УДК 62–50

© 1998 г. **Х.Г. Гусейнов, А.Н. Моисеев, В.Н. Ушаков**

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача о построении областей достижимости (ОД) нелинейной управляемой системы, функционирующей на конечном промежутке времени. Предлагается метод приближенного построения ОД, основанный на разбиении фазового пространства системы на ε-решетку. Получены оценки точности приближенных вычислений ОД. Приведен пример.

В многочисленных исследованиях, посвященных этой задаче, представлены различные подходы к ее решению. Большая группа исследований [1–5] посвящена оценке ОД управляемых систем и дифференциальных включений (ДВ) эллипсоидами или наборами эллипсоидов в пространстве R^n. Получены оценки ОД [6, 7]. Изучался вопрос о приближенном вычислении ОД в виде многогранников в фазовом пространстве R^m [8]. Отметим также работы [9, 10] по численным методам построения ОД линейных управляемых систем.

Данная работа близка к работам [11, 12], основанным на введении в пространстве позиций прямоугольной решетки и аппроксимации ОД множествами, состоящими из узлов решетки. К этому направлению примыкают также работы [13–15]. Более поздние исследования [16], посвященные приближенному вычислению ОД, проведены для автономных ДВ. Исследовались и другие свойства ОД [17–24].

1. Пусть дана управляемая система, поведение которой описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t,\ x,\ u),\quad u \in P,\quad t \in I,\quad I = [t_0,\ \vartheta],\quad t_0 < \vartheta < \infty \tag{1.1}$$

Здесь x–m-мерный вектор системы, u – управление, P – компакт в евклидовом пространстве R^n.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1°. Вектор-функция $f(t, x, u)$ непрерывна по совокупности переменных t, x, u в области $I \times R^m \times P$, а также для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset I \times R^m$ существует такая постоянная $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t,\ x^*,\ u) - f(t,\ x_*,\ u)\| \le L\|x^* - x_*\|,\quad (t,\ x^*) \text{ и } (t,\ x_*) \text{ из } D,\ u \in P$$

2°. Существует такая постоянная $\mu \in [0, \infty)$, что

$$\|f(t,\ x,\ u)\| \le \mu(1 + \|x\|),\quad (t,\ x,\ u) \in D \times P$$

Под допустимым управлением $u(t)$, $t \in I$ будем понимать любую измеримую по Лебегу функцию, удовлетворяющую включению $u(t) \in P$, $t \in I$.

Решением уравнения (1.1), порожденным допустимым управлением $u(t)$, назовем абсолютно-непрерывную вектор-функцию $x[t]$, $t \in I$, такую, что $\dot{x}[t] = f(t, x[t], u(t))$ почти всюду на I.

Символом $Y(t^*;\ t_*,\ x_*)$, $t_0 \le t_* < t^* \le \vartheta$ обозначим множество всех $x^* \in R^m$, в которые приходят в момент t^* решения $x[t]$, $x[t_*] = x_*$ уравнения (1.1), порожденные всевозможными допустимыми управлениями $u(t)$; $Y(t^*;\ t_*, x_*)$ называется областью достижимости (ОД) системы (1.1) с начальным условием $x[t_*] = x_*$, отвечающей моменту t^*. Полагаем также

$$Y(t^*;\ t_*, Y_*) = \bigcup_{x_* \in Y_*} Y(t^*;\ t_*,\ x_*)$$

(Y_* – множество из R^m).

Поставим в соответствие уравнению (1.1) дифференциальное включение (ДВ)

$$\dot{x} \in F(t, x),\ t \in I,\ F(t, x) = \mathrm{co}\{f(t, x, u) : u \in P\} \tag{1.2}$$

где $\mathrm{co}\{\bullet\}$ – означает замкнутую выпуклую оболочку.

Решением ДВ (1.2) назовем абсолютно-непрерывную вектор-функцию $x[t]$, $t \in I$, удовлетворяющую ДВ (1.2) почти всюду на I.

Полагаем $X_*^* = X(t^*;\ t_*,\ X_*)$, $t_0 \le t_* < t^* \le \vartheta$ – множество всех $x^* \in R^m$, в которые приходят в момент t^* всевозможные решения $x[t], x[t_*] = x_* \in X_*$, ДВ (1.2). Справедливо равенство

$$X_*^* = \mathrm{cl} Y(t^*;\ t_*,\ X_*),\ t_0 \le t_* < t^* \le \vartheta, \quad X_* \subset R^m$$

($\mathrm{cl} X$ – замыкание множества X).

Итак, рассмотрим задачу вычисления множества $X_0^* = X(t^*;\ t_0,\ X_0)$, $t^* \in I$, $X_0 \subset R^m$, часто возникающую в теории и приложениях. В общем случае это множество точно вычислить невозможно, поэтому рассмотрим задачу его приближенного вычисления.

