

УДК 531.36:534.1

© 1998 г. В.В. Амелькин, Б.С. Калитин

## ИДЕАЛЬНАЯ "ДВУХУДАРНАЯ" МОДЕЛЬ ЧАСОВ С АНАЛИТИЧЕСКИМ СИЛЬНО ИЗОХРОННЫМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Конструируется "двухударная" модель часов с одной степенью свободы с одним встречным и одним подталкивающим ударами на периоде. В качестве колебательной системы часов рассматривается нелинейный, аналитический по демпфированию и восстанавливающей силе осциллятор с "собственным периодом". Определяющую роль в возможности реализации обычного для реальных часов жесткого режима возбуждения автоколебаний играет в предлагаемой модели траектория, "входящая" в точку покоя за конечное время.

Любой часовой механизм состоит, как известно [1, 2], из трех основных узлов: осциллятора – маятника, балансира; заводного механизма – источника энергии; спускового устройства, которое связывает заводной механизм с осциллятором и передает последнему соответствующие импульсы. Одно из основных требований, предъявляемых к конструкциям современных часовых механизмов с осциллятором, имеющим "собственный период", состоит в требовании изохронности свободных колебаний осциллятора, что позволяет поддерживать в часовом ходе колебания возможно большей амплитуды, менее подверженные влиянию внешних динамических воздействий [2].

Ниже строятся не рассматриваемые ранее типы нелинейных динамических моделей часов с ударами, когда осциллятор является аналитическим и имеет "собственный период", т.е. может совершать колебания при отсоединенном спусковом устройстве. Такие модели часов могут быть использованы при разработке новых конструкций механизмов, обеспечивающих точность хода часов с жестким режимом возбуждения автоколебаний.

**1. Осциллятор Льенара затухающих свободных колебаний.** В общем виде уравнение движения используемого в моделях часов осциллятора с "собственным периодом" с одной степенью свободы задается соотношением

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) + g(x) = 0, \quad g(x) = x + g_0(x)$$

Остановимся на рассмотрении осциллятора, называемого осциллятором Льенара, который описывается уравнением

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{1.1}$$

где нелинейный "коэффициент" трения  $f(x)$  и нелинейная составляющая восстанавливающей силы  $g_0(x)$  – это голоморфные на любом промежутке изменения независимой переменной  $x$  функции, такие, что  $f(0) = 0$ ,  $f(x) > 0$  при  $x \neq 0$ ;  $g_0(0) = 0$ ,  $xg_0(x) > 0$  при  $x \neq 0$ .

В этих предположениях единственная конечная точка покоя  $O(0, 0)$  соответствующей осциллятору (1.1) динамической системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x)y \tag{1.2}$$

будет устойчивым фокусом.

Относительно этого фокуса будем полагать, что спирали, по которым изображающие точки перемещаются при возрастании  $t$  в направлении движения часовой стрелки, сплошь заполняют всю фазовую плоскость  $xOy$ .

Как было отмечено выше, одно из основных требований, предъявляемых к конструкциям часовых механизмов, заключается в требовании изохронности [3] свободных колебаний осциллятора.

Если же ввести в рассмотрение сильно изохронный осциллятор, у которого "полупериод" колебаний в полуплоскости  $x \geq 0$  фазовой плоскости совпадает с "полупериодом" колебаний в полуплоскости  $x \leq 0$  фазовой плоскости, то, очевидно, точность хода часов с таким осциллятором только повысится.

Математические аспекты этого вопроса таковы. Если воспользоваться предложенной ранее схемой рассуждений [4] и одним из результатов ([5], теорема 4), то можно показать, что справедлива

*Теорема 1.1.* Для того чтобы для динамической системы

$$\dot{x} = -y - X(x, y), \quad \dot{y} = x + Y(x, y)$$

где голоморфные в окрестности точки  $O(0, 0)$  функции  $X$  и  $Y$  не содержат свободных и линейных членов, имела место сильная изохронность колебаний, необходимо и достаточно существование единственного преобразования

$$u = x, \quad v = y + \sum_{k+l=2}^{\infty} \beta_{kl} x^k y^l \quad (1.3)$$

переводящего рассматриваемую динамическую систему в систему вида

$$\dot{u} = -v + u \sum_{s+v=1}^{\infty} \gamma_{sv} u^s v^v, \quad \dot{v} = u + v \sum_{s+v=1}^{\infty} \gamma_{sv} u^s v^v \quad (1.4)$$

А тогда непосредственно проверяется, что если

$$x^3 g_0(x) = \left[ \int_0^x s f(s) ds \right]^2 \quad (1.5)$$

то замена времени  $t = -t$  и преобразование вида (1.3)

$$u = x, \quad v = y + x \sqrt{g_0(x)/x}$$

переводит соответствующую осциллятору (1.1) динамическую систему (1.2) в систему вида (1.4)

$$\dot{u} = -v + u \sqrt{g_0(u)/u}, \quad \dot{v} = u + v \sqrt{g_0(u)/u}$$

Последнее в соответствии с теоремой 1.1 будет означать, что осциллятор (1.1) является при условии (1.5) сильно изохронным.

