

УДК 531.36:532.3

© 1998 г. Е.В. Абрарова

## О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДВУХ УПРУГО СВЯЗАННЫХ ТЕЛ

Рассматривается задача о существовании, ветвлении и устойчивости стационарных движений системы двух упруго связанных тел в центральном гравитационном поле. Каждое из тел моделируется безмассовым стержнем, на противоположных концах которого расположены точечные массы. Предполагается, что стержни упруго связаны в центре масс, а составное тело движется в плоскости, содержащей притягивающий центр. Изучаются как тривиальные, так и не тривиальные стационарные движения, при которых ни одна из главных осей инерции тела не совпадает с радиус-вектором центра масс или с касательной к орбите, при этом стержни не взаимно ортогональны. Полностью исследована устойчивость всех стационарных движений и приведен атлас бифуркационных диаграмм.

Ранее были исследованы стационарные движения двух жестко связанных стержней [1], а также двух точечных масс на пружине [2].

1. Рассмотрим плоское поступательно-вращательное движение системы двух упруго связанных тел в центральном гравитационном поле. Каждое из тел будем моделировать безмассовым стержнем  $d_s$  длины  $2a$ , на противоположных концах которого расположены точечные массы  $m_s/2$  ( $s = 1, 2$ ). Предположим, что стержни упруго связаны один с другим в центре масс, а составное тело движется в плоскости, содержащей притягивающий центр.

Положение составного тела полностью определяется четырьмя обобщенными координатами: расстоянием  $r$  от центра масс  $G$  тела до притягивающего центра  $O$ , углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  между прямой  $OG$  и стержнями  $d_1$  и  $d_2$  соответственно, углом  $\varphi$  между некоторым неподвижным в плоскости движения направлением и прямой  $OG$ .

Кинетическая ( $T$ ) и потенциальная ( $V$ ) энергии имеют вид

$$2T = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + m_1 a^2 (\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_1)^2 + m_2 a^2 (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_2)^2$$

$$2V = -fM \sum_{i=1}^2 m_i (F_{i+} + F_{i-}) + V_e, \quad F_{i\pm} = (r^2 + a^2 \pm 2ar\gamma_i)^{-1/2}, \quad \gamma_i = \cos \varphi_i$$

Здесь  $M$  – масса притягивающего центра,  $m = m_1 + m_2$  – масса тела,  $f$  – гравитационная постоянная,  $V_e$  – потенциальная энергия деформаций. Будем полагать, что  $V_e = k(\varphi_1 + \varphi_2 - \pi/2)^2$ , где  $k$  – коэффициент жесткости упругого соединения стержней.

Функция Лагранжа  $L = T - V$  не зависит от угла  $\varphi$ . Следовательно, уравнения движения тела помимо интеграла энергии  $T + V = h = \text{const}$  допускают интеграл площадей

$$\partial T / \partial \dot{\varphi} = \kappa = \text{const} \tag{1.1}$$

а тело может совершать движения вида

$$r = r^\circ = \text{const}, \quad \varphi_1 = \varphi_1^\circ = \text{const}, \quad \varphi_2 = \varphi_2^\circ = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = \omega^\circ = \text{const} \tag{1.2}$$

При этом центр масс тела совершает равномерные круговые движения вокруг притягивающего центра, тело сохраняет постоянную ориентацию относительно этого центра и угол между стержнями постоянен.

Игнорируя циклическую переменную  $\varphi$ , вводя функцию Рауса посредством соотношения  $R = R(r, \varphi_1, \varphi_2, r, \varphi_1, \varphi_2, \kappa) = T - V - \kappa\varphi$ , в правой части которого переменная  $\varphi$  исключена с помощью интеграла площадей, и выбирая, без уменьшения общности, единицы измерения так, что  $fM = 1, a = 1, m_1 \geq m_2$ , выпишем эффективный потенциал

$$W^* = -R_0 = m_1 V - \frac{\kappa^2}{2(1+\mu)(r^2+1)}, \quad \mu = m_2 / m_1 \in (0;1]$$

Постоянные  $r^\circ, \varphi_1^\circ, \varphi_2^\circ$  в (1.2) отвечают критическим точкам эффективного потенциала, т. е. критическим точкам функции  $W = W^*/m_1$ , а постоянная  $\omega^\circ$  в (1.2) определяется из соотношения (1.1):  $\omega^\circ = \kappa/[m(r^2+1)]$ .

2. Найдем критические точки функции  $W$ . Для этого рассмотрим систему уравнений

$$W_{\varphi_i} = \frac{r \sin \varphi_1}{2} \mu^{i-1} [F_{i-}^3 - F_{i+}^3] + \tilde{k} \left( \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (2.1)$$

$$W_r = \frac{1}{2} (G_1 + \mu G_2) - \frac{\kappa^2 r}{(1+\mu)(r^2+1)^2} = 0 \quad (2.2)$$

$$W_{\varphi_i} = \partial W / \partial \varphi_i, \quad W_r = \partial W / \partial r$$

$$G_i = (r + \gamma_i) F_{i+}^3 + (r - \gamma_i) F_{i-}^3, \quad i = 1, 2, \quad \tilde{k} = k / m_1$$

Уравнение (2.1) тождественно по  $r$  удовлетворяется значениями

$$1) \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi / 2 \pmod{\pi}$$

$$2) \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 = \pi / 2 \pmod{\pi}$$

