2.6), а функции $\varphi_1(t_*,\ \tau_1 \pm 0,\ m)$ – равенством (2.7).

Согласно (2.9) существует вектор $m_*^0 \in G_1(t_*,\ \tau_1 + 0)$, для которого

$$e(t_* + 0, x_*; \Delta_k) = \alpha_1^+(t_*, x_*, m_*^0) \tag{3.1}$$

Напомним, что функция $\sigma^{[h]}(y^{[h]}, \beta)$ четна по β, поэтому функция $\sigma^{[h]*}(l, \nu)$ будет четной по ν. Кроме того, в силу (2.8) $e(t_* + 0, x_*; \Delta_k) \geqslant 0$. Отсюда вытекает, что найдутся $p^{[h]}$-мерный вектор l^0 и число $\nu^0 \geqslant 0, \sigma^{[h]*}(l^0, \nu^0) \leqslant 1$, такие, что будут выполнены равенства

$$\sigma^{[h]}(D^{[h]}(x_* - g^{[h]}), \ e(t_* + 0, x_*; \Delta_k)) =$$

$$= \max_{\sigma^{[h]*}(l,\nu)\leqslant 1} [\langle l, D^{[h]}(x_* - g^{[h]})\rangle + \nu e(t_* + 0, x_*; \Delta_k)] = \langle l^0, D^{[h]}(x_* - g^{[h]})\rangle + \nu^0 e(t_* + 0, x_*; \Delta_k) \tag{3.2}$$

Определим вектор

$$m^0 = \nu^0 m_*^0 + X^T(t_*, \vartheta) D^{[h]T} l^0 \tag{3.3}$$

Из (2.6) и (3.3) следует, что $m^0 \in G_1(t_*, \ \tau_1 - 0)$, при этом из (2.7) вытекает, что $\varphi_1(t_*, \ \tau_1 - 0, \ m^0) \geqslant \nu^0 \varphi_1(t_*, \ \tau_1 + 0, \ m_*^0) - \langle l^0, \ D^{[h]} g^{[h]}\rangle$.

Таким образом, в согласии с (2.9) и учитывая (3.1)–(3.3), получаем

$$e(t_* - 0, x_*; \Delta_k) \geqslant \alpha_1^-(t_*, x_*, m^0) \geqslant \langle l^0, D^{[h]}(x_* - g^{[h]})\rangle + \nu^0 \alpha_1^+(t_*, x_*, m_*^0) =$$

$$= \sigma^{[h]}(D^{[h]}(x_* - g^{[h]}), \quad e(t_* + 0, x_*; \Delta_k)) \tag{3.4}$$

С другой стороны, в рассматриваемом случае, согласно построениям (2.6) и (2.7) (при $j = 1$) для каждого вектора $m \in G_1(t_*, \ \tau_1 - 0)$ найдется по крайней мере одна тройка $\{\nu, \ m_*, \ l\}(m) = \{\nu(m), \ m_*(m), \ l(m)\}$, такая, что будут выполнены соотношения

$$\begin{gathered} \nu(m) \geqslant 0, \quad m_*(m) \in G_1(t_*, \tau_1 + 0), \quad \sigma^{[h]*}(l(m), \nu(m)) \leqslant 1 \\ \nu(m) m_*(m) + X^T(t_*, \vartheta) D^{[h]T} l(m) = m \\ \varphi_1(t_*, \tau_1 - 0, m) = \nu(m) \varphi_1(t_*, \tau_1 + 0, m_*(m)) - \langle l(m), D^{[h]} g^{[h]}\rangle \end{gathered} \tag{3.5}$$