Отметим здесь, что в соответствии с теоремой 1.1 условие (1.5) является не только достаточным, но и необходимым условием сильной изохронности колебаний осциллятора Льенара (1.1).

Выясним некоторые другие свойства осциллятора (1.1).

Рассмотрим произвольную спираль  $S$  из семейства спиралей-траекторий системы (1.2), которая выходит из произвольной точки положительной полуоси оси ординат на фазовой плоскости и совершает один виток вокруг точки покоя. Пусть эта спираль пересекает положительную и отрицательную полуоси абсцисс на фазовой плоскости в точках  $\xi$  и  $\eta$  соответственно и пусть

$$\begin{aligned} y_{\xi} &= y(x, \xi), & z_{\xi} &= z(x, \xi), & \text{где } 0 \leq x \leq \xi \\ z_{\eta} &= z(x, \eta), & y_{\eta} &= y(x, \eta), & \text{где } \eta \leq x \leq 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

уравнения дуг спирали  $S$ , расположенных соответственно в 1-, 4-, 3- и 2-м квадрантах.

Пусть далее

$$\Phi(x, \xi) = y(x, \xi) + z(x, \xi), \quad \Phi(x, \eta) = y(x, \eta) + z(x, \eta)$$

$$\Phi(\xi, \xi) = \Phi(\eta, \eta) = 0$$

*Лемма 1.1.* Справедливы неравенства

$$\Phi(x, \xi) > 0 \text{ при } 0 \leq x < \xi, \quad \Phi(x, \eta) < 0 \text{ при } \eta < x \leq 0 \quad (1.7)$$

*Доказательство.* Докажем справедливость первого неравенства (1.7). Выполнимость второго доказывается аналогичным образом. При учете принятых обозначений имеем

$$\frac{d\Phi(x, \xi)}{dx} = -2f(x) - \frac{g(x)}{y_{\xi}z_{\xi}}\Phi(x, \xi), \quad 0 \leq x \leq \xi \quad (1.8)$$

По предположению  $f(x) > 0$  при  $x \neq 0$ , поэтому из (1.8) следует, что на промежутке  $(0, \xi]$  не может существовать подинтервалов, на которых  $\Phi(x, \xi) \equiv 0$ . Имея это в виду, предположим, что первое из неравенств (1.7) не выполняется. Тогда при учете предыдущего это будет означать, что на промежутке  $(0, \xi)$  обязательно найдется отрезок  $[\xi_1, \xi_2] \subset (0, \xi)$ , такой, что

$$\Phi(x, \xi) < 0 \text{ при } \xi_1 \leq x < \xi_2 \text{ и } \Phi(\xi_2, \xi) = 0 \quad (1.9)$$

Интегрируя уравнение (1.8) в пределах от  $\xi_1$  до  $\xi_2$  и учитывая (1.9), приходим к неравенству  $\Phi(\xi_2, \xi) - \Phi(\xi_1, \xi) < 0$ , из которого следует, что  $\Phi(\xi_1, \xi) > 0$ . Но полученное неравенство противоречит соотношению (1.9). Таким образом, функция  $\Phi(x, \xi)$  строго положительна при  $0 < x < \xi$ .

Для завершения доказательства остается показать, что  $\Phi(0, \xi) > 0$ . Действительно, если последнее неравенство не выполняется, то, очевидно,  $\Phi(0, \xi) = 0$ . А тогда, выбрав достаточно малое число  $\varepsilon (0 < \varepsilon < \xi)$  и проинтегрировав уравнение (1.8) в пределах от 0 до  $\varepsilon$ , придем к равенству

$$\Phi(\varepsilon, \xi) = \frac{1}{h(\varepsilon, \xi)} \left( \Phi(0, \xi) - 2 \int_0^{\varepsilon} f(x) h(x, \xi) dx \right), \quad h(x, \xi) = \exp \left( \int_0^x \frac{g(s)}{y_{\xi}z_{\xi}} ds \right)$$

которое при учете предположения о том, что  $\Phi(0, \xi) = 0$ , приводит к невозможному неравенству  $\Phi(0, \xi) \leq 0$ .

А это и доказывает лемму.