Правая часть $F(t, x)$ ДВ (1.2) зависит, вообще говоря, от t и удовлетворяет условию Липшица

$$d(F(t,\ x),\ F(t,\ y)) \le L\|x - y\|,\ (t,\ x),\ (t,\ y) \text{ из } D,\ L = L(D) \in [0,\ \infty)$$

где $D \subset I \times R^m$ – любая ограниченная, замкнутая область.

Отметим, что в силу предположения 2° и при условии ограниченности X_0 множества X_0^*, $t^* \in I$, равноограничены. Нетрудно указать, воспользовавшись неравенством Гронуолла (см. например [25]), такой цилиндр $D = I \times G$ в пространстве позиций $(t,\ x)$, что $X_0^* + \varepsilon^* B \subset G$, $t^* \in I$ (здесь G – замкнутый шар в R^m, $B = \{x \in R^m : \|x\| \le 1\}$, $\varepsilon^* > 0$), где обозначено $X + Y = \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}$ $\alpha X = \{\alpha x : x \in X\}$.

Исходя из этого замечания будем считать, что все построения осуществляются в цилиндре D и, следовательно, для всех (t, x), которые рассматриваются в ходе этих построений, правые части $F(t, x)$ ДВ (1.2) равноограничены (т.е. $\|f\| \le K$ для всех $f \in F(t, x)$, $(t, x) \in D$, где K – некоторое конечное положительное число).

Итак, предлагаемый подход основан на введении некоторого конечного разбиения Γ отрезка I, подмене фазового пространства R^m некоторой фиксированной ε – решеткой N_ε и аппроксимации ОД X_0^*, $t^* \in I$, некоторыми конечными подмножествами решетки N_ε. Вычисление ОД X_0^*, $t^* \in I$ ДВ (1.2) сводится к некоторой процедуре вычисления их дискретных приближений, состоящих из конечных подмножеств решетки N_ε.

2. Введем множество $\tilde{X}_1 = \tilde{X}(t_1;\ t_0,\ X_0)$ – аппроксимацию ОД $X_1 = X(t_1;\ t_0, X_0)$, отвечающую ДВ $\dot{x}(t) \in F(t_0, x_0)$, и установим степень близости между множествами X_1 и $\tilde{X}_1$.

Пусть Γ – разбиение отрезка I моментами времени $t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N = \vartheta$, где $\Delta_i = t_{i+1} -$

$- t_i = \mathrm{const} > 0$. Полагаем также

$$X_{i+1} = X(t_{i+1};\ t_i, X_i), \quad i = 0,1,\dots,N-1 \tag{2.1}$$

откуда следует $X_N = X(\vartheta;\ t_0, X_0)$.

Таким образом, ОД ДВ (1.2) X_N можно было бы вычислить точно по рекуррентным формулам (2.1), если бы умели вычислять точно промежуточные ОД X_{i+1} (2.1). Однако их точно вычислять не умеем. Воспользуемся рекуррентными соотношениями (2.1) для приближенных вычислений множества X_N.

Первый этап приближенных вычислений соответствует начальному промежутку $I_1 = [t_0, t_1]$ разбиения Г.

Пусть $x[t_0] = x_0$ – произвольная точка из ограниченного множества X_0 в R^m. Введем в рассмотрение множество $\tilde{X}_1^0 = \tilde{X}(t_1;\ t_0,\ x[t_0]) = x[t_0] + \Delta_0 F_0$, где $F_0 = F(t_0, x[t_0])$. Множество $\tilde{X}_1^0$ – ОД ДВ

$$\dot{x}(t) \in F_0, \quad x[t_0] = x_0 \tag{2.2}$$

$\tilde{X}_1^0$ – некоторая аппроксимирующая ОД $X_1^0 = X(t_1;\ t_0,\ x[t_0])$ ДВ (1.2), которая вычисляется проще, чем X_1^0.

Установим, что хаусдорфово расстояние $d(X_1^0,\ \tilde{X}_1^0)$ имеет более высокий порядок малости, чем первый, относительно приращения $\Delta_0 = t_1 - t_0 > 0$. Справедливо неравенство

$$d(X_1^0,\ \tilde{X}_1^0) \le \omega(\Delta_0), \quad \omega(\Delta) = \Delta\omega^*((1+K)\Delta), \quad \Delta > 0 \tag{2.3}$$

Здесь $\omega^*(\delta)$ – некоторая положительная функция переменной $\delta > 0$, стремящаяся к 0 при $\delta \to 0$; величина K введена в разд. 1.; $\omega^*(\delta)$ и K не зависят от выбора t_0, t_1, $x[t_0]$.

Докажем неравенство.