В свою очередь в соответствии с (2.9) существует вектор $m_0 \in G_1(t_*, \ \tau_1 - 0)$, для которого справедливо равенство

$$e(t_* - 0, x_*; \Delta_k) = \alpha_1^-(t_*, x_*, m_0) \tag{3.6}$$

Пусть $\{\nu_0, \ m_{*0}, \ l_0\} = \{\nu, \ m_*, \ l\}(m_0)$ – тройка из (3.5), отвечающая этому вектору m_0. Тогда справедливо неравенство

$$e(t_* + 0, x_*; \Delta_k) \geqslant \alpha_1^+(t_*, x_*, m_{*0}) \tag{3.7}$$

Теперь, из (3.6), при учете (2.9), (3.5) (для $m = m_0$) и (3.7), выводим

$$e(t_* - 0, x_*; \Delta_k) = \nu_0 \alpha_1^+(t_*, x_*, m_{*0}) + \langle l_0, D^{[h]}(x_* - g^{[h]})\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \langle l_0, D^{[h]}(x_* - g^{[h]})\rangle + \nu_0 e(t_* + 0, x_*; \Delta_k) \leqslant \sigma^{[h]}(D^{[h]}(x_* - g^{[h]}), \quad e(t_* + 0, x_*; \Delta_k)) \tag{3.8}$$

Соотношения (3.4) и (3.8) доказывают утверждение леммы 1 для случая $t_* = t^{[h]}$, где $h = h(t_*)$.

Лемма 2 (u- и v-стабильность). Пусть реализовалась позиция $\{t_*, \ x_*\} \in K, \ t_* < \vartheta$ и выбрано разбиение Δ_k (2.1) отрезка времени $[t_*, \ \vartheta]$. Тогда, для любой реализации помехи

$$v_*[t_*[\cdot]t^*) = \{v_*[t] = v_* \in Q, \ t_* \leqslant t < t^*\} \tag{3.9}$$

в случае u-стабильности (управления

$$u_*[t_*[\cdot]t^*) = \{u_*[t] = u_* \in P, \ t_* \leqslant t < t^*\} \tag{3.10}$$

в случае v-стабильности), где $t^* = \tau_2$ – вторая точка разбиения Δ_k, найдется такая допустимая реализация управления $u[t_*[\cdot]t^*) = \{u[t] \in P,\ t_* \leqslant t < t^*\}$ (помехи $v\,[t_*[\cdot]t^*) = \{v\,[t] \in Q,\ t_* \leqslant t < t^*\}$), что из позиции $\{t_*,\ x_*\}$ под действием этих реализаций $u[t_*[\cdot]t^*)$ и $v_*[t_*[\cdot]t^*)$ ($u_*[t_*[\cdot]t^*)$ и $v\,[t_*[\cdot]t^*)$) система (1.1) придет в позицию $\{t^*,\ x^* = x[t^*]\} \in K$, для которой будет выполнено неравенство

$$e(t_* + 0, x_*; \Delta_k) \geqslant e(t^* - 0, x^*; \Delta^*_{k^*}) \tag{3.11}$$

в случае u-стабильности (неравенство

$$e(t_* + 0, x_*; \Delta_k) \leqslant e(t^* - 0, x^*; \Delta^*_{k^*}) \tag{3.12}$$

в случае v-стабильности).

Здесь $\Delta^*_{k^*} = \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_j\}$ – разбиение отрезка времени $[t^*,\ \vartheta]$, порожденное точками разбиения Δ_k так, что $\tau^*_j = \tau_{j+1},\ \ \tau_{j+1} \in \Delta_k,\ \ j = 1,\ldots,k^*+1,\ \ k^* = k-1$.

Доказательство u-стабильности. Пусть $W = W(t^*;\ t_*,\ x_*,\ v_*)$ – область достижимости (по всем допустимым реализациям $u[t_*[\cdot]t^*)$) системы (1.1) к моменту t^* из позиции $\{t_*,\ x_*\}$ при заданной реализации $v_*[t_*[\cdot]t^*)$ (3.9). Требуется установить, что существует вектор $x^* \in W$, который удовлетворяет неравенству (3.11).

Используя формулу Коши для решений уравнения (1.1) (при подстановке $u[t] \to u$ и $v_* \to v$), получаем

$$W = \left\{ w:\ w = X(t^*, t_*)x_* + \int_{t_*}^{t^*} X(t^*, \tau) f(\tau, u[\tau], v_*)d\tau,\ \{u[\tau] \in P,\ t_* \leqslant \tau < t^*\} \right\} \tag{3.13}$$

Из известных фактов теории интегрирования многозначных отображений (см. например [12], с. 349) вытекает, что множество W непусто, выпукло и компактно в R^n.

