УДК 531.36:539.3

© 1998 г. В.С. Сергеев

# О НЕУСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Исследуется устойчивость движения системы, описываемой интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерры в критическом случае пары чисто мнимых корней характеристического уравнения. Получены условия неустойчивости, представляющие собой аналог известных условий [1] в теории устойчивости дифференциальных уравнений. (Подобный результат был установлен ранее [2] для интегродифференциальных уравнений более простой структуры с интегральными ядрами экспоненциально-полиномиального типа.) При доказательстве проводится ряд преобразований, позволяющих упростить исходное уравнение и, в частности, привести линеаризованное уравнение к виду дифференциального уравнения с постоянной диагональной матрицей. (Аналогичный подход применялся при анализе неустойчивости для интегродифференциальных уравнений Вольтерры в критическом случае одного нулевого корня [3, 4].) Дается пример вычисления знака постоянной Ляпунова в задаче о вращательных движениях твердого тела, имеющего вязкоупругие опоры.

**1.** Рассмотрим систему с последействием, возмущенное движение которой в окрестности исследуемого движения описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int_0^t K(t-s)x(s)ds + F(x,\tilde{y},t), \qquad x \in R^n, \quad \tilde{y} \in R^m \tag{1.1}$$

в котором $A$ – постоянная $(n \times n)$-матрица, $(n \times n)$-матрица $K(t) \in C$ определена на множестве $I = \{t \in R: t \geqslant 0\}$ и удовлетворяет неравенству

$$\|K(t)\| \leqslant C\exp(-\beta t), \quad C, \beta = \text{const} > 0 \tag{1.2}$$

В (1.1) голоморфная по $x, \tilde{y}$ вектор-функция $F(x,\tilde{y},t)$: $B_2(x,\tilde{y}) \times I \to R^n$, где $B_2(x,\tilde{y}) = \{x \in R^n, \tilde{y} \in R^m: \|x\| < R_1, \|\tilde{y}\| < R_2\}$ для заданных $R_i > 0$ ($i = 1,2$), имеет непрерывные коэффициенты разложения в степенной ряд, экспоненциально стремящиеся к постоянным при $t \to +\infty$, или постоянные коэффициенты. Функционал $\tilde{y}$ имеет вид

$$\tilde{y} = \int_0^t \tilde{K}(t-s)\phi(x(s),s)ds \tag{1.3}$$

$$\phi(x,t): B_1(x) \times I \to R^k, \qquad B_1(x) = \{x \in R^n: \|x\| < R_1\}$$

где $\phi(x, t)$ – голоморфная по $x$ вектор-функция с коэффициентами разложения того же типа, что и у $F(x,\tilde{y},t)$, $\tilde{K}(t) \in C - (m \times k)$-матрица, заданная для $t \in I$, такая, что

$$\|\tilde{K}(t)\| \leqslant \tilde{C}\exp(-\varkappa t), \qquad \tilde{C}, \ \varkappa = \text{const} > 0 \tag{1.4}$$

Будем полагать, что функции $F$ и $\phi$ таковы, что после замены $x$ на $\varepsilon x$ ($\varepsilon = \text{const}$), в том числе и в выражении (1.3), разложение $F$ в степенной ряд по $\varepsilon$ начинается с членов не ниже второго порядка.

Для уравнения (1.1)–(1.4) ставится задача Коши и исследуется устойчивость по Ляпунову нулевого решения по отношению к возмущениям начальных условий $x(0)$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения.

Если функция $\psi(t)$ удовлетворяет при $t \in I$ неравенству

$$\|\psi(t)\| \leqslant c\exp(\gamma t), \qquad c = \text{const} > 0$$

то будем писать $\psi(t) \in e_1(\gamma)$, т.е. $\psi(t)$ принадлежит классу $e_1(\gamma)$.

Аналогично, если $\psi_1(t, s)$ – функция, определенная на множестве $J = \{(t, s) \in R^2: 0 \leqslant s \leqslant t < +\infty\}$, удовлетворяет неравенству

$$\|\psi_1(t,s)\| \leqslant c\exp[\gamma(t-s)]$$

то будем считать, что $\psi_1(t,s) \in e_2(\gamma)$.