При этом уравнение (2.2) принимает вид

$$\kappa^2 = H_i(r) \equiv (1+\mu) \left( p_i (r^2+1)^{1/2} + q_i \frac{(r^2+1)^2}{2r} \left[ \frac{1}{(r+1)^2} + \frac{\text{sign}(r-1)}{(r-1)^2} \right] \right), \quad i = 1, 2$$

$$(p_1 = q_2 = \mu, \quad p_2 = q_1 = 1)$$

Анализ функций  $H_i(r)$  аналогичен проведенному ранее [1] и приводит к выводу, что уравнение (2.2) не имеет решений при  $\kappa_{22}^{\circ 2} < \kappa^2 < \kappa_{1s}^{\circ 2}$ , имеет два семейства решений  $r = r_{1s}^\pm(\kappa^2)$  при  $\kappa^2 > \kappa_{1s}^{\circ 2}$  для всех значений  $\mu$ , а при  $\mu \in (0; 0,06)$  – два семейства решений  $r = r_{22}^\pm(\kappa^2)$  при  $H_2(0) < \kappa^2 < \kappa_{22}^{\circ 2}$ , причем  $r_{is}^+(\kappa^2) > r_{is}^\circ > r_{is}^-(\kappa^2)$  ( $i, s = 1, 2$ ). Здесь

$$H'_s > 0 \quad (H'_s < 0) \quad \text{при} \quad r = r_{is}^+(\kappa^2) \quad (r = r_{is}^-(\kappa^2)), \quad H'_s(r_{is}^\circ) = 0$$

$$\kappa_{1s}^\circ = H_s(r_{1s}^\circ), \quad \kappa_{22}^\circ = \begin{cases} H_2(r_{22}^\circ), & \mu \in (0; 0,06) \\ H_2(0), & \mu \in [0,06; 0,5) \\ 0, & \mu \in [0,5; 1] \end{cases}$$

Во всех остальных случаях уравнение (2.2) имеет единственное решение.

Отметим, что  $\kappa_{22}^{\circ 2} < \kappa_{1s}^{\circ 2}$ , ( $s = 1, 2$ ), а также  $r_{11}^\circ > r_{12}^\circ > r_{22}^\circ, H_1 > H_2$  при  $\mu \in (0; 1)$ ;  $r_{11}^\circ = r_{12}^\circ, H_1 = H_2$  при  $\mu = 1$ .

Очевидно, решениям вида

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi/2, \quad r = r_{11}^{\pm}(\chi^2) \quad (2.3)$$

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 = \pi/2, \quad r = r_{12}^{\pm}(\chi^2), \quad r = r_{22}^{\pm}(\chi^2) \quad (2.4)$$

отвечают ориентации тела, при которых одна из его главных центральных осей инерции направлена по радиус-вектору центра масс, а другая – по касательной к орбите, при этом стержни взаимно ортогональны.

3. Выясним характер критических точек (2.3) эффективного потенциала, для чего вычисляем коэффициенты матрицы второй вариации функции  $W$  на решении (2.3):

$$C_{11}^{(1)} = W_{rr}^{\circ} \equiv \frac{r}{m(r^2 + 1)^2} H_1'(r), \quad C_{12}^{(1)} = W_{r\varphi_1}^{\circ} \equiv 0, \quad C_{13}^{(1)} = W_{r\varphi_2}^{\circ} \equiv 0 \quad (3.1)$$

$$C_{22}^{(1)} = W_{\varphi_1\varphi_1}^{\circ} \equiv \frac{r(3r^2 + 1)}{(r^2 - 1)^3} + \tilde{k}, \quad C_{23}^{(1)} = W_{\varphi_1\varphi_2}^{\circ} \equiv \tilde{k}, \quad C_{33}^{(1)} = W_{\varphi_2\varphi_2}^{\circ} \equiv \tilde{k} - \frac{3\mu r^2}{(r^2 + 1)^{5/2}}$$

Условия устойчивости стационарных движений (2.3) определяются неравенствами

$$C_{11}^{(1)} > 0, \quad C_{22}^{(1)} > 0, \quad G^{(1)} = C_{22}^{(1)}C_{33}^{(1)} - (C_{23}^{(1)})^2 > 0 \quad (3.2)$$

Знак  $C_{11}^{(1)}$  совпадает со знаком  $dH_1/dr$ , т. е.  $C_{11}^{(1)} \geq 0$  при  $r = r_{11}^{\pm}(\chi^2)$ , а  $C_{22}^{(1)} > 0$ .

Анализ поведения  $G^{(1)}$  в зависимости от параметров  $\tilde{k}$ ,  $\mu$  показывает, что если  $\tilde{k}/\mu < 3\sqrt{2}/8$ , то  $G^{(1)} = 0$  при  $r = r_{11}$ , причем  $G^{(1)} < 0$  ( $G^{(1)} > 0$ ) при  $1 < r < r_{11}$  ( $r > r_{11}$ ); в противном случае  $G^{(1)} > 0$  при любых  $r \in (1; \infty)$ .

Аналогичным образом исследуется характер критических точек (2.4) эффективного потенциала. Условия устойчивости стационарных движений (2.4) определяются неравенствами, соответствующими (3.2) при замене верхнего индекса 1 на 2; при этом в равенствах (3.1) замена верхнего индекса 1 на 2 сопровождается круговой заменой индексов  $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$  и заменой  $(r^2 - 1)^3$  на  $|r^2 - 1|^3$ .

Знак  $C_{11}^{(2)}$  совпадает со знаком  $dH_2/dr$ , т. е.  $C_{11}^{(2)} \geq 0$  при  $r = r_{12}^{\pm}(\chi^2)$ ,  $C_{22}^{(2)} > 0$ .