Пусть теперь

$$H_1(x, \bar{\xi}, \xi) = y(x, \xi) - y(x, \bar{\xi}), \quad H_2(x, \bar{\xi}, \xi) = z(x, \bar{\xi}) - z(x, \xi), \text{ где } 0 \leq x \leq \bar{\xi} \leq \xi$$

$$H_1(x, \eta, \bar{\eta}) = y(x, \eta) - y(x, \bar{\eta}), \quad H_2(x, \eta, \bar{\eta}) =$$

$$= z(x, \bar{\eta}) - z(x, \eta), \text{ где } \eta \leq \bar{\eta} \leq x \leq 0$$

*Лемма 1.2.* Имеют место неравенства

$$\Delta_1(x) \triangleq H_1(x, \bar{\xi}, \xi) - H_2(x, \bar{\xi}, \xi) > 0 \text{ при } 0 \leq x \leq \bar{\xi} \leq \xi \quad (1.10)$$

$$\Delta_2(x) \triangleq H_1(x, \eta, \bar{\eta}) - H_2(x, \eta, \bar{\eta}) < 0 \text{ при } \eta < \bar{\eta} \leq x \leq 0$$

*Доказательство.* Докажем справедливость первого неравенства (1.10). Выполнимость второго доказывается аналогично. Итак, в точке  $x = \bar{\xi}$  левая часть первого соотношения (1.10), представляемая в виде  $\Delta_1(\bar{\xi}) = y(\bar{\xi}, \xi) + z(\bar{\xi}, \xi)$ , строго положительна согласно лемме 1.1. Из непрерывности функций  $H_1$  и  $H_2$  по переменной  $x$  следует, что левая часть первого соотношения (1.10) строго положительна и для  $x < \bar{\xi}$ , если только разность  $\bar{\xi} - x$  достаточно

мала. А тогда если первое неравенство (1.10) не имеет места на промежутке  $0 \leq x \leq \bar{\xi} < \xi$ , то должна существовать точка  $x^*$ , лежащая слева от  $\bar{\xi}$ , такая, что  $\Delta_1(x) > 0$  при  $x^* < x \leq \bar{\xi}$ , но  $\Delta_1(x^*) = 0$ .

Имеем

$$\frac{d\Delta_1(x)}{dx} = g(x) \left( \frac{H_1}{y_{\bar{\xi}} y_{\bar{\xi}}} - \frac{H_2}{z_{\bar{\xi}} z_{\bar{\xi}}} \right) < g(x) \frac{\Delta_1(x)}{y_{\bar{\xi}} y_{\bar{\xi}}} \quad (1.11)$$

где  $0 \leq x < \bar{\xi}$ , так как по лемме 1.1  $|y_{\bar{\xi}}| > |z_{\bar{\xi}}|$ , и следовательно,  $y_{\bar{\xi}} y_{\bar{\xi}} > z_{\bar{\xi}} z_{\bar{\xi}}$ .

Интегрируя неравенство (1.11) в пределах от  $x^* + \varepsilon$  до  $x$ , где  $\varepsilon > 0$ , а  $x^* < x < \bar{\xi}$ , получим неравенство

$$\ln \left| \frac{\Delta_1(x)}{\Delta_1(x^* + \varepsilon)} \right| < \int_{x^* + \varepsilon}^x \frac{g(s)}{y_{\bar{\xi}} y_{\bar{\xi}}} ds$$

которое становится противоречивым при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в силу ограниченности правой части. Полученное противоречие и доказывает лемму.

**2. Модель часов со встречным и подталкивающим ударами.** Рассмотрим часовой механизм с сильно изохронным осциллятором Льенара (1.1). Предположим, что спусковое устройство передает осциллятору мгновенные импульсы посредством встречного удара в направлении против движения осциллятора, приводящего в интерпретации на фазовой плоскости к мгновенному увеличению скорости на некоторую постоянную величину  $L_1 > 0$ , и подталкивающего удара в направлении движения осциллятора, приводящего к мгновенному увеличению скорости на постоянную величину  $L_2 > L_1$ . При этом предполагается, что передача импульса (скачок) осуществляется только один раз в положении равновесия при отличной от нуля скорости изменения амплитуды, т.е. в момент, когда  $x = 0$ ,  $y \neq 0$ .

Математическая модель в данном случае может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y + \frac{1}{2}(L_1 + L_2(L_2 - L_1)\text{sign}(y))\delta(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

Дальнейшие исследования свяжем с рассмотрением вопроса о возможных типах движений у импульсной системы (2.1).

