УДК 531.36

© 1998 г. Т.В. Козлова

НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО БИЛЛИАРДА

Рассматривается задача о движении точки внутри вращающегося эллипса; удары о границу считаются абсолютно упругими. Установлено, что эта дискретная динамическая система не допускает аналитического интеграла, независимого от интеграла энергии. Доказательство неинтегрируемости основано на методе расщепления сепаратрис.

Следуя Биркгофу [1], рассмотрим динамическую систему с упругими отражениями, описывающую движение точки внутри плоской области D с выпуклой границей ∂D: внутри области точка равномерно движется по прямой, на границе происходит абсолютно упругий удар. В дальнейшем будем называть такую систему биллиардом. Так же, как и для гладких гамильтоновых систем, можно ввести понятие интегрируемого биллиарда. Наряду с интегралом энергии (скорость движения постоянна) достаточно знать еще один независимый интеграл. Биркгоф нашел случай интегрируемости, когда граница ∂D является эллипсом

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1,\quad 0<b^2\leqslant a^2 \tag{0.1}$$

Дополнительный интеграл имеет вид [2]

$$F=\dot{x}^2/a^2+\dot{y}^2/b^2-(\dot{x}y-x\dot{y})^2/(a^2b^2) \tag{0.2}$$

и получается из интеграла Иохимсталя задачи Якоби о геодезических на поверхности трехосного эллипсоида [3], когда одна из его осей стремится к нулю. Детальный анализ траекторий эллиптического биллиарда дан самим Биркгофом [1].

По-видимому, эллиптический биллиард Биркгофа – единственный интегрируемый биллиард с регулярной границей (обсуждение этой гипотезы см. в [1, 2, 4]). При дополнительном ограничении о продолжимости вещественной границы биллиарда до комплексной кривой без особенностей доказано [4], что независимый от энергии полиномиальный по скорости интеграл существует лишь для эллиптического биллиарда.

Впоследствии [5, 6] эта задача рассматривалась в вещественной постановке и исследовались условия интегрируемости возмущенных биллиардов, когда слегка варьируется форма эллиптической границы. Наиболее сильный результат в этом направлении получен в [7], где в качестве возмущения рассматривались границы в виде алгебраической кривой, симметричной относительно начала координат. Во всех этих работах была подтверждена гипотеза о неинтегрируемости неэллиптического биллиарда. Метод доказательства неинтегрируемости в [5–7] основывался на методе расщепления сепаратрис, открытом Пуанкаре.

Возмущение границы – не единственный способ возмущения эллиптического биллиарда. Например, можно рассматривать возмущение в слабом потенциальном поле. Была доказана [8, 9] интегрируемость биллиарда, когда на точку действует упругая сила, направленная к центру эллипса, или гравитационная сила, направленная к одному из ее фокусов. Дано обобщение этих результатов [10].

Было рассмотрено [11] еще одно возмущение эллиптического биллиарда, когда заряженная частица движется в магнитном поле напряженности ε, ортогональном плоскости биллиарда. С точностью до слагаемых порядка ε^2 гамильтониан этой задачи совпадает с гамильтонианом задачи о движении частицы внутри эллипса, вращающегося с малой угловой скоростью $\varepsilon/2$ вокруг своего центра. Численные расчеты [11] ясно указывают на стохастизацию траекторий при малых $\varepsilon\neq 0$.

Цель настоящей заметки – дать строгое доказательство неинтегрируемости вращающегося эллиптического биллиарда при малых $\varepsilon\neq 0$.

1. Метод Пуанкаре. Итак, рассмотрим биллиард в эллипсе (0.1), вращающийся с малой угловой скоростью ε вокруг своего центра. В промежутках между последовательными ударами частица движется с постоянной скоростью по прямой в неподвижной системе отсчета. Удобно перейти в подвижную систему $Oxyz$, вращающуюся вокруг оси z со скоростью ε. В осях x, y уравнение границы области ∂D имеет вид (0.1). Рассматриваемая система имеет две степени свободы; обобщенными координатами служат переменные x, y.

Считая массу частицы равной единице, запишем функцию Лагранжа

$$L = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \varepsilon(x\dot{y} - \dot{x}y) + o(\varepsilon) \tag{1.1}$$

Коэффициент при ε равен кинетическому моменту K частицы относительно точки O. Отметим, что лагранжиан (1.1) описывает также движение заряженной частицы в слабом магнитном поле. Установленный ниже результат о неинтегрируемости справедлив и для этой задачи.