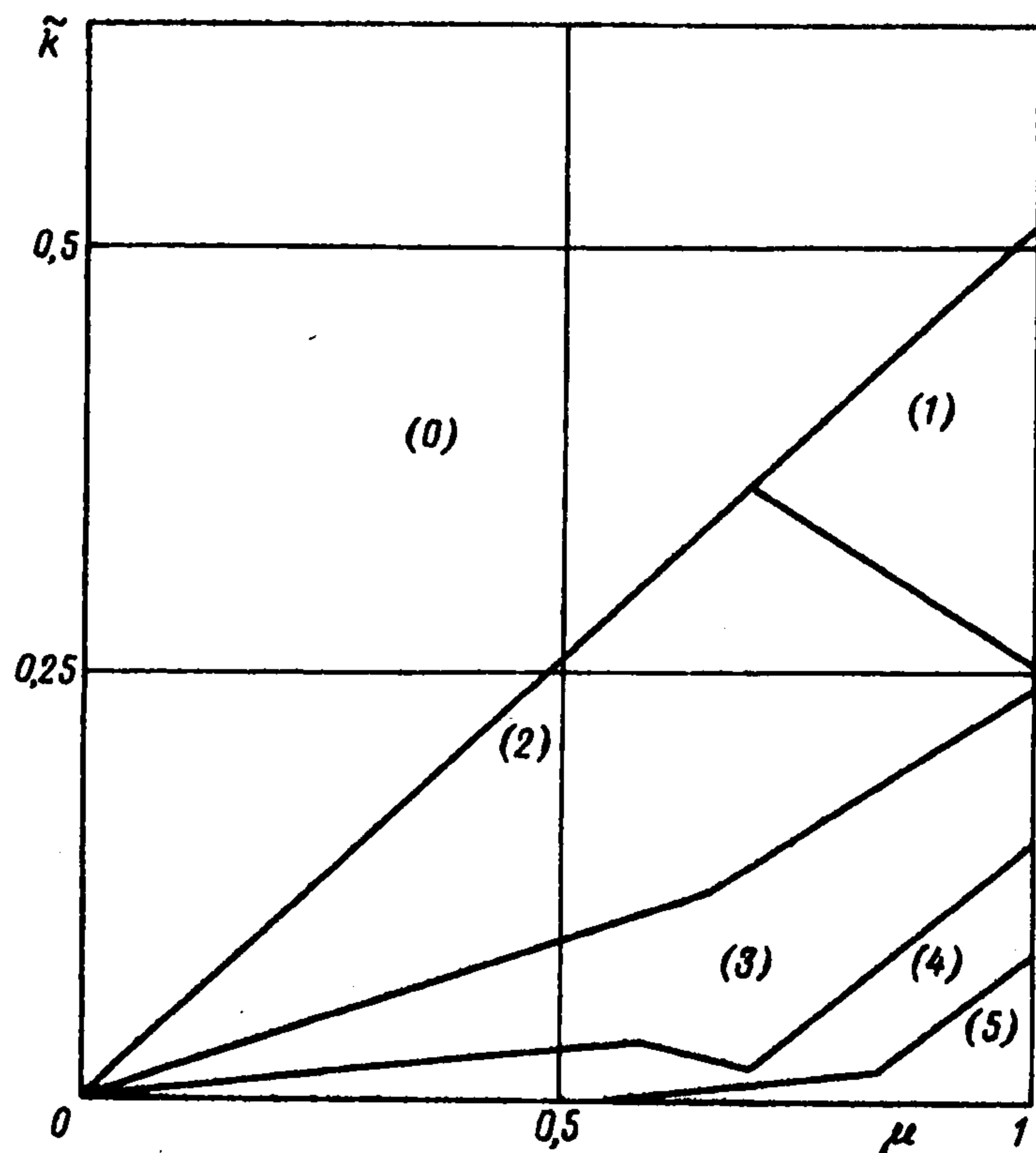
Анализ поведения  $G^{(2)}$  в зависимости от параметров  $\tilde{k}$ ,  $\mu$  показывает, что для некоторых значений параметров  $G^{(2)} = 0$  при  $r = r_{12}$  и  $r = r_{22}$ , при этом  $G^{(2)} < 0$  ( $G^{(2)} > 0$ ) при  $0 < r < r_{22}$ ,  $r > r_{12}$  ( $r_{22} < r < 1$ ;  $1 < r < r_{12}$ ), в противном случае  $G^{(2)} > 0$  при всех  $r \in (0; \infty)$ .

Таким образом, заключаем следующее:

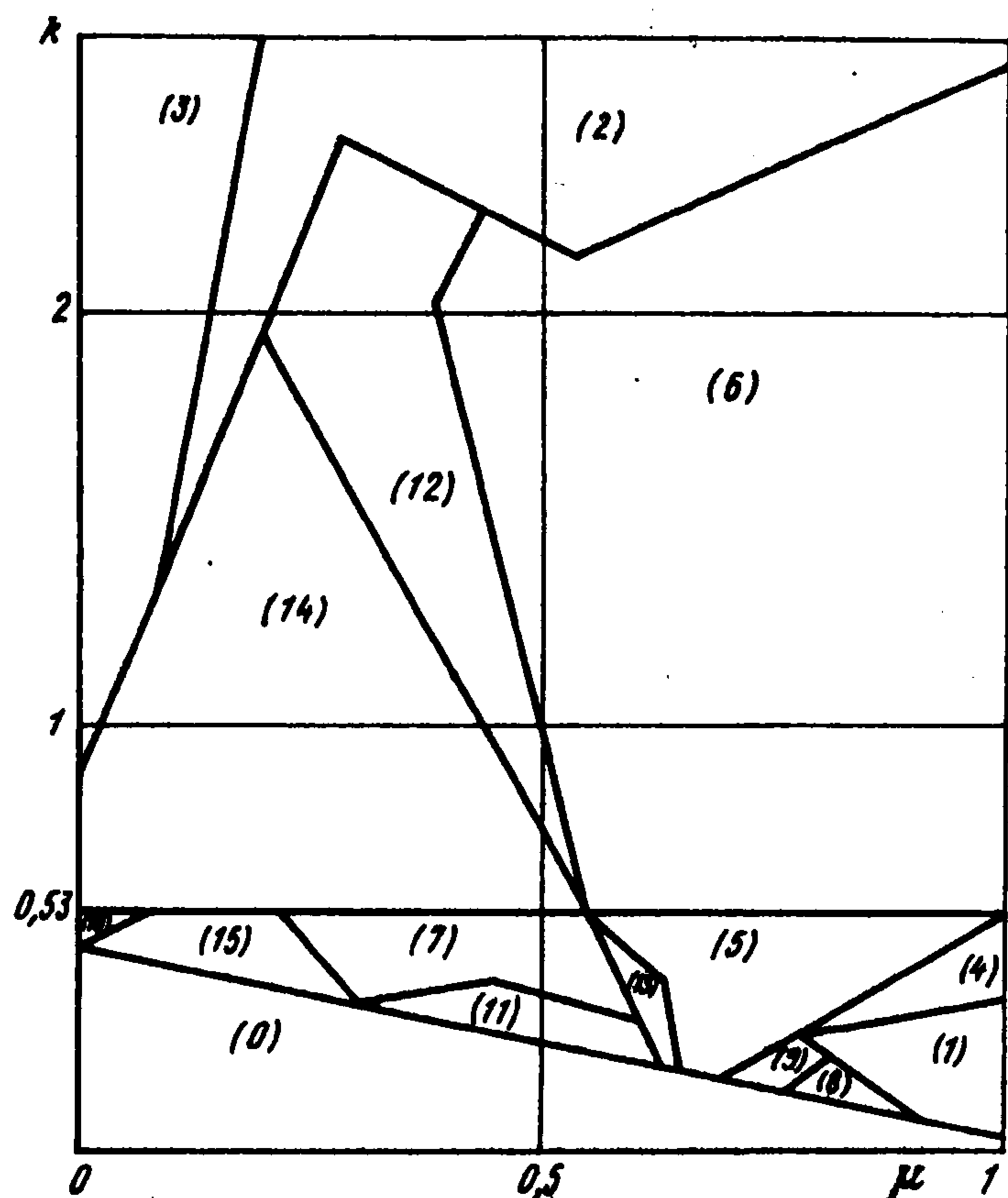
1) при  $\tilde{k} < 3\sqrt{2}/8$  в зависимости от значений  $\mu$  имеем: а) две точки бифуркации при  $r > 1$ , б) одну двойную точку бифуркации (обе точки совпадают), в) отсутствие бифуркаций;

2) при  $\tilde{k} \geq 3\sqrt{2}/8$  в зависимости от значений  $\mu$  имеем: а) одну точку бифуркации при  $r > 1$  и одну при  $0 < r < 1$ , б) одну точку бифуркации при  $r > 1$ .

4. В точках  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2, r = r_{11}, \chi_{11}^{*2} = H_1(r_{11})$  ( $\varphi_1 = \pi/2, \varphi_2 = 0, r = r_{12}, r = r_{22}, \chi_{12}^{*2} = H_2(r_{12}), \chi_{22}^{*2} = H_2(r_{22})$ ) обращается в нуль один из коэффициентов матрицы второй вариации и изменяется степень неустойчивости решения (2.3) ((2.4)). Это означает, что в указанных точках от того или иного указанного решения ответвляется решение системы (2.1)–(2.2), отвечающее таким ориентациям тела, при которых ни одна из его главных центральных осей инерции не совпадает с радиус-вектором центра



Фиг. 1



Фиг. 2

масс и касательной к орбите, а стержни не взаимно ортогональны. Будем искать решения, ответвляющиеся от (2.3), в виде

$$1) \varphi_1 = \alpha, \varphi_2 = \pi/2 - \beta \quad (4.1)$$

а от (2.4) – в виде

$$2) \varphi_2 = \alpha, \varphi_1 = \pi/2 - \beta \quad (4.2)$$

Тогда для решений (4.1), (4.2) система уравнений (2.1) эквивалентна системе уравнений

$$\mu = F_i(r, \alpha, \tilde{k}), \quad \mu = R_i(r, \beta, \tilde{k}, \mu), \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

где

$$F_i(r, \alpha, \tilde{k}) = \frac{Q_i(\alpha)}{P_i(f_i(\alpha))} \frac{\zeta(r, P_i(\alpha))}{\zeta(r, Q_i(f_i(\alpha)))}, \quad f_i(\alpha) \equiv \beta = \alpha + \delta_i \frac{r Q_i(\alpha)}{2\tilde{k}} \zeta(r, P_i(\alpha))$$

$$R_i(r, \beta, \tilde{k}, \mu) = \frac{Q_i(g_i(\beta))}{P_i(\beta)} \frac{\zeta(r, P_i(g_i(\beta)))}{\zeta(r, Q_i(\beta))}, \quad g_i(\beta) \equiv \alpha = \beta + \delta_i \frac{\mu r P_i(\beta)}{2\tilde{k}} \zeta(r, Q_i(\beta))$$