**3. Периодические колебания системы (2.1) с одним скачком на полупериоде периода колебаний осциллятора.** Пусть

$$H(x, \xi) = y(x, \xi) - z(x, \xi), \quad \text{где } 0 \leq x \leq \xi$$

Тогда в силу свойства непрерывной зависимости решений исходных уравнений от начальных данных и того факта, что спирали-траектории системы (1.2) сплошь заполняют фазовую плоскость, можно утверждать, что функция  $H(0, \xi)$ , где  $\xi \geq 0$ , возрастает при  $\xi \rightarrow +\infty$  строго монотонно, причем  $H(0, \xi) \rightarrow +\infty$ . Поэтому для любого значения  $L_1 > 0$  существует единственное решение  $\xi_0$  алгебраического уравнения  $L_1 = H(0, \xi)$ , определяемое равенством  $\xi_0 = H^{-1}(L_1)$ . Такое решение, очевидно, соответствует периодическим колебаниям системы (2.1) с одним скачком на полупериоде периода колебаний осциллятора, которым в свою очередь соответствует орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл.

Докажем последнее. Положим  $y_0 = y(0, \xi_0)$ ,  $z_0 = z(0, \xi_0)$ , считая для сокращения записи, что символы  $y_0, z_0$  (а также символы, в дальнейшем им подобные) обозначают точки на оси  $x = 0$  с соответствующими символам значениями ординат.

Пусть в этих обозначениях периодическим колебаниям на фазовой плоскости соответствует контур  $(y_0, \xi_0, z_0 \xrightarrow{L_1} y_0)$ , т.е. разрывная траектория системы (2.1), проходящая через точки  $y_0, \xi_0, z_0$  (стрелка указывает на скачок из точки с ординатой  $z_0$  в точку с ординатой  $y_0$  такой, что  $|z_0 - y_0| = L_1$ ).

Если теперь в качестве начального состояния в окрестности  $y_0$  выбрать точку с ординатой  $y_1$ , где  $y_1 = y(0, \xi_1)$ ,  $\xi_0 < \xi_1$ , и  $y_0 < y_1$ , то из леммы 1.2 следует, что последовательности точек  $(y_k)_{k \geq 1}, (z_k)_{k \geq 1}$ , соответствующие положению изображающих точек после каждого скачка вдоль оси ординат, будут удовлетворять цепочкам неравенств

$$\begin{aligned} y_1 > y_3 > y_5 > \dots > y_0 > \dots > y_6 > y_4 > y_2 \\ z_2 > z_4 > z_6 > \dots > z_0 > \dots > z_5 > z_3 > z_1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если при тех же обозначениях  $y_1 < y_0$ , будем иметь цепочки неравенств, отличающиеся от (3.1) заменой символов  $y \leftrightarrow z$ .

Таким образом, для любого в окрестности  $y_0$  начального состояния изображающей точки последовательность ее ординат на прямой  $x = 0$  монотонно приближается с двух сторон к  $y_0$  на положительной полуоси и к  $z_0$  – на отрицательной полуоси той же оси. Аналогично полученному ранее результату ([6], теорема 1; см. также [7]) можно показать, что такое монотонное приближение будет асимптотическим стремлением к предельному циклу с одним скачком на полупериоде периода колебаний осциллятора.

Итак справедлива

**Теорема 3.1.** При любом значении  $L_1 > 0$  система (2.1) имеет единственное орбитально асимптотически устойчивое периодическое движение с одним скачком на полупериоде периода колебаний осциллятора.

*Замечание 3.1.* Область притяжения предельного цикла системы (2.1) с одним скачком на полупериоде периода колебаний осциллятора полностью определяется поведением при  $t \rightarrow \pm\infty$  траекторий в окрестности всегда существующей у (2.1) и не имеющей аналога в теории непрерывных динамических систем траектории, "входящей" в точку покоя за конечное время. Эта область может быть как конечной, так и может содержать точки, расположенные в бесконечной части фазовой плоскости.

**4. Траектория, "входящая" в точку покоя за конечное время.** Как известно, в непрерывной динамической системе со свойством единственности решений изображающая точка, движущаяся вдоль траектории системы, может "войти" в точку покоя из любой регулярной точки фазовой плоскости лишь при  $t \rightarrow +\infty$  или  $t \rightarrow -\infty$ . Что же касается системы (2.1), то она всегда имеет траекторию, "входящую" в точку покоя за конечное время (за конечное число скачков). Именно траекторией системы (2.1), "входящей" в точку покоя за конечное время, является траектория, достигающая отрицательную полуось оси ординат в точке, ордината которой равна  $-L_1$ .