Пусть $K^*(\lambda)$ – преобразование Лапласа для матрицы $K(t)$. Характеристическое уравнение для (1.1)

$$\det(\lambda E_n - A - K^*(\lambda)) = 0 \tag{1.5}$$

в силу (1.2) существует при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant -\beta$ и определитель в (1.5) аналитичен при $\operatorname{Re}\lambda > -\beta$. Будем полагать, что уравнение (1.5) имеет в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > -\beta$ конечное число корней $\lambda'_j$ $(j = 1,\ldots,N)$, занумерованных в порядке возрастания вещественных частей, причем $\operatorname{Re}\lambda'_j < 0$ $(j = 1,\ldots,N-2)$ и $\lambda'_{N-1} = i\omega$, $\lambda'_N = -i\omega$, $\omega > 0$. Пусть $\lambda_l$ ($l = 1, \ldots, n$), характеристические показатели решений линеаризованного уравнения (1.1), таковы, что

$$-\beta < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ \ldots \ \leqslant \lambda_{n-2} < \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0 \tag{1.6}$$

и все корни характеристического уравнения, отвечающие $\lambda_l$ ($l = 1, \ldots, n$), являются простыми и $\operatorname{Re}\lambda'_s < \lambda_1 (s = 1,\ldots,N-n)$; среди них могут иметься комплексно сопряженные $\lambda_s = \mu_s + i\omega_s$, $\lambda_{s+1} = \mu_s - i\omega_s$ ($s = 1, \ldots, p$). Тогда [5] резольвенту линеаризованного уравнения (1.1) можно представить в виде

$$R(t) = \sum_{l=N-n+1}^{N} p_l \exp(\lambda'_l t) + R_1(t), \qquad t \in I, \qquad p_l = \text{const} \tag{1.7}$$

где $(n \times n)$-матрица $R_1(t) \in C^1$ такова, что $R_1(t) \in e_1(-\beta_1)$, где $\beta_1 > 0$ – постоянная, удовлетворяющая неравенству $-\beta < -\beta_1 < \lambda_1$. Будем полагать, что для некоторого $\beta' \geqslant \beta_1$

$$dR_1(t)/dt \in e_1(-\beta') \tag{1.8}$$

**2.** Проведем ряд преобразований, позволяющих выделить критические переменные. Введем фундаментальную матрицу $X'(t)$ решений линеаризованного уравнения (1.1), нормальную в смысле Ляпунова [1]. Если $x'_l(t)$ ($l = 1, \ldots, n$) – фундаментальные решения (столбцы матрицы $X'(t)$), то имеем для характеристических показателей равенства $\chi(x'_j(t)) = \lambda_j$ $(j = 1,\ldots,n-2)$ и

$$x'_{n-1}(t) = 2(a\cos\omega t - b\sin\omega t) + x''_{n-1}(t)$$

$$x'_n(t) = 2(b\cos\omega t + a\sin\omega t) + x''_n(t) \tag{2.1}$$

где $a$, $b$ – постоянные векторы и $\chi(x_k''(t)) \leqslant \lambda_{n-2}$, $k = n-1, n$. Введем функцию

$$d(t) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j t\right) \det X'(t) \tag{2.2}$$

которую, как следует из структуры фундаментальных решений, можно представить в виде $d(t) = d_0 + d_1(t)$, где $d_0 = \text{const}$ и $d_1(t) \in e_1(\lambda_{n-2})$. Будем полагать, что функция (2.2) при $t \in I$ удовлетворяет условию

$$|d(t)| \geqslant d' > 0, \quad d' = \text{const} \tag{2.3}$$

Рассмотрим сопряженный для $x_l'(t)$ базис $y_l'(t)$, вектор-строки которого составляют матрицу $Y'(t) = (y_{lj}'(t))$, такую, что $Y'(t)X'(t) = E_n$. Введем фундаментальную матрицу $X(t-s)$ $(X(0) = E_n)$ решений линеаризованного уравнения (1.1) с нижним пределом интегрирования $s$, с помощью которой общее решение уравнения (1.1) можно представить в виде интегральной формулы Коши [6].