$$\zeta(r, x) = (r^2 + 1 - 2rx)^{-3/2} - (r^2 + 1 + 2rx)^{-3/2}$$

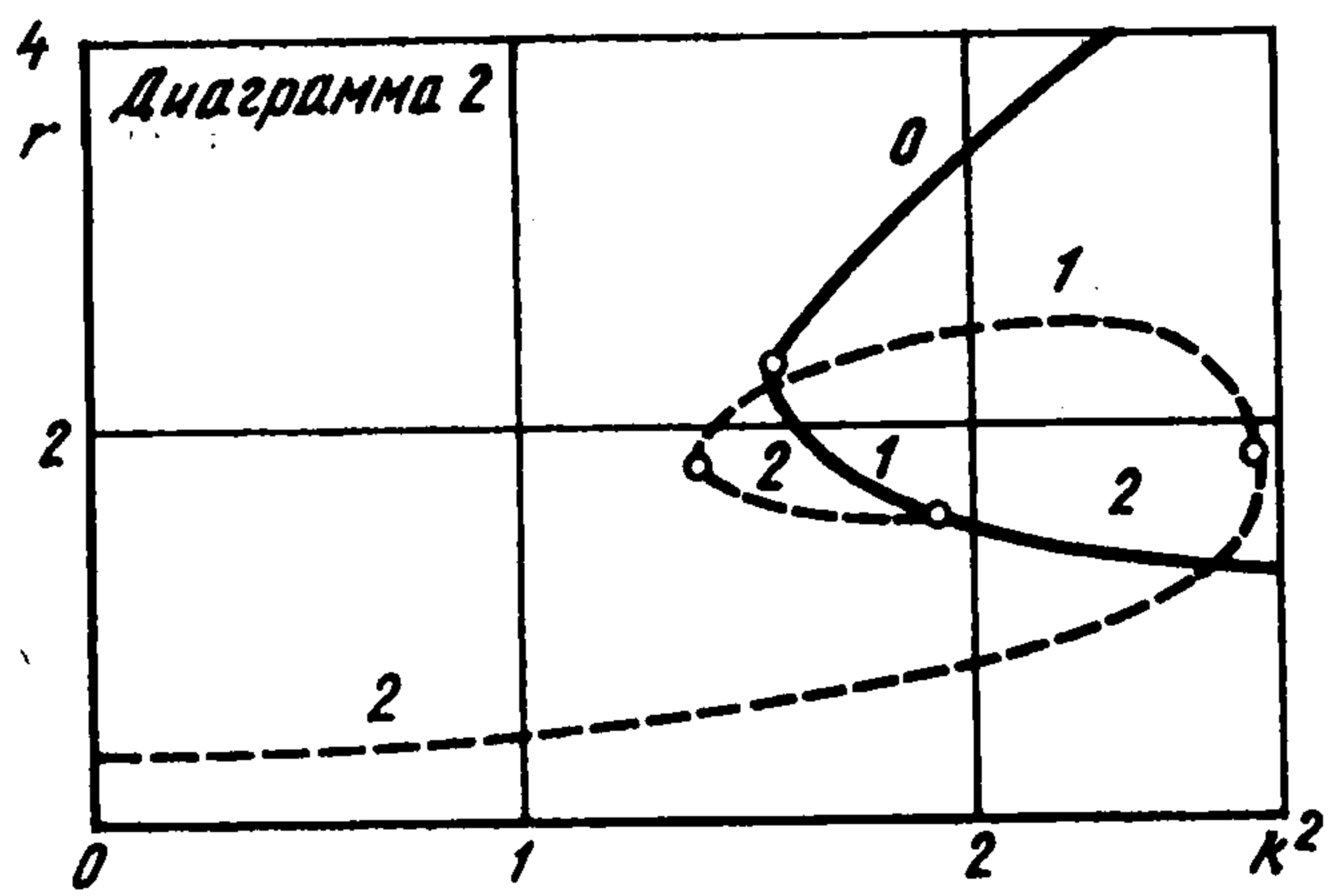
$$Q_1(a) = P_2(a) = \sin a, \quad Q_2(a) = P_1(a) = \cos a, \quad \delta_i = (-1)^{i+1}$$