Покажем, как в зависимости от расположения траектории  $\Gamma$ , "входящей" в точку покоя системы (2.1), изменяется область притяжения  $G$  предельного цикла  $\gamma$  с одним скачком на полупериоде периода колебаний осциллятора. Обозначим  $y_{-L_1} = y(0, \xi_{-L_1})$ , где значение  $y_{-L_1}$  всегда больше  $L_1$ .

**Теорема 4.1.** Если  $y_{-L_1} > L_2$ , то  $G = R^2 \setminus \Gamma$ , где  $\Gamma$  имеет точки вне круга любого радиуса с центром в точке покоя.

*Доказательство.* Построим последовательности интервалов  $I_k$  и  $J_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) на оси ординат соответственно при  $y > 0$  и  $y < 0$  следующим образом. Положим  $I_1 = (L_2, y_{-L_1})$ ,  $I_2 = (0, y_{-L_1} - L_2)$ . Учитывая тогда, что длины интервалов  $I_1$  и  $I_2$  равны, приходим к выводу, что изображающие точки, движущиеся с возрастанием времени  $t$  в полуплоскости  $x < 0$  по траекториям, которые примыкают к точкам

интервала  $J_2$ , при достижении оси ординат попадут после скачка вверх на величину  $L_2$  в точки интервала  $I_1$ . Если же рассмотреть движение отмеченных изображающих точек в обратном направлении, то такому их движению будет соответствовать однозначное отображение интервала  $I_1 \rightarrow I_2$ , при котором точкам интервала  $I_1$ , принадлежащим траекториям системы (2.1), будут соответствовать точки интервала  $I_2$ , не принадлежащие траекториям системы (2.1). Замечая теперь, что к точкам интервала  $I_2$  примыкают траектории системы (2.1), которые выходят из точек интервала  $J_2 = (z^{(2)}, 0)$  оси ординат, где  $z^{(2)} = z(0, \eta_2)$ , в соответствии с леммой 1.2 приходим к выводу, что  $|U_2| > |I_2|$ . При этом на интервал  $J_2$  попадают изображающие точки системы (2.1) после скачка вверх на величину  $L_1$ . Поэтому можно говорить об отображении равных по длине интервалов  $J_2$  и  $J_3$ , где  $J_3 = (z^{(2)} - L_1, L_1)$ . При таком отображении точкам интервала  $J_2$ , принадлежащим траекториям системы (2.1), соответствуют точки интервала  $J_3$ , не принадлежащие траекториям рассматриваемой системы. Далее, интервалу  $J_3$  соответствует интервал  $I_3 = (y_{-L_1}, y_{-(z^{(2)} - L_1)})$  такой, что всякая принадлежащая ему точка, начиная двигаться при возрастании времени  $t$  вдоль траектории системы (2.1) в полуплоскости  $x > 0$ , примкнет в некоторый момент времени к точке интервала  $J_3$ . С помощью такого типа движений определяется взаимнооднозначное отображение интервалов  $J_3$  и  $I_3$ , причем по лемме 1.2 будет справедливо неравенство  $|U_3| < |I_3|$ .

Рассуждая аналогичным образом, можно построить последовательности интервалов  $I_k, J_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), таких, что

$$|I_1| = |I_2| < |J_2| = |J_3| < |I_3| = |I_4| < |J_4| = |J_5| < \dots \quad (4.1)$$

Эти интервалы заполняют всю ось ординат, за исключением счетного множества точек, которые соответствуют концам промежутков  $I_k, J_k$ , и где интервалы с четными индексами содержат точки траекторий системы (2.1), а точки интервалов с нечетными индексами траекториям не принадлежат.

При учете сказанного соотношения (4.1) означают, что область притяжения  $G$  предельного цикла  $\gamma$  совпадает со всем фазовым пространством, за исключением траектории  $\Gamma$ , имеющей точки вне круга произвольного радиуса с центром в точке покоя, любая изображающая точка которой за конечное время попадает в начало координат. Теорема доказана.