Пусть

$$u = \dot{x} - \varepsilon y, \quad v' = \dot{y} + \varepsilon x$$

– канонические импульсы, сопряженные с координатами x, y. От лагранжиана (1.1) перейдем к гамильтониану

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + o(\varepsilon); \quad H_0 = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad H_1 = uy - vx \tag{1.2}$$

При $a = b$ возмущенный биллиард будет интегрируемым.

Действительно, дополнительным интегралом является функция $F = x\dot{y} - \dot{x}y + \varepsilon(x^2 + y^2)$. Она постоянна не только на участках траектории между ударами, но и сохраняется при упругом отражении от границы, которая при $a = b$ совпадает с окружностью с центром в точке O.

Покажем, что при $a \neq b$ вращающийся эллиптический биллиард при малых $\varepsilon \neq 0$ будет неинтегрируемой динамической системой: она не допускает непостоянного аналитического интеграла на каждой поверхности уровня интеграла энергии $H > \mathrm{const} > 0$. Доказательство основано на использовании метода Пуанкаре расщепление сепаратрис [12] (см. также [13], гл. 5).

Если $a \neq b$, то при каждом ненулевом значении полной энергии невозмущенная система имеет неустойчивую периодическую траекторию γ гиперболического типа: частица движется по большой оси эллипса. Мультипликаторы γ вычислены [5], они равны λ, $1/\lambda$, где

$$\lambda = (a + \sqrt{a^2 - b^2}) / (a - \sqrt{a^2 - b^2}) > 1$$

В силу гиперболичности γ имеется семейство двоякоасимптотических траекторий

$$t \to \sigma_\alpha(t), \quad t \in R$$

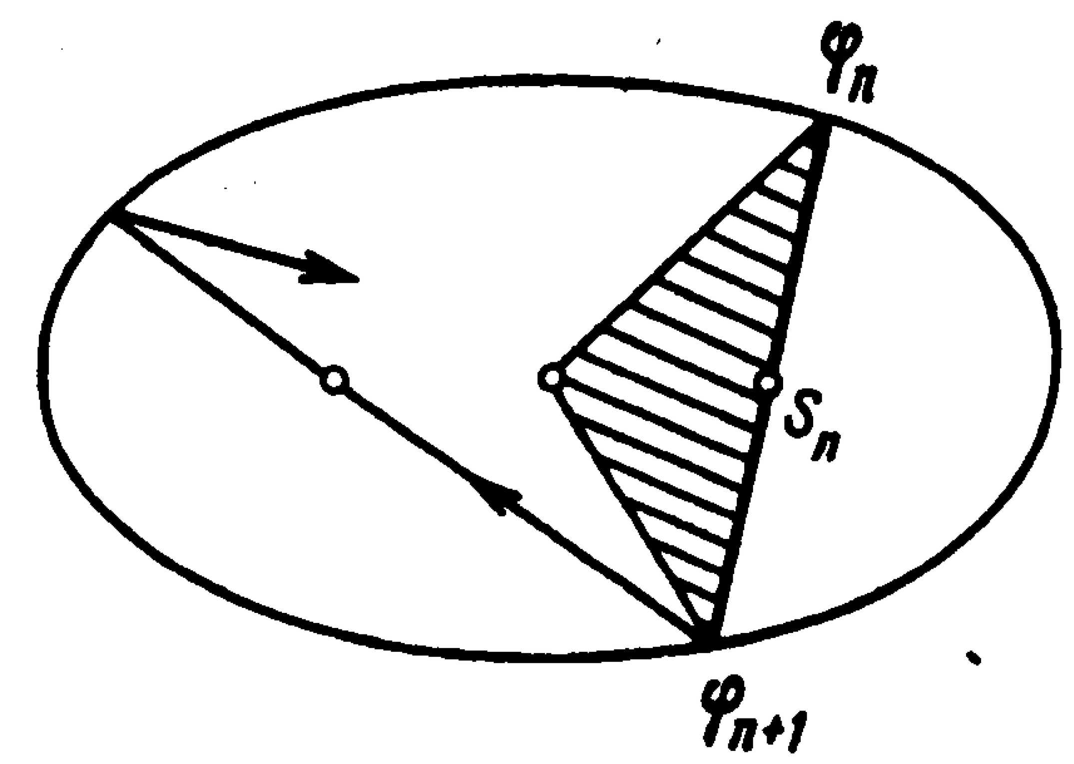
α – параметр, неограниченно приближающихся к γ_0 при $t \to \pm\infty$. Как заметил еще Биркгоф [1], траектории σ_α составлены из отрезков Δ_n, $n \in Z$, проходящих последовательно через фокусы эллипса.