Из структуры общего решения (1.7) и (2.3) вытекает, что линеаризованное уравнение (1.1) является правильным в смысле Ляпунова. Следовательно, имеют место равенства $\chi(y_l'(t)) = -\lambda_l$ $(l = 1,\ldots,n)$, и

$$\begin{aligned} & y_{lj}'(t) = \exp(-\lambda_l' t)(c_{lj} + y_{lj}''(t)) \\ & y_{n-1j}'(t) = \delta_j(b)\cos\omega t + \delta_j(a)\sin\omega t + y_{n-1j}''(t) \\ & y_{nj}''(t) = -\delta_j(a)\cos\omega t + \delta_j(b)\sin\omega t + y_{nj}''(t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $c_{lj}$ – постоянные (вещественные или комплексные), $\delta_j(a)$, $\delta_j(b)$ – вещественные постоянные и $y_{kj}''(t) \in e_1(\alpha)$, $\alpha < 0$ $(k, j = 1,\ldots,n;\ l = 1,\ldots,n-2)$. Сделаем замену переменных

$$y_l = x_l, \quad y_k = \sum_{j=1}^{n} y_{kj}'(t) x_j, \quad l = 1,\ldots,n-2, \quad k = n-1, n \tag{2.5}$$

с непрерывными ограниченными при $t \in I$ коэффициентами, которая при выполнении неравенства

$$\begin{aligned} & \delta(t) = |y_{n-1n-1}'(t)y_{nn}'(t) - y_{n-1n}'(t)y_{nn-1}'(t)| = \\ & = |\delta_0 + \delta_1(t)| \geqslant \delta_0' > 0, \quad \delta_0, \delta_0' = \text{const}, \quad \delta_1(t) \in e_1(\alpha) \ (\alpha < 0) \end{aligned} \tag{2.6}$$

будет принадлежать к типу преобразований Ляпунова. Переходя к комплексно-сопряженным переменным

$$w_{n-1} = y_{n-1} + iy_n, \quad w_n = y_{n-1} - iy_n \tag{2.7}$$

ввиду (2.6) имеем для преобразования, обратного к (2.5), формулы

$$x_s = \sum_{k=n-1,n} W_{sk}(t)\exp(\pm i\omega t) w_k + \sum_{j=1}^{n-2} Y_{sj}(t) y_j, \quad s = n-1, n$$

$$W_{sk}(t) = W_{sk}^{(0)} + W_{sk}^{(1)}(t), \quad Y_{sj}(t) = Y_{sj}^{(0)} + Y_{sj}^{(1)}(t); \quad W_{sk}^{(0)}, \ Y_{sj}^{(0)} = \text{const}$$

$W_{sk}^{(1)}(t)$, $Y_{sj}^{(1)}(t) \in e_1(-\gamma)$ для некоторого $\gamma > 0$.

Знак плюс берется для $k = n$ и минус – для $k = n-1$.

3. Преобразуем подсистему для некритической переменной $y = \text{col}(y_1,\ldots,y_{n-2})$. С этой целью введем фундаментальную матрицу $X_2'(t)$ решений линеаризованной однородной подсистемы для $y$, нормальную по Ляпунову. Матрица $X_2'(t)$ получается из $X'(t)$

вычеркиванием $n-1$ и $n$ строк и столбцов. Так же по матрице $X(t-s)$ строится для этой подсистемы фундаментальная матрица $X_2(t-s)$ $(X_2(0)=E_{n-2})$.

Пусть $\Lambda_2'=\operatorname{diag}(\lambda_{N-n+1}',\ldots,\lambda_{N-2}')$, где $\operatorname{Re}\lambda_{N-n+l}'=\lambda_l (l=1,\ldots,n-2)$. Будем полагать, что при $t\in I$ выполнено условие

$$|\det(X_2't)\exp(-\Lambda_2't))|\geqslant\delta_2'>0,\quad \delta_2'=\text{const} \tag{3.1}$$

Отметим, что определитель в неравенстве (3.1) экспоненциально стремится к постоянной при $t\to+\infty$.