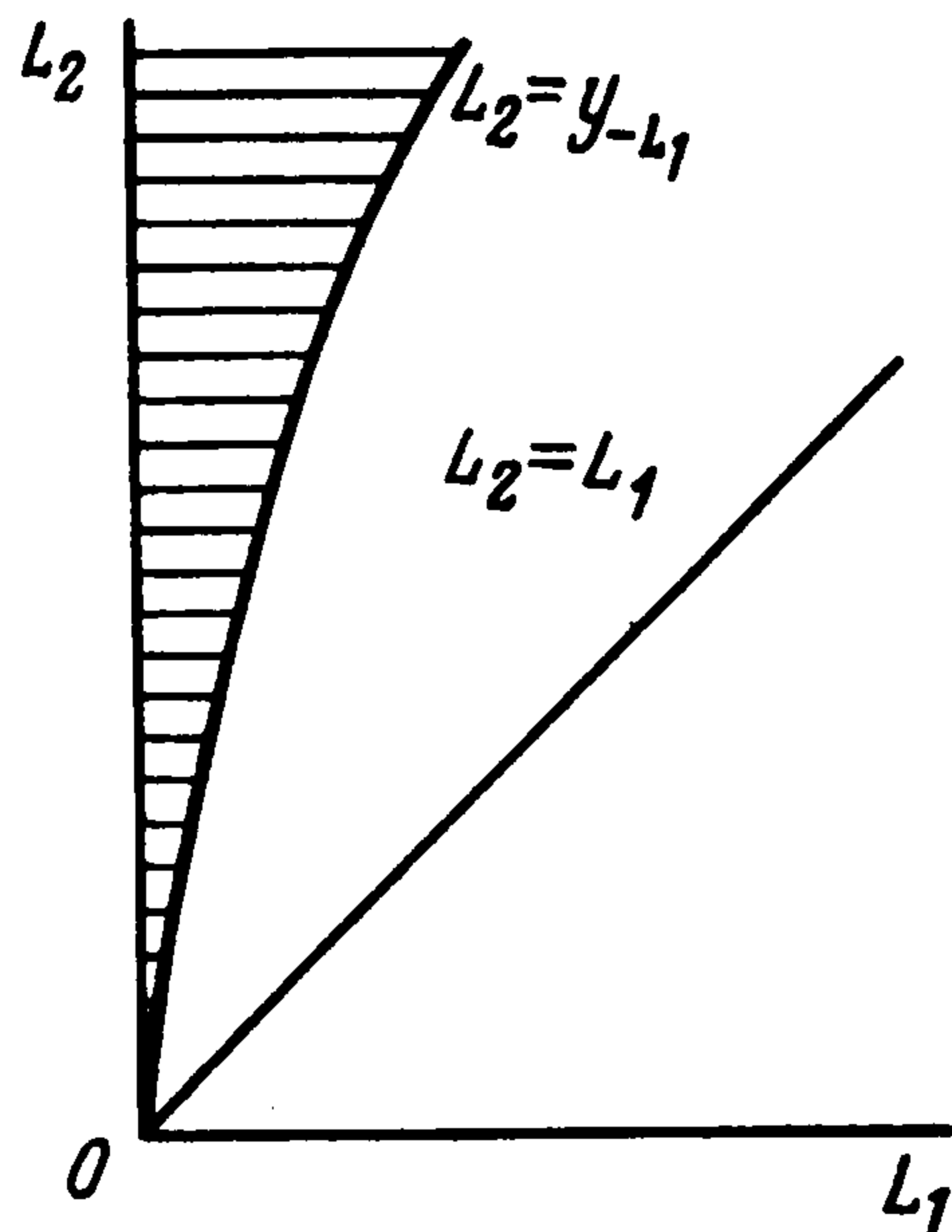
Что же касается случаев  $y_{-L_1} = L_2$  и  $y_{-L_1} < L_2$ , то при учете неравенства  $L_1 < L_2$  на основании леммы 1.2 приходим к выводу и о справедливости следующих двух утверждений.

**Теорема 4.2.** Если  $y_{-L_1} = L_2$ , то область притяжения  $G$  предельного цикла  $\gamma$  конечна и ограничена контуром  $(L_2, \xi_{-L_1}, -L_1 \xrightarrow{L_1} 0, L_2)$ . Всякая изображающая точка вне области  $G$  асимптотически приближается при  $t \rightarrow +\infty$  к конечной траектории  $\Gamma$ .

**Теорема 4.3.** Если  $y_{-L_1} < L_2$ , то область притяжения  $G$  предельного цикла  $\gamma$  конечна и ограничена контуром  $(y_{-L_1}, \xi_{-L_1}, -L_1 \xrightarrow{L_1} 0, y_{-L_1})$ . Всякая изображающая точка вне области  $G$ , лежащая в достаточно малой внешней полукрестности  $\Gamma$ , асимптотически приближается при  $t \rightarrow -\infty$  к конечной траектории  $\Gamma$ .

**Замечание 4.1.** Из теорем 4.1–4.3 следует, что система (2.1) может совершать периодические колебания с двумя скачками на периоде только в случае, когда  $y_{-L_1} < L_2$ .