Пусть $x^{(1)} \in X_1^0$. Тогда существует такое решение $x[t]$, $t \in I_1$, ДВ (1.2) с начальным значением $x[t_0]$, что $x[t_1] = x^{(1)}$. Для него справедливо представление

$$x[t] = x[t_0] + \int_{t_0}^{t} f[\tau]d\tau, \quad f[\tau] \in F(\tau,\ x[\tau]) \text{ почти всюду на } I_1 \tag{2.4}$$

В силу условия 1° существует такая функция $\omega^*(\delta)(\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0)$, что

$$d(F(t_*,\ x_*),\ F(t^*,\ x^*)) \le \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|), \ d(F(t,\ x_*),\ F(t,\ x^*)) \le L\|x_* - x^*\| \tag{2.5}$$

$(t_*,\ x_*)$, $(t^*,\ x^*)$ из D, $t \in I_1$

Из (2.4) и (2.5) следует

$$d(F(t,\ x[t]),\ F_0) \le \omega^*(\Delta_0 + \|x[t] - x[t_0]\|) \le \omega^*((1+K)\Delta_0) \tag{2.6}$$

Из (2.4) и (2.6) следует включение $f[t] \in F_0 + \omega^*((1+K)\Delta_0)B$ при почти всех $t \in I_1$. Следовательно, справедливо включение

$$\frac{1}{\Delta_0}\int_{t_0}^{t_1} f[\tau]d\tau \in F_0 + \omega^*((1+K)\Delta_0)B \tag{2.7}$$

Из включения (2.7) вытекает, что

$$x[t_1] = x[t_0] + \int_{t_0}^{t_1} f[\tau]d\tau \in x[t_0] + \Delta_0(F_0 + \omega^*((1+K)\Delta_0)B) = \tilde{X}_1^0 + \omega(\Delta_0)B$$

$$\omega(\delta) = \delta\omega^*((1+K)\delta), \quad \delta \in (0,\ \infty)$$

Отсюда получаем

$$X_1^0 \subset \tilde{X}_1^0 + \omega(\Delta_0)B \tag{2.8}$$

Далее докажем включение

$$\tilde{X}_1^0 \subset X_1^0 + \omega(\Delta_0)B \tag{2.9}$$

Пусть $x^{(1)} \in \tilde{X}_1^0$. Справедливо равенство $x^{(1)} = x[t_0] + \Delta f^{(1)}$, $f^{(1)} \in F_0$. Наряду с движением $x^{(1)}[t] = x[t_0] + (t - t_0)f^{(1)}$, $t \in I_1$, ДВ $\dot{x}[t] \in F_0$ с начальным значением $x[t_0]$, рассмотрим ломаную Эйлера $\tilde{x}^{(k)}[t]$, $t \in I_1$, определяемую соотношениями $\tilde{x}^{(k)}[t_{j+1}^{(k)}] = \tilde{x}^{(k)}[t_j^{(k)}] + \Delta_j^{(k)} f_j^{(k)}$, где $t_j^{(k)}$, $t_{j+1}^{(k)}$ – моменты разбиения $\Gamma_k = \{t_0^{(k)} = t_0,\ t_1^{(k)}, \ldots,\ t_{N(k)-1}^{(k)},\ t_{N(k)}^{(k)} = t_1\}$; $\Delta_j^{(k)} = t_{j+1}^{(k)} - t_j^{(k)} = \mathrm{const}$, $f_j^{(k)} \in F(t_j^{(k)},\ \tilde{x}^{(k)}[t_j^{(k)}]) = F_j^k$ – ближайший вектор во множестве F_j^k к вектору $f^{(1)}$; $\tilde{x}^{(k)}[t_0^{(k)}] = x[t_0]$.

Для ломаной Эйлера $\tilde{x}^{(k)}[t]$, $t \in I_1$ справедливо неравенство $\left\| \tilde{x}^{(k)}[t] - x[t_0] \right\| \le K\Delta_0$ и значит $d(F(t,\ \tilde{x}^{(k)}[t]),\ F_0) \le \omega^*((1+K)\Delta_0)$, $t \in I_1$.

Поскольку $f^{(1)} \in F_0$, то $f^{(1)} \in F(t,\ \tilde{x}^{(k)}[t]) + \omega^*((1+K)\Delta_0)B$, $t \in I_1$. В частности, для $f^{(1)}$ в узловых точках разбиения Γ_k выполняется включение

$$f^{(1)} \in F_j^{(k)} + \omega^*((1+K)\Delta_0)B \tag{2.10}$$

Таким образом, принимая во внимание (2.10), получаем оценку сверху $\left\| x^{(1)}[t_{j+1}^{(k)}] - \tilde{x}^{(k)}[t_{j+1}^{(k)}] \right\| \le \left\| x^{(1)}[t_j^{(k)}] - \tilde{x}^{(k)}[t_j^{(k)}] \right\| + \Delta_j^{(k)} \omega^*((1+K)\Delta_0)$, $j = 0,\ 1, \ldots,\ N(k)-1$

Учитывая эти $N(k)$ неравенств, имеем $\left\| x^{(1)}[t_{N(k)}^{(k)}] - \tilde{x}[t_{N(k)}^{(k)}] \right\| \le \Delta_0^{(k)} \omega^*((1+K)\Delta_0) + {}$ $+ \Delta_1^{(k)} \omega^*((1+K)\Delta_0) + \ldots + \Delta_{N(k)-1}^{(k)} \omega^*((1+K)\Delta_0)$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$\left\| x^{(1)}[t_1] - \tilde{x}^{(k)}[t_1] \right\| \le \omega(\Delta_0) \tag{2.11}$$

Неравенство (2.11) справедливо для всех ломаных $\tilde{x}^{(k)}[t]$, $t \in I_1$, построенных указанным способом.