Заметим далее, что в силу принятых обозначений и связи разбиений $\Delta_k\{\tau_j\}$ и $\Delta^*_{k^*}\{\tau^*_j\}$ по построению (2.4) имеют место тождества

$$G_1(t^*, \tau^*_1 - 0) = G_2(t_*, \tau_2 - 0) = G_1(t_*, \tau_1 + 0) \tag{3.14}$$

$$\varphi_1(t^*, \tau^*_1 - 0, m) \equiv \varphi_2(t_*, \tau_2 - 0, m)$$

Рассмотрим функцию $\alpha^-_1(t^*,\ w,\ m)$, $w \in W$, $m \in G_1(t_*,\ \tau_1 + 0)$, определенную на базе разбиения $\Delta^*_{k^*}$ вторым равенством (2.9). Она является ограниченной, вогнутой и полунепрерывной сверху по m при каждом фиксированном w и выпуклой, непрерывной по w при каждом фиксированном m. Следовательно (см. например [13], с. 31), существует седловая точка $\{w^0 \in W,\ m^0 \in G_1(t_*,\ \tau_1 + 0)\}$, для которой выполнены соотношения

$$\alpha^-_1(t^*, w^0, m^0) = \max_{m \in G_1(t_*, \tau_1 + 0)} \alpha^-_1(t^*, w^0, m) \tag{3.15}$$

$$\langle m^0, X(\vartheta, t^*)w^0 \rangle = \min_{w \in W} \langle m^0, X(\vartheta, t^*)w \rangle \tag{3.16}$$

Покажем, что для вектора $x^* = w^0 \in W$ выполняется нужное неравенство (3.11). Пусть $u^0[t_*[\cdot]t^*)$ – реализация управления, которая согласно (3.13) отвечает вектору w^0. Тогда из (3.16), в силу (3.13), если учесть, что здесь, опираясь на теорему об измеримом выборе

([14], с. 26), операцию минимума можно внести под знак интеграла, вытекает равенство

$$\int_{t_*}^{t^*} \langle m^0, X(\vartheta,\tau)f(\tau,u^0[\tau],v_*)\rangle d\tau = \int_{t_*}^{t^*} \min_{u\in P}\langle m^0, X(\vartheta,\tau)f(\tau,u,v_*)\rangle d\tau \tag{3.17}$$

Далее согласно (2.9) при учете (3.14) и (3.15) выводим

$$e(t^*-0,w^0;\Delta^*_{k^*}) = \alpha_2^-(t_*,x_*,m^0) + \int_{t_*}^{t^*} \langle m^0, X(\vartheta,\tau)f(\tau,u^0[\tau],v_*)\rangle d\tau \tag{3.18}$$

С другой стороны, поскольку $m^0 \in G_1(t_*,\ \tau_1+0)$, то в соответствии с (2.9), учитывая при этом (2.4) (при j = 1) и свойство мажорантности оболочки $\varphi_1(t_*,\ \tau_1+0,\ m)$ для функции $\psi_1(t_*,\ m)$, имеем

$$e(t_*+0,x_*;\Delta_k) \geqslant \alpha_2^-(t_*,x_*,m^0) + \Delta\psi_1(t_*,m^0) \tag{3.19}$$

Теперь, если учесть (2.2), заключаем, что разность левых частей соотношений (3.18) и (3.19) не превышает разности левой и правой частей равенства (3.17). Это доказывает для $x^* = w^0 \in W$ неравенство (3.11), а вместе с ним и свойство u-стабильности.

Доказательство v-стабильности. Из (2.9), опираясь на теорему Каратеодори ([15], с. 171) для выпуклой сверху оболочки $\varphi_1(t_*,\ \tau_1+0,\ m)$ функции $\psi_1(t_*,\ m)$ (см. (2.4) при j = 1), выводим, что существует вектор $m_0 \in G_1(t_*,\ \tau_1+0)$, для которого справедливы равенства

$$e(t_*+0,x_*;\Delta_k) = \alpha_1^+(t_*,x_*,m_0) = \alpha_2^-(t_*,x_*,m_0) + \Delta\psi_1(t_*,m_0) \tag{3.20}$$

Выбирем реализацию помехи $v[t_*[\cdot]t^*)$ из условия

$$\langle m_0, X(\vartheta,t)f(t,u_*,v[t])\rangle = \max_{v\in Q}\langle m_0, X(\vartheta,t)f(t,u_*,v)\rangle \tag{3.21}$$

$$t_* \leqslant t < t^*$$

По теореме об измеримом выборе ([14], с. 26) такая допустимая реализация $v[t_*[\cdot]t^*)$ существует для всякого фиксированного $u_* \in P$.