Всем ситуациям, описанным последними тремя теоремами, можно дать геометрическую интерпретацию на плоскости параметров  $L_1, L_2$  (фиг. 1). Здесь область между полупрямой  $L_1 = L_2$  и кривой  $L_2 = y_{-L_1}$  соответствует случаю, описанному в теореме 4.1. Точки кривой  $L_2 = y_{-L_1}$  соответствуют случаю, описанному в теореме 4.2. И наконец, область между



Фиг. 1

положительной полуосью оси  $L_1 = 0$  и кривой  $L_2 = y_{-L_1}$  (заштрихованная область) соответствует случаю, описанному в теореме 4.3.

**5. Периодические колебания с двумя скачками на периоде.** Пусть изображающая точка, выходящая из точки  $y_+$ , обходит контур

$$(y_+, \xi, z_+ \xrightarrow{L_1} z_-, \eta, y_-) \quad (5.1)$$

где

$$y_+ = y(0, \xi), \quad z_+ = z(0, \xi), \quad z_- = z(0, \eta), \quad y_- = y(0, \eta)$$

по траекториям системы (2.1), а стрелка, как и ранее, указывает на скачок из точки  $z_+$  в точку  $z_-$  на расстояние, равное  $L_1$ .

Такой контур будем называть звеном, которое, очевидно, определяется лишь одним параметром  $\xi > \xi_{-L_1}$ .

Положим  $Y(\xi) = y_+ - y_- \equiv y(0, \xi) - y(0, \eta(\xi))$ . Тогда, если при некотором значении  $\xi = \xi^* > \xi_{-L_1}$  величина скачка  $L_2$  на положительной полуоси оси ординат совпадает с  $Y(\xi^*)$ , то звено замкнется и будет соответствовать периодическому автоколебательному движению системы (2.1) с двумя скачками на периоде.

При определенном условии такое замкнутое звено всегда существует и единственно.

Действительно, пусть точке  $\xi > \xi_{-L_1}$  соответствует звено (5.1), а точке  $\bar{\xi} < \xi$  — звено

$$(\bar{y}_+, \bar{\xi}, \bar{z}_+ \xrightarrow{L_1} \bar{z}_-, \bar{\eta}, \bar{y}_-)$$

Оценим приращение  $\Delta Y = Y(\xi) - Y(\bar{\xi})$ . Используя лемму 1.2, имеем

$$\Delta Y > (y_+ - \bar{y}_+) - (\bar{z}_- - z_-) > 0$$

так как  $\bar{z}_- - z_- = \bar{z}_+ - z_+$ .

Таким образом,  $Y(\xi) > Y(\bar{\xi})$  при  $\xi > \bar{\xi}$ , т.е.  $Y(\xi)$  — функция, возрастающая строго монотонно. А этот факт, равенство  $Y(\xi_{-L_1}) = y(0, \xi_{-L_1})$  и рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве орбитальной асимптотической устойчивости периодического движения с одним скачком на полупериоде периода колебаний осциллятора, приводят к выводу, что справедлива

**Теорема 5.1.** Условие

$$y_{-L_1} < L_2 < \sup_{\xi > \xi_{-L_1}} Y(\xi)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы система (2.1) имела единственное орбитально асимптотически устойчивое периодическое движение с двумя скачками на периоде, соответствующее периодическим автоколебаниям динамической модели часов.

**Замечание 5.1.** Периодическое движение с двумя скачками на периоде всегда существует, если разность  $L_2 - y(0, \xi_{-L_1})$  достаточно мала.

**Замечание 5.2.** Очевидно, что

$$y_{-L_1} = y(0, z^{-1}(-L_1))$$

где  $z^{-1}$  – отображение, обратное  $z$ . Это же значение  $y_{-L_1}$  может быть найдено и как корень уравнения  $x(y(0, \xi_{-L_1})) = 0$ , где  $x$  – решение уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{(g(x) + f(x)y)}$$