Выделив из последовательности $\tilde{x}^{(k)}[t]$, $t \in I_1 (k = 1,\ 2, \ldots)$ равномерно сходящуюся подпоследовательность $\tilde{x}^{(n)}[t]$, $t \in I_1 (n = 1,\ 2, \ldots)$, получаем, что вектор-функция $x[t] = \lim\limits_{n \to \infty} \tilde{x}^{(n)}[t]$, $t \in I_1$, удовлетворяет соотношениям $\dot{x}[t] \in F(t,\ x[t])$, $t \in I_1$. Тем самым установлено включение $x^{(1)} = x^{(1)}[t_1] \in X_1^0 + \omega(\Delta_0)B$ и значит выполняется (2.9). Из (2.8) и (2.9) следует (2.3).

ОД X_1 и $\tilde{X}_1$ представимы в виде

$$X_1 = \bigcup_{x[t_0] \in X_0} X(t_1,\ t_0,\ x[t_0]),\quad \tilde{X}_1 = \bigcup_{x[t_0] \in X_0} \tilde{X}(t_1,\ t_0,\ x[t_0]) \tag{2.12}$$

Из соотношений (2.3) и (2.12) вытекает

$$d(X_1,\ \tilde{X}_1) \le \omega(\Delta_0) \tag{2.13}$$

ОД $\tilde{X}_1$ несколько проще с точки зрения вычислений, чем X_1, так как она представима в виде объединения выпуклых множеств $\tilde{X}(t_1,\ t_0,\ x_0)$, $x_0 \in X_0$.

3. Опишем аппроксимационную схему вычисления ОД системы (1.1).

Разобьем пространство R^m на m-мерные кубы Φ_j с центрами $x_j^0 = x_j[t_0]$ и вершинами, отстоящими от центров на величину $\varepsilon > 0$. Это бесконечное множество центров x_j^0 называем решеткой в R^m и обозначаем N_ε.

Далее, выделим все кубы Φ_j, для которых $\Phi_j \cap X_0 \neq \varnothing$. Пусть это кубы Φ_j ($j = 1,2, \ldots, J_0$). Рассмотрим центры $x_j^0 (j = 1, 2, \ldots, J_0)$, этих кубов. Так как множество X_0 ограничено, то число J_0 конечно.

Полагаем $X_0^\varepsilon = \{x_j^0 : j = 1, 2, \ldots, J_0\}$. По построению множества X_0^ε имеет место оценка $d(X_0, X_0^\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Зададим $\delta > 0$ и для множества F_0 определим с помощью некоторого правила конечную δ-сеть $F_0^\delta = F^\delta(t_0, x[t_0]) = \{f_k^\delta \in F_0 : k = 1, 2, \ldots, K_0\}$, удовлетворяющую неравенству $d(F_0, F_0^\delta) \leq \delta$.

В результате таких заданий имеем дискретные конечные аппроксимации X_0^ε и F_0^δ множеств X_0 и F_0.

Теперь рассмотрим множество $\tilde{X}_1$. Пусть $x[t_1]$ – произвольная точка из $\tilde{X}_1$. Эта точка представима в виде $x[t_1] = x[t_0] + \Delta_0 f$, $x[t_0] \in X_0$, $f \in F_0$.

Найдем приближение точки $x[t_1]$ в дискретной схеме. В связи с этим для точки $x[t_0]$ найдем точку $x_j^0 \in X_0^\varepsilon$, отстоящую от $x[t_1]$ не более чем на ε:

$$x_j^0 \in X_0^\varepsilon, \left\| x_j^0 - x[t_0] \right\| \leq \varepsilon$$

Далее для вектора $f \in F_0$ найдется вектор $f_j^* \in F(t_0, x_j^0)$, удовлетворяющий неравенству

$$\left\| f - f_j^* \right\| \leq d(F_0, F(t_0, x_j^0)) \leq L \left\| x[t_0] - x_j^0 \right\| \leq L\varepsilon \tag{3.1}$$

поскольку $x \mapsto F(t, x)$ – непрерывная по Липшицу многозначная функция с константой $L = L(D)$. Для вектора $f_j^* \in F(t_0, x_j^0)$ найдется такой вектор $f_j^k \in F^\delta(t_0, x_j^0)$, что $\left\| f_j^* - f_j^k \right\| \leq \delta$.