Введем функцию Пуанкаре (всюду далее интегрирование ведется по t от $-\infty$ до $+\infty$)

$$P(\alpha) = \int H_1(\sigma_\alpha(t))dt \tag{1.3}$$

Несобственный интеграл заведомо сходится, если подынтегральная функция стремится к нулю при $t \to \pm\infty$ (тогда она убывает с ростом $|t|$ экспоненциально быстро), что эквивалентно $H_1(\gamma) = 0$. В рассматриваемом случае это условие выполнено, так как $H_1 = \dot{x}y - x\dot{y}$ и $y = 0$, $\dot{y} = 0$ на траектории γ.

Известно ([13], гл. 5), что если $P'(\alpha) \not\equiv 0$, то при малых $\varepsilon \neq 0$ возмущенная задача аналитически неинтегрируема. Можно показать [13], что функция P периодична по α и, следовательно, имеет критические точки (например, максимум и минимум). Оказывается, если функция Пуанкаре имеет невырожденную критическую точку, то при малых $\varepsilon \neq 0$ возмущенная система имеет трансверсальную двоякоасимптотическую траекторию (при фиксированном значении энергии), в окрестности которой имеется область квазислучайного (хаотического) поведения.



В рассматриваемом случае $H_1 = -K = \mathrm{const}$ на отрезках Δ_n. Предположим (для простоты записи), что движение происходит с единичной скоростью. Тогда

$$P = -\sum K_n l_n \tag{1.4}$$

где K_n – величина кинетического момента вдоль отрезка Δ_n, а l_n – длина этого отрезка. Здесь и всюду далее, если не оговорено противное, суммирование ведется от $n = -\infty$ до $n = +\infty$.

2. Ряд Пуанкаре. Сначала заметим, что произведение $K_n l_n$ равно $2S_n$, где S_n – ориентированная площадь заштрихованного треугольника, изображенного на фигуре эллипса (0.1) : $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$. Пусть $\{\varphi_n\}$, $n \in Z$ – последовательность точек соударений вдоль двоякоасимптотической траектории σ_α. Известны следующие формулы [5]:

$$\varphi_n = 2\operatorname{arctg}\xi_n, \quad \varphi_{n+1} = (2\operatorname{arctg}\xi_{n+1}) + \pi, \quad \xi_n = \lambda^n \operatorname{tg}\alpha, \quad \xi_{n+1} = \lambda\xi_n$$

Следовательно,

$$2S_n = ab(\cos\varphi_n \sin\varphi_{n+1} - \sin\varphi_n \cos\varphi_{n+1})$$

Учитывая формулы

$$\cos\varphi_n = \frac{1-\xi_n^2}{1+\xi_n^2}, \quad \sin\varphi_n = \frac{2\xi_n}{1+\xi_n^2}$$

получаем формулу для n-го слагаемого ряда (1.4):

$$\frac{2(\lambda-1)\xi_n(\lambda\xi_n^2+1)}{(\xi_n^2+1)(\lambda^2\xi_n^2+1)}$$

В итоге имеем явное выражение для функции Пуанкаре в виде ряда

$$P(\alpha) = 2ab(1-\lambda)\sum \frac{\lambda^n \sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha + \lambda^{2n+1}\sin^2\alpha)}{(\cos^2\alpha + \lambda^{2n}\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \lambda^{2n+2}\sin^2\alpha)} \tag{2.1}$$

Покажем, что $P(\alpha) \not\equiv \mathrm{const}$. Действительно, $P(0) = 0$, а $P(\pi/4) < 0$, поскольку все члены ряда (2.1) отрицательны (надо учесть, что $\lambda > 1$). Следовательно, по теореме Пуанкаре, при малых $\varepsilon \neq 0$ вращающийся эллиптический биллиард является неинтегрируемой динамической системой.

3. Вычисление суммы ряда Пуанкаре. Разлагая общий член ряда (2.1) в сумму простых дробей, функцию Пуанкаре можно привести к виду

$$P(\alpha) = \frac{2ab(1-\lambda)}{1+\lambda}\left[\sum \frac{e^{n\tau}\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + e^{2n\tau}\sin^2\alpha} + \sum \frac{\lambda e^{n\tau}\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \lambda^2 e^{2n\tau}\sin^2\alpha}\right]$$

Заметим, что суммы этих двух бесконечных рядов равны, поскольку $\lambda = e^{\tau}$ и n