При этом

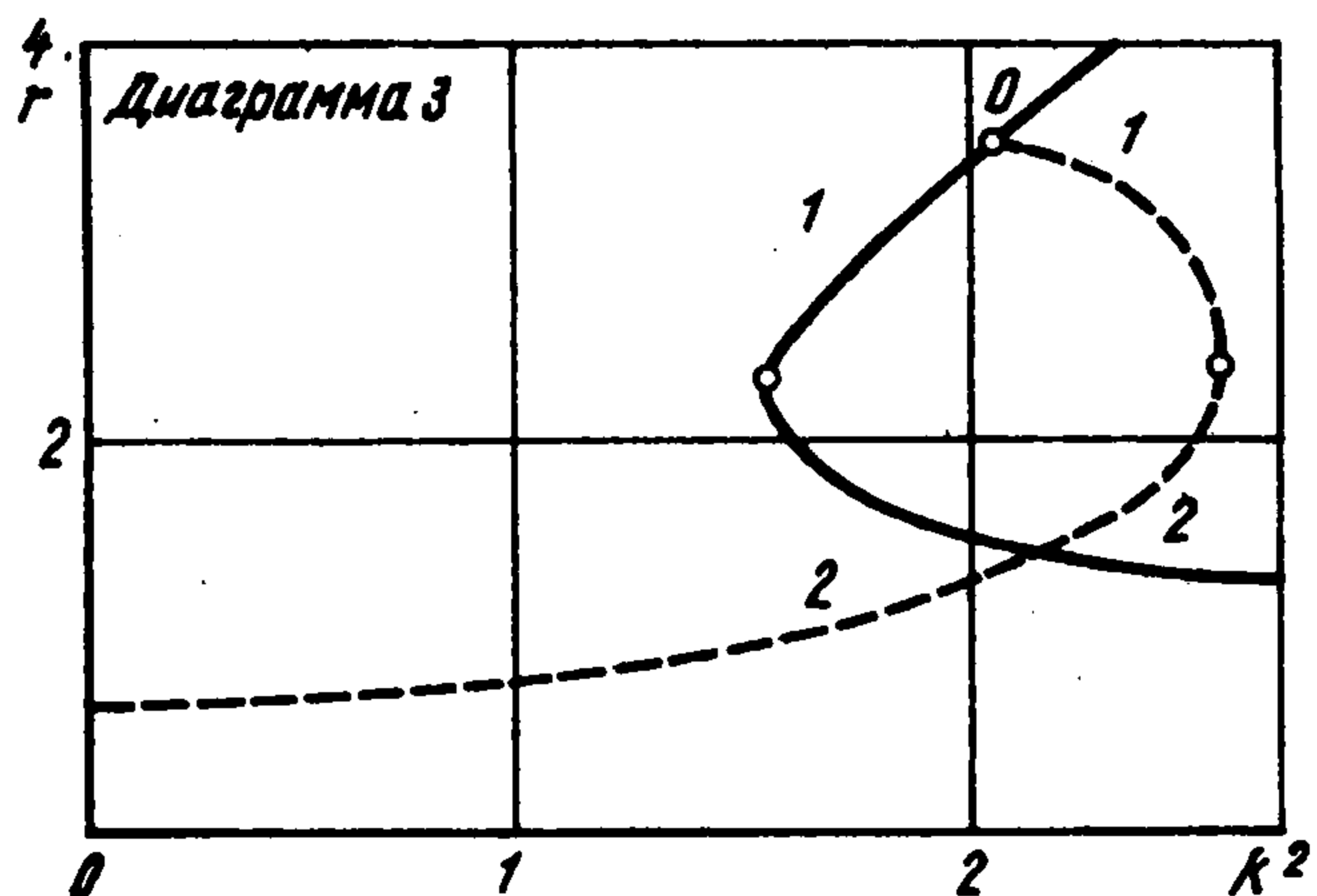
$$x^2 = \frac{(1+\mu)(r^2+1)^2}{2r} (\bar{G}_1 + \mu \bar{G}_2), \quad \bar{G}_i = (r + P_i(\alpha)) F_i^3(a) + (r - Q_i(\alpha)) F_i^3(-a)$$

Анализ системы (4.3) показывает, что в зависимости от параметров задачи возможны различные типы бифуркационных диаграмм: 6 типов для решений, ответвляющихся от (2.3), и 16 типов для решений, ответвляющихся от (2.4).

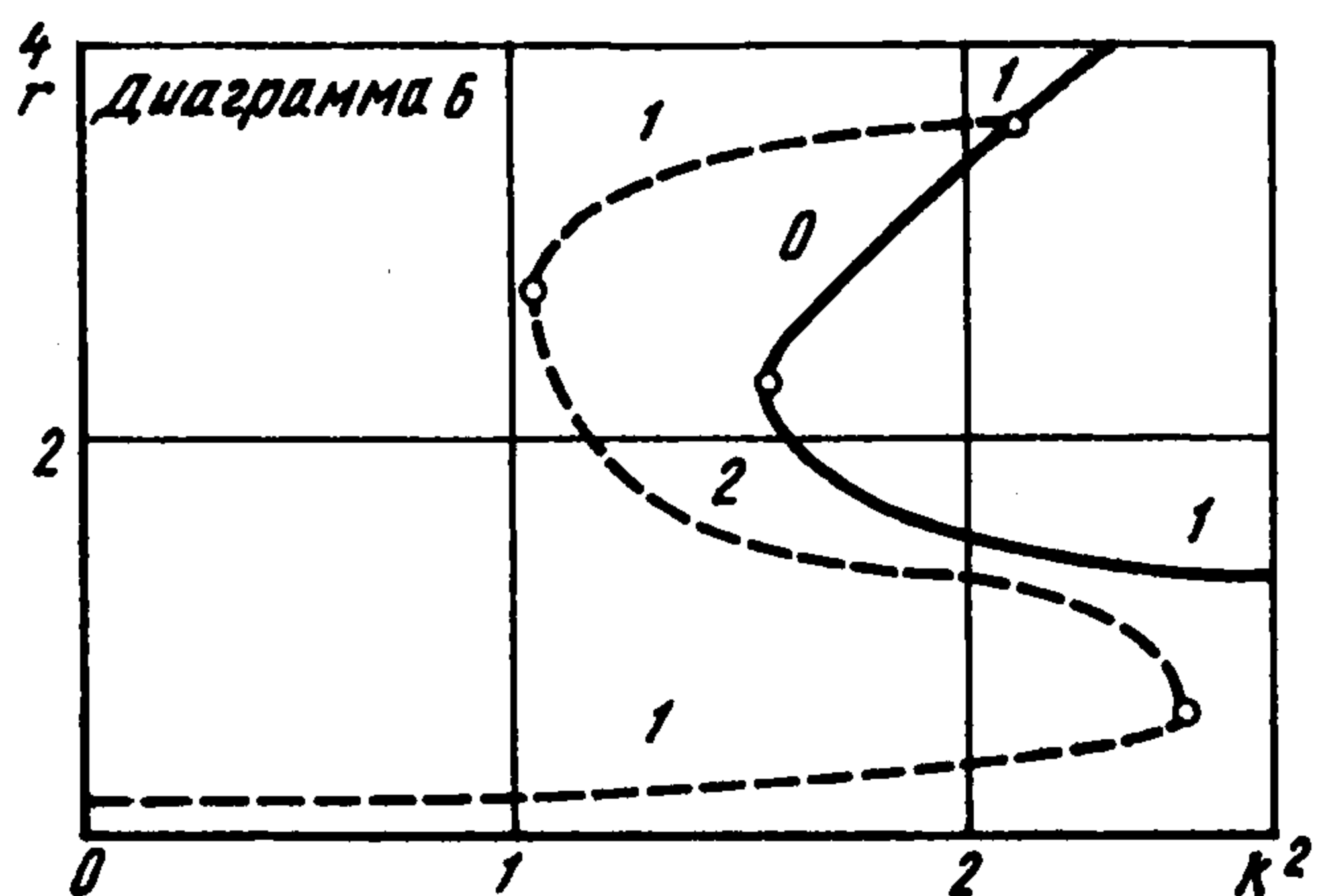
На фиг. 1, 2 на плоскости параметров  $(\tilde{k}, \mu)$  указаны области, отвечающие различным типам бифуркационных диаграмм; области, помеченные цифрой (0) на обеих фигурах отвечают случаю отсутствия бифуркаций, области (2) и (3) на фиг. 2 отве-