Под действием реализаций $u_*[t_*[\cdot]t^*)$ (3.10) и $v[t_*[\cdot]t^*)$ (3.21) система (1.1) из позиции $\{t_*,\ x_*\}$ перейдет в позицию $\{t^*,\ x^* = x[t^*]\} \in K$, для которой в соответствии с (2.9), учитывая тождества (3.14) и используя формулу Коши, получаем

$$e(t^*-0,x^*;\Delta^*_{k^*}) \geqslant \alpha_1^-(t^*,x^*,m_0) = \alpha_2^-(t_*,x_*,m_0) + \int_{t_*}^{t^*} \langle m_0, X(\vartheta,t)f(t,u_*,v[t])\rangle dt \tag{3.22}$$

Из (3.20) и (3.22), если учесть (1.2), (2.2) и (3.21), вытекает неравенство (3.12). Лемма 2 доказана.

Теперь, для того чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно, выбрав должным образом число $\varepsilon > 0$ и разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ (2.1), рассмотреть эволюцию величин $e(\tau_j-0,\ x[\tau_j];\ \Delta^{(j)}_{k(j)})$ (j = 1,..., k + 1), где $\Delta^{(j)}_{k(j)} = \Delta^{(j)}_{k(j)}\{\tau_i^{(j)}\} = \{\tau_i^{(j)} = \tau_{i+j-1} \in \Delta_k,$ $i = 1,\ldots,k^{(j)}+1,\ k^{(j)} = k-j+1\}$, с одной стороны, вдоль движения системы (1.1), реализующегося в случае, когда второй игрок руководствуется законом формирования помехи $V^\circ = \{v^\circ(\cdot),\ \varepsilon,\ \Delta_k\{\tau_j\}\}$ (см. (1.7)), а первый игрок на каждом шаге, опираясь на информацию о реализовавшейся позиции $\{\tau_j, x[\tau_j]\}$ и назначенной реализации помехи $v^\circ[t] = v^\circ(\tau_j,\ x[\tau_j],\ \varepsilon)$, $\tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}$, подбирает реализацию управления $u[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$ в соответствии с леммой 2 (u-стабильность); и с другой стороны, вдоль движения, реализующегося в случае, когда первый игрок избрал закон управления $U^\circ = \{u^\circ(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\{\tau_j\}\}$ (см. (1.6)), а второй игрок назначает воздействия помехи $v[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$ в соответствии с леммой 2 (v-стабильность). При этом следует учесть равенства, установленные в лемме 1, свойство неубывания по β функций $\sigma^{[i]}(y^{[i]}, \beta)$ ($i = 1,\ldots, N-1$) и соотношения (1.5).

Автор благодарит Н.Н. Красовского за советы и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00160).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. *Friedman A.* Differential Games. N.Y.: Wiley, 1971. 350 p.
3. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
5. *Osipov Ju.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problem of ordinary differential equations: Dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
6. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
7. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
8. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under lack of information. Boston: Birkhauser, 1995. 322 p.
9. *Красовский А.Н.* О позиционном минимаксном управлении // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 4. С. 602–610.
10. *Красовский А.Н.* Управление на минимакс интегрального функционала // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 4. С. 785–788.
11. *Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.* Задача конфликтного управления с наследственной информацией // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 885–900.
12. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
13. *Фань Цзи.* Теоремы о минимаксе // Бесконечные антагонистические игры / Под ред. Н.Н. Воробьева. М.: Физматгиз, 1963. С. 31–39.
14. *Аркин В.И., Левин В.Л.* Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. № 3. С. 21–77.
15. *Рокафеллар Р.Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
28.VIII.1997