Введем матрицу $Y_2'(t)$ такую, что $Y_2'(t)X_2'(t)=E_{n-2}$. Сделаем замену

$$z=\exp(\Lambda_2't)Y_2'(t)y \tag{3.2}$$

с непрерывными ограниченными при $t\in I$ коэффициентами, стремящимися к постоянным при $t\to+\infty$. В результате преобразований (2.5), (2.7), (3.2) получим, применяя лемму 1 из [3], уравнения, аналогичные уравнениям (2.2), (3.4) в [2], из которых выпишем только уравнения для критических переменных

$$\frac{dw_k}{dt}=\int\limits_0^t\sum_{j=1}^n(\varphi_{n-1j}(t,s)\pm i\varphi_{nj}(t,s))F_j'(z(s),w(s),\hat{y}(s),s)ds+$$

$$+\sum_{j=1}^n(y_{n-1j}'(t)\pm iy_{nj}'(t))F_j'(z,w,\hat{y},t),\qquad k=n-1,n;\quad w=\operatorname{col}(w_{n-1},w_n) \tag{3.3}$$

где $\hat{y}(t)$ – интеграл (1.3), преобразованный к переменным $z$, $w$, функции $F_j'$-преобразованные к $z$, $w$ компоненты вектора $F$ в (1.1). Верхний знак в (3.3) соответствует $k=n-1$. В уравнениях (3.3)

$$\varphi_{kj}(t,s)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{l=1}^n y_{kl}'(t)x_{lj}(t-s)\right),\qquad k=n-1,n \tag{3.4}$$

Уравнения (3.3), а также уравнения для некритических переменных, отвечающие комплексно-сопряженным элементам матрицы $\Lambda_2'$, являются комплексно-сопряженными. Согласно (2.4) имеем

$$y_{n-1j}'(t)\pm iy_{nj}'(t)=c_j'\exp(\pm i\omega t)+\tilde{y}_j'(t),\qquad c_j'=\text{const},\qquad \tilde{y}_j'(t)\in e_1(-\gamma),\ \gamma>0$$

Можно так же показать, используя (3.4) и связь между $y_{ki}'(t)$ и $x_{ij}(t)$ и проведя соответствующие вычисления, что

$$\varphi_{n-1j}(t,s)+i\varphi_{nj}(t,s)=\exp(i\omega t)\Phi_j(t-s)+\tilde{\Phi}_j(t,s),\qquad \Phi_j(t)\in e_1(-\gamma) \tag{3.5}$$

где $\tilde{\Phi}_j(t,s)$ – сумма слагаемых вида $\varphi_1(t)\varphi_2(t,s)$, причем $\varphi_1(t)\in e_1(-\gamma_1)$, $\varphi_2(t,s)\in$ $\in e_2(-\gamma_2)$ для $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$.

В (3.3) и в подсистеме для некритических переменных все коэффициенты $\xi(t)$ членов, зависящих только от $z_l$ ($l=1,\ldots,n-2$) и стоящих вне знака интеграла, имеют структуру $\xi(t)=\xi_0+\xi_1(t)$, где $\xi_0$ = const, $\xi_1\in e_1(-\gamma)$ для некоторого $\gamma>0$, и все интегральные ядра принадлежат классу $e_2(-\gamma)$.

Схема дальнейшего исследования повторяет в общих чертах доказательство, проведенное ранее [2]. В частности, интегрированием по частям и заменой переменных вида

$$u=z+U_{4m}(w,t)+\sum_{sm(0,1)=1}w_{n-1}^k w_n^l\int\limits_0^t N^{m(0,1)}(t,s)w_{n-1}^{k1}(s)w_n^{l1}(s)u(s)ds+U_{2m+1}'(w,t)$$

где $k, l, k1, l1$ – целые неотрицательные числа, $m(0, 1)$ – набор этих чисел, $sm(0, 1)$ – их сумма, $U_{4m}(w, s)$ – полином по $w$ степени $4m$ с непрерывными ограниченными коэффициентами, $U'_{2m+1}(w,t)$ – конечная сумма интегральных членов (типа указанного) более второй степени, линейных по $u$, содержащих кратные интегралы с непрерывными ядрами класса $e_2(-\gamma)$ для $\gamma > 0$, можно исключить из уравнения для некритических переменных последовательно все члены, зависящие только от переменных $w_{n-1}$, $w_n$ до некоторого порядка $4m$ включительно, и интегральные члены, линейные по некритической переменной до порядка $2m + 1$ включительно. Запишем преобразованное таким образом уравнение в виде

$$du / dt = \Lambda_2' u + U(u, w, t)$$

где интегральный оператор $U$ обладает описанными выше свойствами.