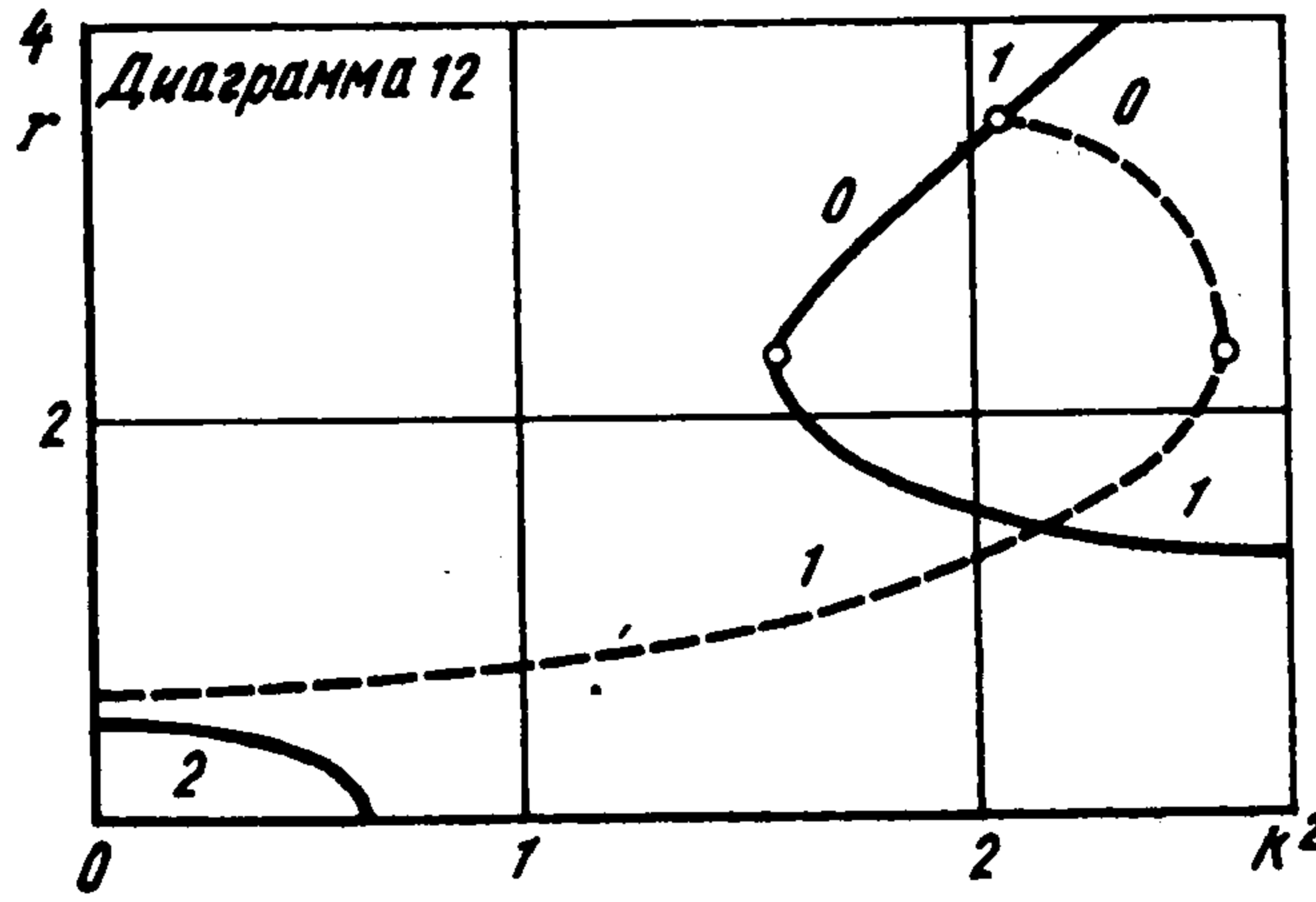
Фиг. 3



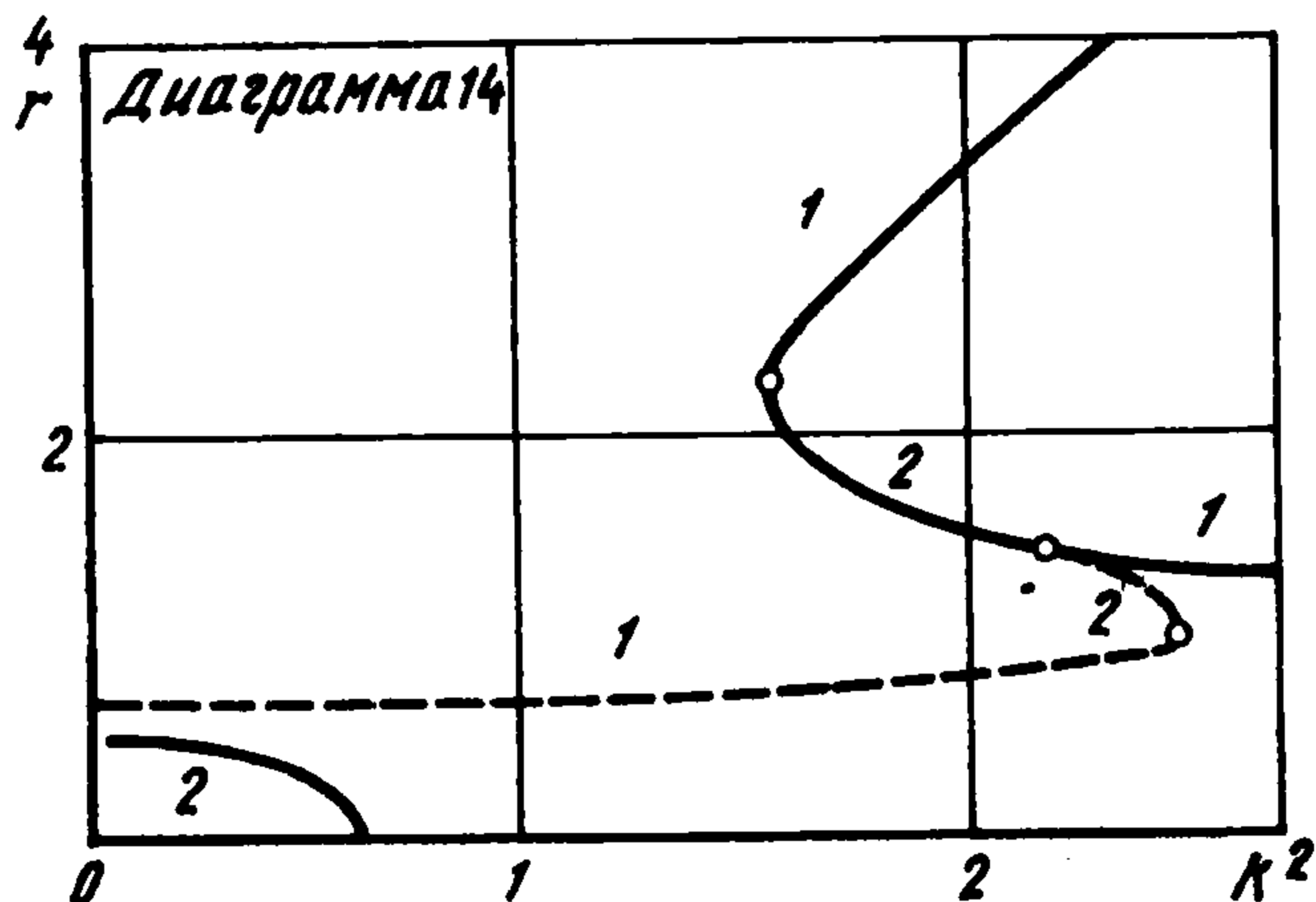
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

чают тем же типам диаграмм, что и в случае твердого тела [1]. В остальных же случаях диаграммы существенно отличаются от диаграмм для твердого тела [1]. В частности, если параметры задачи лежат в областях (2), (3) (фиг. 1), то бифуркационные диаграммы имеют соответственно вид, приведенный на фиг. 3, 4; если же параметры лежат в областях (6), (12), (14) (фиг. 2), то бифуркационные диаграммы имеют соответственно вид, приведенный на фиг. 5, 6, 7.

Все бифуркационные диаграммы представляют собой сечения пространства  $(r, \varphi_1, \varphi_2, \kappa^2)$  гиперплоскостями (2.3) (фиг. 1) или (2.4) (фиг. 2). Сплошные линии отвечают ветвям, которые лежат в указанных гиперплоскостях и соответствуют тривиальным стационарным движениям. Штриховые линии отвечают проекциям ветвей, которые выходят из указанных гиперплоскостей, и соответствуют нетривиальным стационарным движениям. Индексы 0, 1, 2 означают степень неустойчивости стационарных движений тела, отвечающих тем или иным ориентациям. Степень неустойчивости нетривиальных ориентаций указана в соответствии с общими положениями теории бифуркаций.

Заметим, что если  $\tilde{k} \gg 1$ , то для решений (2.3) бифуркаций нет (фиг. 1), а для решений (2.4) возможны только два различных типа бифуркационных диаграмм (аналогично полученным ранее результатам [1]). В то же время при уменьшении  $\tilde{k}$  при некоторых значениях  $\mu$  возможны (в отличие от предыдущих результатов [1]) устойчивые в вековом смысле нетривиальные стационарные движения, ответвляющиеся от решений (2.4).

Работа выполнена при финансовой поддержке НАТО и Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00261).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрарова Е.В., Карапетян А.В.* О стационарных движениях твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 68–73.
2. *Буров А.А., Степанов С.Я.* О геометрии масс в динамике деформируемых тел // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1995. С. 107–130.

Москва

Поступила в редакцию  
24.IX.1996