пробегает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому после преобразований получим

$$P(\alpha)=\frac{4ab(1-\lambda)\sin\alpha\cos\alpha}{1+\lambda}\sum f(2\pi n),\quad f(x)=\frac{e^{x\tau/(2\pi)}}{\cos^2\alpha+e^{x\tau/\pi}\sin^2\alpha}$$

Если $\sin\alpha=0$, то $P=0$. Если $\sin\alpha\neq 0$, то функция $f(x)$ экспоненциально быстро стремится к нулю при $|x|\to\infty$ и можно применить формулу суммирования Пуассона [14]:

$$\sum f(2\pi n)=\frac{1}{2\pi}\sum\int f(x)e^{-inx}dx$$

Эти несобственные интегралы вычисляются с помощью вычетов. В результате получаем следующую формулу для функции Пуанкаре:

$$P(\alpha)=\frac{4\pi ab(1-\lambda)}{\tau(1+\lambda)}\left[\tfrac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\pi^2 n/\tau}}{1+e^{-2\pi^2 n/\tau}}\cos\left(\frac{n\pi}{\tau}\ln\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\right] \tag{3.1}$$

Формула суммирования Пуассона использовалась ранее [7] для упрощения ряда Пуанкаре.

Сопоставим этот ряд с рядом Фурье эллиптической функции динуса [14]

$$\operatorname{dn} z=\frac{\pi}{K}\left[\tfrac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos\left(\frac{n\pi}{K}z\right)\right],\quad q=\exp\left(-\pi\frac{K'}{K}\right)$$

Здесь K – полный эллиптический интеграл второго рода, K' – полный интеграл с дополнительным модулем $k'=(1-k^2)^{1/2}$.

В (3.1) надо положить $q=e^{-\pi^2/\tau}<1$. По этому значению q можно вычислить модуль эллиптической функции k и значение полного эллиптического интеграла K. После этого функцию Пуанкаре (3.1) можно явно выразить через динус:

$$P(\alpha)=\frac{4ab(1-\lambda)K}{\tau(1+\lambda)}\operatorname{dn} z,\quad z=\frac{K}{\tau}\ln\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

Так как $(\operatorname{dn} z)'=-k^2\operatorname{sn} z\operatorname{cn} z$, критические точки функции P определяются из равенств

$$\frac{1}{\tau}\ln\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=m \tag{3.2}$$

где m – целые числа. Таким образом, на интервале $(0,\pi)$ имеется бесконечно много критических значений α (как и полагается согласно общей теории). Поскольку z как функция от α монотонна в интервалах $(0,\pi/2)$ и $(\pi/2,\pi)$, все критические точки не вырождены. При $m=0$ из (3.2) получаем два значения: $\alpha=\pi/4$ и $\alpha=3\pi/4$. Им отвечают две двоякоасимптотические траектории невозмущенной задачи, симметричные относительно оси y. При малых значениях $\varepsilon>0$ они переходят в трансверсальные двоякоасимптотические траектории возмущенной системы, что указывает, в частности, на наличие зон квазислучайных движений.

Автор благодарит С.В. Болотина за постановку задачи и внимание.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00747).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
2. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
3. *Аппель П.* Теоретическая механика. М.: Физматгиз, 1960. Т. 1. 515 с.; Т. 2. 487 с.
4. *Болотин С.В.* Интегрируемые бильярды Биркгофа // Вестн. МГУ, Сер. 1. Математика, механика. 1990. № 2. С. 33–36.
5. *Tabanov M.B.* Separatries splitting for Birkhoff's billiard in symmetric convex domain, closed to an ellipse // Chaos. 1994. P. 595–606.
6. *Levallois P., Tabanov M.B.* Separation des separatrices du billiard elliptique pour une perturbation dinamique et symetrique de l'ellipse // C.r. Acad. Sci. Paris. 1993. V. 316. No. 6. P. 589–592.
7. *Delshams A., Ramirez-Ros R.* Poincare-Melnikov-Arnold method for analytic planar maps. Nonliriarity. 1996. V. 9. No. 1. P. 1–26.
8. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
9. *Панов А.А.* Эллиптический бильярд с ньютоновским потенциалом // Мат. заметки. 1994. Т. 55. Вып. 3. С. 139–140.
10. *Козлов В.В.* Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 3–9.
11. *Robnik M.* Regular and chaotic billiard dynamics in magnetic fields // Nonlinear Phenomena and Chaos. Bristol; Boston: Adam Hilger, 1986. P. 303–330.
12. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // В кн. Избр. труды. М.: Наука, 1971. Т. 1. 771 с.; Т. 2. 999 с.
13. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995. 429 с.
14. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.X.1996