Таким образом, для вектора $f \in F_0$ найдется такой вектор $f_j^k \in F^\delta(t_0, x_j^0)$, что точки $\tilde{x}[t_1] = x[t_0] + \Delta_0 f$ и $x^*[t_1] = x_j^0 + \Delta_0 f_j^k$ отличаются друг от друга на величину

$$\left\| (x[t_0] + \Delta_0 f) - (x_j^0 + \Delta_0 f_j^k) \right\| \leq \varepsilon + (L\varepsilon + \delta)\Delta_0 \tag{3.2}$$

Введем обозначение $\xi_m = \exp(2L\Delta_m)$. Положив $\delta = L\varepsilon$, получаем, что неравенство (3.2) переходит в неравенство

$$\left\| \tilde{x}[t_1] - x^*[t_1] \right\| \leq \varepsilon(1 + 2L\Delta_0) \leq \xi_0 \varepsilon \tag{3.3}$$

Итак, окончательно получаем, что для любой точки $\tilde{x}[t_1] \in \tilde{X}_1$ найдется точка $x^*[t_1] = x_j^0 + \Delta_0 f_j^k$, $x_j^0 \in X_0^\varepsilon$, $f_j^k \in F^\delta(t_0, x_j^0)$, удовлетворяющая неравенству (3.3).

Множество всех таких точек при $j = 1, 2, \ldots, J_0$, $k = 1, 2, \ldots$ ..., K_0^j обозначим $X_1^* = X^*(t_1, t_0, X_0^\varepsilon)$.

Таким образом, получаем, что хаусдорфово отклонение множества $\tilde{X}_1$ от множества X_1^* удовлетворяет неравенству $h(\tilde{X}_1, X_1^*) \leq \xi_0 \varepsilon$. Поскольку

$d(X_0,\ X_0^\varepsilon) \le \varepsilon$ и $F^\delta(t_0,\ x_j^0) \subset F(t_0,\ x_j^0)$, то хаусдорфово отклонение множества X_1^* от множества $\tilde{X}_1$ удовлетворяет аналогичному неравенству. Из этих неравенств следует

$$d(\tilde{X}_1,\ X_1^*) \le \xi_0 \varepsilon \tag{3.4}$$

Из оценок (2.13), (3.4) следует, что хаусдорфово расстояние между множествами X_1 и X_1^* удовлетворяет неравенству

$$d(X_1,\ X_1^*) \le \xi_0 \varepsilon + \omega(\Delta_0) \tag{3.5}$$

Для каждой точки $x[t_1] \in X_1^*$ найдем точку $x_j^1 = x_j[t_1]$ решетки N_ε, отстоящую от $x[t_1]$ не более чем на $\varepsilon : \left\| x_j^1 - x[t_1] \right\| \le \varepsilon$. Объединив все такие точки x_j^1 из N_ε, соответствующие всевозможным точкам $x[t_1]$ из X_1^* в единое множество X_1^ε, из соотношения (3.5) получаем

$$d(X_1,\ X_1^\varepsilon) \le d(X_1,\ X_1^*) + d(X_1^*,\ X_1^\varepsilon) \le \xi_0 \varepsilon + \omega(\Delta_0) + \varepsilon$$

Построенное таким образом дискретное конечное множество X_1^ε есть ε_1-сеть для множества X_1 – ОД ДВ (1.2); здесь $\varepsilon_1 = \xi_0 \varepsilon + \omega(\Delta_0) + \varepsilon$.

Перейдем к построению аппроксимаций на следующем промежутке $I_2=[t_1,\ t_2]$ разбиения Г. Здесь рассуждения во всем аналогичны предыдущим. Отличия весьма незначительны.

Рассмотрим ОД X_1. Пусть $x_1 = x[t_1] \in X_1$. Введем в рассмотрение множество $\tilde{X}_2^1 = \tilde{X}(t_2,\ t_1,\ x[t_1]) = x[t_1] + \Delta_1 F_1$, $\Delta_1 = t_2 - t_1$ – ОД ДВ $\dot{x}(t) \in F_1, x[t_1] = x_1$, отвечающая моменту t_2, где $F_1 = F(t_1,\ x[t_1])$. $\tilde{X}_2^1$ некоторая аппроксимация ОД $X_2^1 = X(t_2;\ t_1,\ x[t_1])$, и хаусдорфово расстояние между ними удовлетворяет по аналогии с (2.3) неравенству $d(X_2^1,\ \tilde{X}_2^1) \le \omega(\Delta_1)$. Следовательно, хаусдорфово расстояние между множествами X_2 и $\tilde{X}_2 = \tilde{X}(t_2;\ t_1,\ X_1) = \bigcup\limits_{x[t_1] \in X_1} X_2^1(t_2;\ t_1,\ x[t_1])$ удовлетворяет неравенству

$$d(X_2,\ \tilde{X}_2) \le \omega(\Delta_1) \tag{3.6}$$

Рассмотрим множество $\tilde{X}_2$. Пусть $\tilde{x}[t_2] \in \tilde{X}_2$ – произвольная точка. Тогда она представима в виде $\tilde{x}[t_2] = x[t_1] + \Delta_1 f_1$, где $x[t_1] \in X_1$, $f \in F_1$.