Далее после серии упрощающих преобразований, которые позволяют привести члены до порядка $2m + 1$ в правой части уравнений (3.3) к автономной форме, эти уравнения примут вид

$$dw_j' / dt = \sum_{k=1}^{m} C_j^{(k)} r^{2k} w_j' + \phi_j(u, w', t) \tag{3.6}$$

$$w' = \mathrm{col}(w_{n-1}', w_n'), \qquad C_j^{(k)} = \mathrm{const}, \qquad r^2 = w_{n-1}' w_n'$$

где $w'$ – новая критическая переменная, $\phi_j(u, w', t)$ – интегральный оператор, такой, что разложение по $\varepsilon$ для $\phi_j(\varepsilon u, \varepsilon w', t)$ начинается с членов второго порядка по $\varepsilon$ и все члены до порядка $2m + 1$ включительно обращаются в нуль при $u = 0$. Отметим, что уравнения (3.6) для $j = n - 1$ и $j = n$ являются комплексно-сопряженными.

На основании (3.6) составим вещественное уравнение

$$r\frac{dr}{dt} = \sum_{k=1}^{m} g_{2k+1} r^{2k+2} + R^{(3)}(\upsilon, \upsilon', t) + R^{(2m+3)}(\upsilon, \upsilon', t), \qquad g_{2k+1} = \mathrm{const} \tag{3.7}$$

в котором $\upsilon = \mathrm{col}(\upsilon_1, \dots, \upsilon_{n-2})$, $\upsilon' = \mathrm{col}(\upsilon_{n-1}, \upsilon_n)$ – векторы вещественных переменных, отвечающих $u$, $w'$, а $R^{(3)}$, $R^{(2m+3)}$ – вещественные интегральные операторы, такие, что $R^{(3)}(\varepsilon\upsilon, \varepsilon\upsilon', t)$ – многочлен по $\varepsilon$ степени $2m + 2$, начинающийся с членов третьего порядка, причем $R^{(3)}(0, \upsilon', t) \equiv 0$, а разложение в ряд по $\varepsilon$ для $R^{(2m+3)}(\varepsilon\upsilon, \varepsilon\upsilon', t)$ начинается с членов порядка $2m + 3$.

Пусть в уравнении (3.7) $g_3 = \dots = g_{2m-1} = 0$ и $g_{2m+1} > 0$.

Так же, как в [2, 3], на основании теоремы Четаева о неустойчивости [7, 8], справедливой для интегродифференциальных уравнений рассматриваемого типа доказывается неустойчивость невозмущенного движения.

*Теорема.* Пусть для уравнения (1.1)–(1.4) характеристическое уравнение (1.5) в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > -\beta$ имеет конечное число корней $\lambda_j'$ $(j = 1, \dots, N)$, причем $\mathrm{Re}\,\lambda_j' < 0$ $(j = 1, \dots, N-2)$ и $\lambda_{N-1}' = i\omega$, $\lambda_N' = -i\omega$, и пусть все корни $\lambda_s'$ $(s = 1, \dots, n)$, отвечающие характеристическим показателям $\lambda_s$ (1.6), являются простыми и $\mathrm{Re}\,\lambda_l' < \lambda_1$ $(l = 1, \dots, N - n)$. Предположим, что выполнены условия (1.8), (2.3), (2.6), (3.1).

Тогда, если в уравнении (3.7) первая отличная от нуля постоянная $g_{2m+1} > 0$, то нулевое решение уравнения (1.1)–(1.4) неустойчиво.