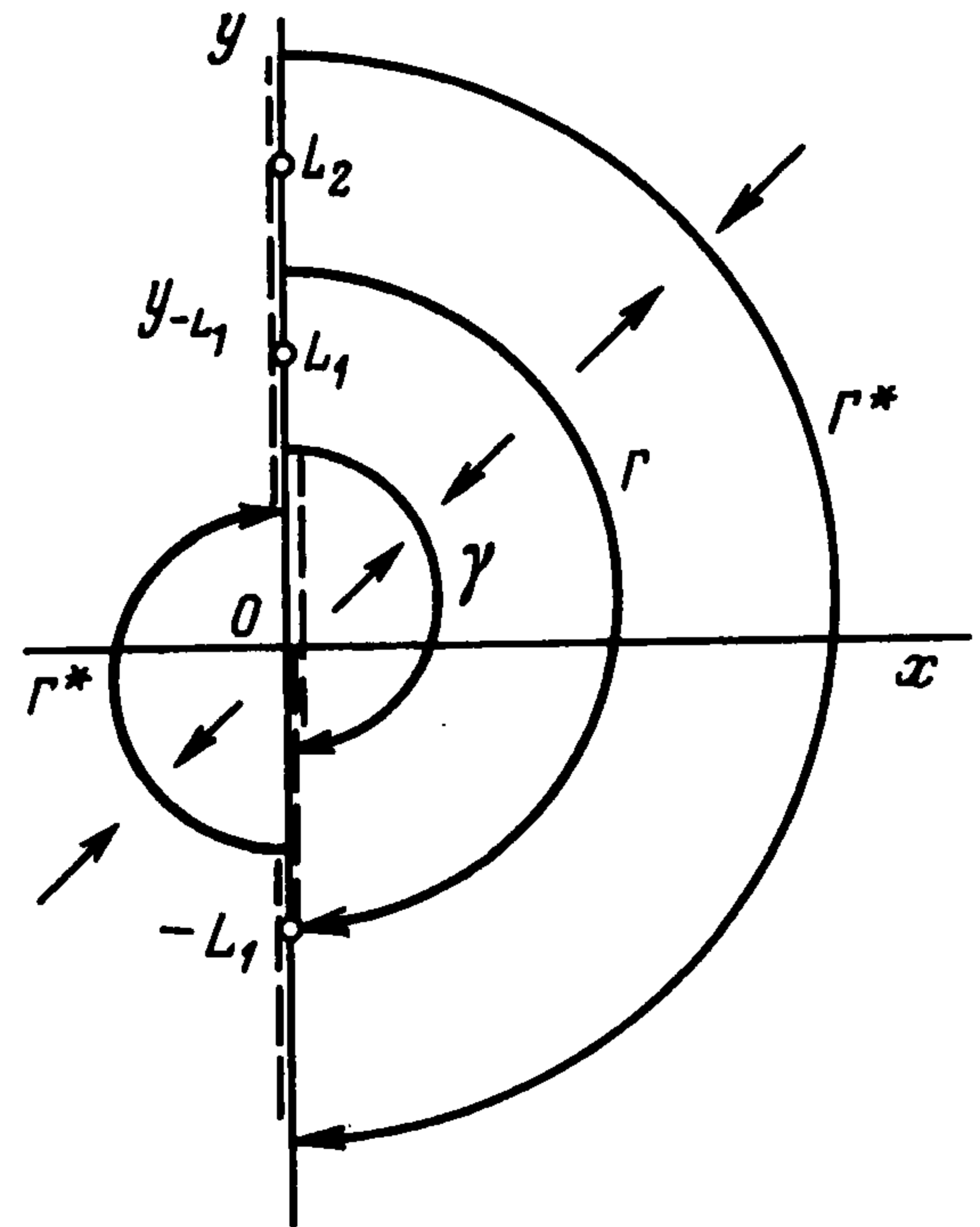
удовлетворяющее начальному условию  $x(0) = -L_1$ .

**Теорема 5.2.** Период автоколебаний динамической модели часов (2.1) совпадает с периодом изохронных колебаний осциллятора Льенара (1.1).

Справедливость теоремы вытекает из свойства сильной изохронности колебаний осциллятора (1.1) и мгновенности импульсов, передаваемых спусковым механизмом осциллятору.

**Замечание 5.3.** В случае выполнения условий теоремы 5.1 взаиморасположение предельного цикла с одним скачком на полупериоде периода колебаний осциллятора  $\gamma$ , предельного цикла с двумя скачками на периоде  $\Gamma^*$  и траектории, "входящей" в точку покоя за конечное время,  $\Gamma$ , показано на фиг. 2.

**Замечание 5.4.** Если в качестве динамической модели часов выбрать модель, описываемую системой (2.1) с сильно изохронным периодическим осциллятором Льенара (в этом случае функция  $f(x)$  нечетна), то и для такой модели справедливы теоремы 3.1, 4.1, 4.2, 4.3, 5.1, 5.2.



Фиг. 2

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
2. Баутин Н.Н. Динамическая теория часов. М.: Наука, 1986. 192 с.
3. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск: Изд-во БГУ, 1982. 207 с.
4. Руденок А.Е. Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Льенара // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 11. № 5. С. 811–819.
5. Амелькин В.В. Об изохронности в случаях центра и негрубого фокуса // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 6. С. 1073–1075.
6. Калигин Б.С. О колебаниях маятника с ударным импульсом. II // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 12. С. 2174–2181.
7. Калигин Б.С. Письмо в редакцию // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 2. С. 378.