Для точки $x[t_1] \in X_1$ найдем такую точку x_j^1 из ε_1 - сети X_1^ε множества X_1, что $\left\| x_j^1 - x[t_1] \right\| \le \varepsilon_1$. Зададим число $\delta > 0$ и для множества F_1 при помощи некоторого правила определим такую конечную δ-сеть

$$F_1^\delta = F^\delta(t_1,\ x[t_1]) = \{ f_k^\delta \in F_1 : k = 1,\ 2, \ldots,\ K_1 \}$$

что $d(F_1,\ F_1^\delta) \le \delta$.

Считая, что δ-сеть $F^\delta(t_1,\ x_j^1)$ задана по аналогии соотношениям (3.1) и (3.2) для любого вектора $f \in F_1$ можно найти вектор $f_j^k \in F^\delta(t_1,\ x_j^1)$, такой, что точки $\tilde{x}[t_2] = x[t_1] + \Delta_1 f$ и $x^*[t_2] = x_j^1 + \Delta_1 f_j^k$ отличаются друг от друга на величину $\left\| (x[t_1] + \Delta_1 f) - (x_j^1 + \Delta_1 f_j^k) \right\| \le \left\| x[t_1] - x_j^1 \right\| + \Delta_1 \left\| f - f_j^k \right\| \le \varepsilon_1 + \Delta_1 (L\varepsilon_1 + \delta)$

Полагая $\delta > 0$ любым числом, удовлетворяющим неравенству $\delta \le L\varepsilon_1$ (например,

$\delta = L\varepsilon_1$), получаем оценку

$$\left\|\tilde{x}[t_2] - x^*[t_2]\right\| \le \varepsilon_1(1 + 2L\Delta_1) \le \xi_1\varepsilon_1 \qquad (3.7)$$

Итак, окончательно получаем, что для любой точки $\tilde{x}[t_2] \in \tilde{X}_2$ найдется точка

$$x^*[t_2] = x_j^1 + \Delta_1 f_j^k, \quad (x_j^1 \in X_1^\varepsilon, \ f_j^k \in F^\delta(t_1, \ x_j^1), \quad 0 < \delta \le L\varepsilon_1)$$

удовлетворяющая неравенству (3.7).

Множество всех точек $x^*[t_2] = x_j^1 + \Delta_1 f_j^k$, $x_j^1 \in X_1^\varepsilon$, $f_j^k \in F^\delta(t_1, \ x_j^1)$; $j = 1, 2, \ldots, J_1$, $k = 1, 2, \ldots, K_1^j$ обозначим $X_2^* = X^*(t_2, \ t_1, \ X_1^\varepsilon)$.

Неравенство (3.7) показывает, что хаусдорфово отклонение множества $\tilde{X}_2$ от X_2^* удовлетворяет неравенству $h(\tilde{X}_2, \ X_2^*) \le \xi_1\varepsilon_1$. С другой стороны, учитывая что $d(X_1, \ X_1^\varepsilon) \le \varepsilon_1$ и $F^\delta(t_1, \ x_j^1) \subset F(t_1, \ x_j^1)$, получаем $h(X_2^*, \ \tilde{X}_2) \le \xi_1\varepsilon_1$.

Следовательно,

$$d(\tilde{X}_2, \ X_2^*) \le \xi_1\varepsilon_1 \qquad (3.8)$$

Учитывая оценки (3.6), (3.8), получаем

$$d(X_2, \ X_2^*) \le \xi_1\varepsilon_1 + \omega(\Delta_1) \qquad (3.9)$$

Для каждой точки $x[t_2] \in X_2^*$ найдем точку $x_j^2 \in N_\varepsilon$, отстоящую не более чем на ε от $x[t_2]$. Множество всех точек x_j^2, отвечающих точкам $x[t_2] \in X_2^*$, обозначим X_2^ε. По построению X_2^ε имеем оценку $d(X_2^*, \ X_2^\varepsilon) \le \varepsilon$. Принимая во внимание (3.9) и последнее неравенство, получаем $d(X_2, \ X_2^\varepsilon) \le \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 = \xi_1\varepsilon_1 + \omega(\Delta_1) + \varepsilon$.

Итак, X_2^ε – дискретная аппроксимация ОД X_2.