**4.** Исследуем устойчивость положения равновесия в примере, аналогичном рассмотренному ранее в [9]. Пусть твердое тело представляет собой вал $AB$ с распределением масс, одинаковым в каждом сечении. К концам вала присоединены жестко связанные с ним два вязкоупругих тела $OA$ и $BO_1$ (вала единичной длины и пренебрежимо малой массы), концы которых закреплены. Вся система может совершать вращательные движения вокруг оси $OO_1$, по предположению недеформируемой. Пусть $\vartheta$ – угол поворота вала, $r$ – расстояние центра масс вала от оси $OO_1$, $mg$ – его вес, $J$ – его момент инерции относительно оси $OO_1$. Движение твердого тела происходит в однородном поле силы тяжести под влиянием вязкоупругих сил, действующих на тело в торцах $A$ и $B$ со стороны тел $OA$ и $BO_1$. Момент $M$ этих сил возьмем в виде, предложенном ранее [10, 11], считая, что зависимость напряжения от деформации задается рядом Вольтерры–Фреше, из которого сохраним только те первые члены, которые влияют на получаемые ниже условия, т.е.

$$M=-k\vartheta+\int_0^t K'(t-s)\vartheta(s)ds+\int_0^t\int_0^t\int_0^t \tilde{K}(t-u,t-v,t-w)\vartheta(u)\vartheta(v)\vartheta(w)du\,dv\,dw \tag{4.1}$$

($k$ – модуль упругости при кручении, $K'(t)$, $\tilde{K}(t_1,t_2,t_3)$ – ядра релаксации). Будем считать, что ([11], с. 606)

$$\tilde{K}(t-u,t-v,t-w)=K''(t-u)K''(t-v)K''(t-w)$$

Исследуем устойчивость при вращательных движениях положения равновесия твердого тела с верхним расположением его центра масс для $\vartheta=0$. Уравнения возмущенного движения запишем в виде

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\vartheta_1,\quad \frac{d\vartheta_1}{dt}=-K\vartheta+\int_0^t K_1(t-s)\vartheta(s)ds-m_1\vartheta^3+\tilde{y}^3+o(\vartheta^5) \tag{4.2}$$

$$K=\frac{k-mgr}{J},\quad K_1(t)=\frac{K'(t)}{J},\quad K_2=\frac{K''(t)}{J^{1/3}},\quad m_1=\frac{mgr}{3!J},\quad \tilde{y}=\int_0^t K_2(t-s)\vartheta(s)ds$$

Пусть ядро $K''(t)$ удовлетворяет оценке вида (1.4). Предположим, что характеристическое уравнения для (4.2) имеет два чисто мнимых корня $\pm i\omega$ и остальные корни с отрицательными вещественными частями и выполнены условия теоремы.

Проведя соответствующие вычисления, получим, что знак постоянной $g_3$ определяется знаком величины

$$g_3'=\mathrm{Re}\left\{\left[-m_1+\left(\int_0^\infty K_2(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau\right)^2\int_0^\infty K_2(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]\left[(a_1-ib_1)\int_0^\infty \Phi_2(s)ds+\frac{i}{2\omega}\right]\right\} \tag{4.3}$$

где $a_1, b_1$ – компоненты векторов $a$, $b$, введенных в (2.1), и $\Phi_2(s)=\Phi_2^{(1)}(s)+i\Phi_2^{(2)}(s)$ – функция, фигурирующая в представлении (3.5).

Если $g_3'>0$, то по доказанной теореме равновесие неустойчиво.

В случае, когда ядро $K(t)$ имеет экспоненциально-полиномиальную структуру, функция $\Phi_2(t)$ может быть вычислена в явном виде по известному общему решению линеаризованного уравнения. Так, пусть ядро $K_1(t)$ имеет вид

$$K_1(t)=Q_1\exp(-\gamma_1 t)+Q_2\exp(-\gamma_2 t)$$

где постоянные $Q_i$, $\gamma_i$ $(i=1,2)$ удовлетворяют неравенствам

$$Q_1>0,\ Q_2<0,\ Q_1\geqslant|Q_2|,\ \gamma_1>\gamma_2>0 \tag{4.4}$$

При выполнении условий (4.4) характеристическое уравнение

$$\Phi(\lambda)\equiv\lambda^2+K-\frac{Q_1}{\lambda+\gamma_1}-\frac{Q_2}{\lambda+\gamma_2}=0$$

имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega$, где

$$\omega^2=K-\chi_0,\quad \chi_0=\frac{Q_1+Q_2}{\gamma_1+\gamma_2}$$

и два корня $\lambda_1'$, $\lambda_2'$ с отрицательными вещественными частями

$$\lambda_{1,2}' = -\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2) \pm \left[\frac{1}{4}(\gamma_1+\gamma_2)^2 - \gamma_1\gamma_2 - \chi_0\right]^{1/2}$$

если между параметрами системы существует соотношение

$$K = \gamma_1\gamma_2 + \chi_0^{-1}(\chi_0^2 - Q_1\gamma_2 - Q_2\gamma_1)$$

Пусть для простоты $\lambda_1'$, $\lambda_2'$ – вещественные числа, тогда решение линеаризованного уравнения возмущенного движения можно записать в форме

$$\vartheta(t) = (\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-1}[(\alpha_1 - i\alpha_2)\exp(i\omega t)(i\omega\vartheta(0)+\vartheta_1(0))+$$
$$+(\alpha_1+i\alpha_2)\exp(-i\omega t)(-i\omega\vartheta(0)+\vartheta_1(0))] + \sum_{k=1,2}\exp(\lambda_k' t)(\lambda_k'\vartheta(0)+\vartheta_1(0))/\Phi'(\lambda_k') \qquad (4.5)$$

где постоянные $\alpha_1, \alpha_2$ определяются соотношением (штрих у функции $\Phi$ означает производную)

$$\Phi'(i\omega) = \alpha_1 + i\alpha_2$$

Используя (4.5), вычислим функции $\Phi_2^{(k)}(t)$ $(k=1,2)$ которые, как можно показать, удовлетворяют тождеству

$$a_1\Phi_2^{(1)}(t) + b_1\Phi_2^{(2)}(t) \equiv 0$$

Тогда знак $g_3'$ (4.3) будет совпадать со знаком величины $g_3''$:

$$g_3'' = -\phi_0\int_0^\infty K_2(s)\sin(\omega s)ds \qquad (4.6)$$

$$\phi_0 = 2\int_0^\infty(-b_1\Phi_2^{(1)}(s) + a_1\Phi_2^{(2)}(s))ds + \omega^{-1}$$

Для вычисления постоянной $\phi_0$ можно дать такую формулу:

$$\phi_0 = \frac{1}{\omega}\left(1 - \sum_{k=1,2}\frac{\omega^2+\lambda_k'^2}{\lambda_k'\Phi'(\lambda_k')}\right)$$

Пусть, например, в соответствии с (4.4) $\gamma_1 = 3\gamma_0$, $\gamma_2=\gamma_0$, $Q_1 = 2\gamma_0^3$, $Q_2 = -\gamma_0^3$, где $\gamma_0 > 0$. В этом случае $\phi_0 = 12\gamma_0/(13\sqrt{7}) > 0$ и условие неустойчивости приводится к условию отрицательности интеграла в равенстве (4.6) для $g_3''$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00261, 96-15-96051).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
2. *Сергеев В.С.* О неустойчивости решений интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра в критическом случае пары чисто мнимых корней // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1987. С. 38–56.
3. *Сергеев В.С.* О неустойчивости нулевого решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1443–1454.
4. *Сергеев В.С.* О неустойчивости решений интегродифференциальных уравнений в одном случае // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1988. С. 67–81.
5. *Jordan J.S., Wheeler R.L.* Structure of resolvents of Volterra integral and integrodifferential systems // SIAM Journal Math. Anal. 1980. V. 11. No. 1. P. 119–132.

6. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегродифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во Киргиз. ун-та, 1957. 327 с.
7. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
8. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
9. *Сергеев В.С.* Об асимптотической устойчивости и оценке области притяжения в некоторых системах с последействием // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 744–751.
10. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
11. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.XI.1996