Проведем далее такие же построения аппроксимирующих множеств $X_3^\varepsilon, \ X_4^\varepsilon, \ldots, \ X_{i+1}^\varepsilon, \ldots, \ X_N^\varepsilon$ для промежутков $[t_2, \ t_3], [t_3, t_4], \ldots, [t_i, \ t_{i+1}], \ldots, [t_{N-1}, \ t_N]$. На промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ справедлива следующая оценка:

$$d(X_{i+1}, \ X_{i+1}^\varepsilon) \le \varepsilon_{i+1}, \quad \varepsilon_{i+1} = \xi_i\varepsilon_i + \omega(\Delta_i) + \varepsilon \qquad (3.10)$$

хаусдорфова расстояния между ОД ДВ (1.2) и вычисленным дискретным приближением. На последнем промежутке $[t_{N-1}, t_N]$, в частности, имеем $d(X_N, \ X_N^\varepsilon) \le \varepsilon_N$.

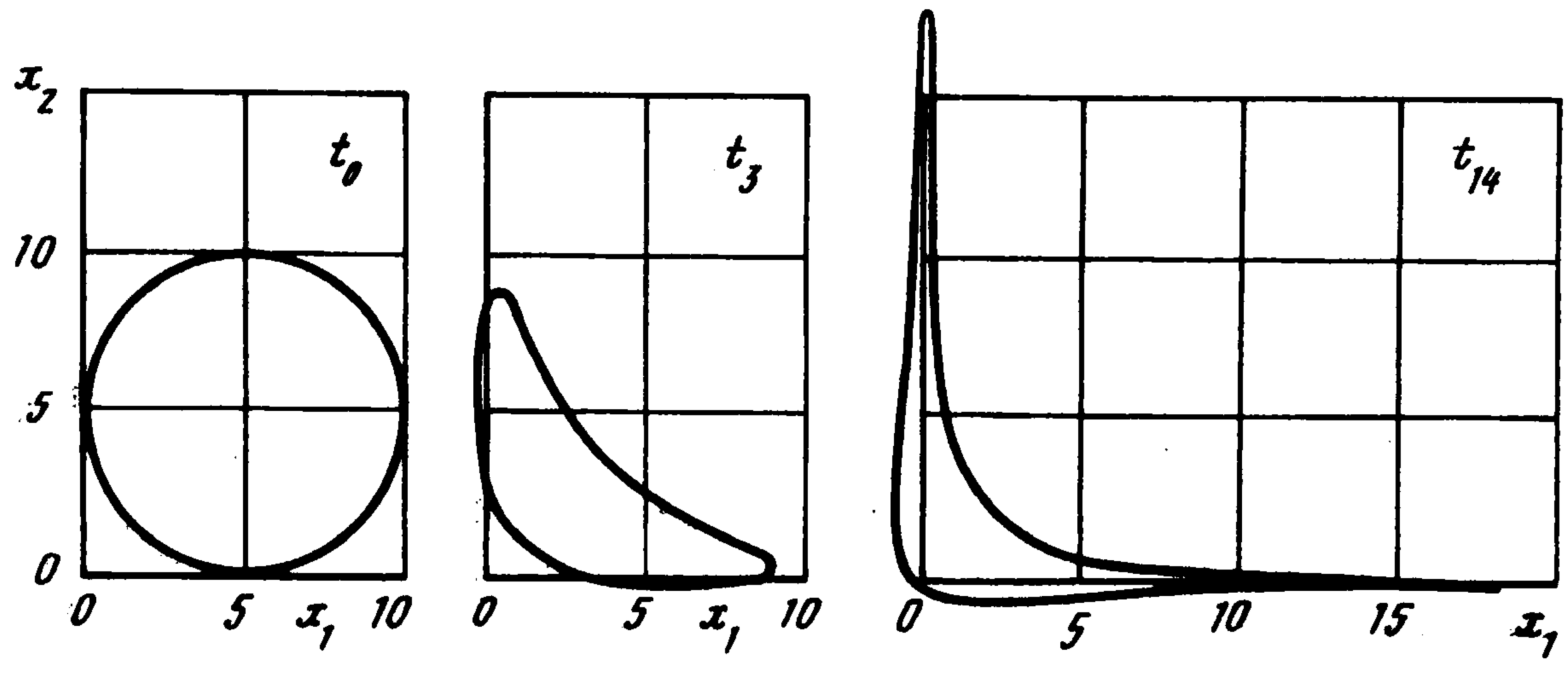
Учитывая рекуррентную формулу (3.10) для последовательности $\{\varepsilon_i\}$, а также выражение $\omega(\Delta) = \Delta\omega^*((1+K)\Delta)$, где $\omega^*((1+K)\Delta) \downarrow 0$ при $\Delta \downarrow 0$ и равенства $\Delta_0 + \Delta_1 \ldots + \Delta_{N-1} = \vartheta - t_0$, $\Delta_i = \Delta$, получаем оценку для ε_N сверху

$$\varepsilon_N \le \exp[2L(\vartheta - t_0)](\vartheta - t_0)\{(1 + 1/N)\Omega\sqrt{\Delta} + \omega^*((1+K)\Delta)\} \qquad (3.11)$$

(число ε – параметр решетки N_ε – согласован с длиной $\Delta = (\vartheta - t_0)/N$ промежутков разбиения Γ по формуле $\varepsilon = \Omega\Delta\sqrt{\Delta}$, где Ω – некоторое конечное положительное число).

Из оценки (3.11) следует, что ее правая часть стремится к нулю при $\Delta \to 0$. При этом $d(X_N, \ X_N^\varepsilon) \to 0$ при $\Delta \to 0$. Скорость этого стремления определяется выражением в фигурных скобках в правой части оценки (3.11). При $\Delta \to 0$ число N стремится к бесконечности, и значит, при больших N имеем

$$(1 + 1/N)\Omega\sqrt{\Delta} + \omega^*((1+K)\Delta) \approx \Omega\sqrt{\Delta} + \omega^*((1+K)\Delta) \qquad (3.12)$$



Когда система (1.1) автономна (т.е. правая часть системы имеет вид $f(x, u)$) в дополнение к условиям 1°, 2°, тогда правую часть первого неравенства (2.5) можно положить равной $L\|x^* - x_*\|$. В этом случае (3.12) примет вид

$$(1 + 1/N)\Omega\sqrt{\Delta} + LK\Delta \approx \Omega\sqrt{\Delta} + LK\Delta$$

Пример. Пусть динамика управляемой системы описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2}x_1(1 - x_2) + u_1,\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_2(1 - x_1) + u_2,\ |u_1| \le 1,\ |u_2| \le 1$$

При

$$t_0 = 0,\ X_0 = \{(x_1,\ x_2) \in R^2 : (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \le 25\},\quad \Delta = 0{,}1,\ \varepsilon = 0{,}025$$

ОД этой системы, отвечающие моментам времени $t_0 = 0$, $t_3 = 0{,}3$, $t_{14} = 1{,}4$, представлены на фигуре.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00219, 96-15-96245).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal techniques for dynamic systems: Control synthesis for uncertain systems // Dynamics and Control. 1992. V. 2. N 2. P. 87–111.
2. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal techniques for dynamic systems // Dynamics and Control. 1991. V. 1. P. 357–378.
3. *Черноусько Ф.Л.* Эллипсоидальные оценки области достижимости управляемой системы // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 11–19.
4. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
5. *Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л.* Двусторонние оценки ОД управляемых систем // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 737–744.
6. *Никольский М.С.* Об одном методе аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 8. С. 1252–1254.
7. *Никольский М.С.* Об аппроксимации множества достижимости для управляемого процесса // Мат. заметки. 1987. Т. 41. № 1. С. 71–76.
8. *Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.* О приближенном построении интегральных воронок дифференциальных включений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 7. С. 965–977.
9. *Лотов А.В.* Численный метод построения множеств достижимости для линейных

управляемых систем с фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 1. С. 67–78.
10. *Лотов А.В.* О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейных управляемых систем // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. № 5. С. 1081–1083.
11. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
12. *Будак Б.М., Беркович Е.М., Соловьева Е.Н.* О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9. № 3. С. 522–547.
13. *Федоренко Р.П.* Итерационное решение задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1970. Т. 10. № 4. С. 895–907.
14. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 487 с.
15. *Коробов В.И.* О сходимости одного варианта метода динамического программирования для задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8. № 2. С. 429–435.
16. *Комаров В.А.* Оценки множества достижимости дифференциальных включений // Мат. заметки. 1985. Т. 37. Вып. 6. С. 916–925.
17. *Благодатских В.И.* Некоторые результаты по теории дифференциальных включений // Summer school on ordinary differential equations. – Brno: Purkyne Univ., 1975. P. 29–67.
18. *Благодатских В.И., Филлипов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 194–252.
19. *Толстоногов А.А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986. 295 с.
20. *Гончаров В.В., Толстоногов А.А.* О непрерывных селекторах и свойствах решений дифференциальных включений с m-аккретивными операторами // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 5. С. 1035–1039.
21. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Об одном уравнении, порождаемом дифференциальным включением // Мат. заметки. 1980. Т. 27. № 3. С. 429–437.
22. *Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н.* Дифференциальные свойства интегральных воронок и стабильных мостов // ПММ. Т. 55. Вып. 1. 1991. С. 72–78.
23. *Frankowska H.* Contingent cones to reachable sets of control systems. // SIAM J. Contr. and Optimiz. 1989. V. 27. N 1. P. 170–198.
24. *Wolenski P.* The exponential formula for the reachable set of Lipschitz differential inclusion // SIAM J. Contr. and Optimiz. 1990. V. 28. N 5. P. 1148–1161.
25. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
21.VIII.1997