УДК 531.36;521.135

© 1998 г. В.Н. Тхай

О ПРОДОЛЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ОБРАТИМОЙ СИСТЕМЫ В НЕГРУБЫХ СЛУЧАЯХ. ПРИЛОЖЕНИЕ К N-ПЛАНЕТНОЙ ЗАДАЧЕ

Решается вопрос о продолжении по параметру симметричных периодических решений автономной или периодической обратимой системы. Рассматриваются негрубые случаи, когда порождающая система не гарантирует продолжимость решения. Предлагаются три подхода к решению задачи: а) привлечение к рассмотрению членов, зависящих от малого параметра, и отбор порождающих решений, б) выбор порождающей системы, зависящей от малого параметра, в) сведение к квазилинейной системе и анализ последней на основе первого подхода. В рамках третьего подхода также устанавливается существование периодического движения, отличающегося от порождающего на величину порядка малого параметра в дробной степени. Теоретические результаты применяются для доказательства существования двух семейств пространственных периодических орбит в N-планетной задаче. Орбита каждой планеты близка к эллиптической и расположена в окрестности своей неподвижной плоскости; угол между плоскостями – произвольный. Средние движения планет по этим орбитам относятся как натуральные числа (резонансность), а в моменты времени, кратные полупериоду, планеты располагаются на одной прямой – линии узлов (первое семейство) или пересекают одну и ту же неподвижную плоскость (второе семейство). Наблюдается явление парада планет. Направление движения каждой планеты по орбите – индивидуальное.

1. Периодические движения обратимой системы. Рассмотрим автономную или 2π-периодическую обратимую систему

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}_0(\mathbf{u},\mathbf{v},t)+\mu\mathbf{U}_1(\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{V}_0(\mathbf{u},\mathbf{v},t)+\mu\mathbf{V}_1(\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t);\quad \mathbf{u}\in\mathbb{R}^l,\quad \mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\quad (l\geqslant n)$$

с неподвижным множеством $\mathbf{M} = \{\mathbf{u},\ \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ [1] и малым параметром μ. Предположим, что полученная из (1.1) при $\mu = 0$ порождающая система допускает $2T^*$-периодическое ($T^* = \pi$ для 2π-периодической системы), симметричное относительно $\mathbf{M}$ решение

$$\mathbf{u}=\boldsymbol{\varphi}(t),\quad \mathbf{v}=\boldsymbol{\psi}(t);\quad \boldsymbol{\varphi}(-t)=\boldsymbol{\varphi}(t),\quad \boldsymbol{\psi}(-t)=-\boldsymbol{\psi}(t) \tag{1.2}$$

Будем искать условия, при выполнении которых система (1.1) при достаточно малых $\mu\neq 0$ также имеет симметричное относительно $\mathbf{M}$ периодическое решение, обращающееся в (1.2) при $\mu = 0$. В этом случае решение (1.2) назовем порождающим.

Обозначим через $\mathbf{u}(\mu,u_1^\circ,\ldots,u_l^\circ,t)$, $\mathbf{v}(\mu,u_1^\circ,\ldots,u_l^\circ)$ симметричное решение системы (1.1) с начальными условиями $u_1^\circ,\ldots,u_l^\circ$, $\mathbf{v}^\circ = \mathbf{0}$. Тогда необходимое и достаточное условие $2T$-периодичности этого решения имеет вид [1]

$$v_s(\mu,u_1^\circ,\ldots,u_l^\circ,T)=0\quad (s=1,\ldots,n) \tag{1.3}$$

Отсюда следует, что в общем случае симметричные периодические движения обратимой системы (1.1) образуют $(m+1)$-семейство, причем $m \geqslant l-n$. Параметрами этого семейства являются, по крайней мере, $l-n$ из начальных значений $u_1^\circ,\ldots,u_l^\circ$ и μ, а в автономной системе к ним добавляется параметр T. В порождающей системе имеем $\mu=0$ и размерность семейства периодических движений, которому принадлежит решение (1.2), равна m. Предположим, что $h_1,\ldots,h_m$ – параметры этого семейства, а решению (1.2) отвечают величины $h_1^*,\ldots,h_m^*$. При этом в автономной системе полупериод T или зависит от параметров $h_1,\ldots,h_m$ и $T(h_1^*,\ldots,h_m^*)=T^*$, или T добавляется к h_j $(j=1,\ldots,m)$ как параметр.

Представим уравнения (1.3) в виде

$$v_s(0,\mathbf{u}^*,T^*)+\sum_{j=1}^{l}(F_{sj}^*+F_{sj})\Delta u_j^\circ+(G_s^*+G_s)\Delta T+(Q_s^*+Q_s)\mu=0 \quad (s=1,\ldots,n) \tag{1.4}$$

$$F_{sj}^*=\left(\frac{\partial v_s}{\partial u_j^\circ}\right)_*,\quad G_s^*=\left(\frac{\partial v_s}{\partial T}\right)_*,\quad Q_s^*=\left(\frac{\partial v_s}{\partial \mu}\right)_*$$

(звездочка означает, что вычисления проведены при $\mu=0$, $u_j^\circ=u_j^*=\varphi_j(0)$), где функции F_{sj}, G_s, Q_s обращаются в нуль при $\mu=0$, $\Delta T=T-T^*=0$, $\Delta\mathbf{u}^\circ=\mathbf{u}^\circ-\mathbf{u}^*=\mathbf{0}$.

Очевидно, $v_s(0,\mathbf{u}^*,T^*)=0$ $(s=1,\ldots,n)$. Кроме того, в периодической системе необходимо положить $\Delta T=0$.

Обозначим

$$\mathrm{Ra}=\mathrm{rank}\|F_{sj}^*\|,\quad \mathrm{Ra}_1=\mathrm{rank}\|F_{sj}^*,G_s^*\| \tag{1.5}$$

При $\mathrm{Ra}=n$ система (1.4) разрешима относительно n величин из $\Delta u_1^\circ,\ldots,\Delta u_l^\circ$. Это означает, что порождающая система вместе с решением (1.2) имеет $(l-n)$-семейство $2T^*$-периодических симметричных решений, каждое из которых является порождающим [2]. В автономной системе условие $\mathrm{Ra}=n$ гарантирует [3] существование в (1.1) при достаточно малых μ $(l-n)$-семейства $2T$-периодических решений. При этом T не зависит от μ и $\mathbf{u}^\circ$ и принадлежит некоторому промежутку, включающему T^*. Если $\mathrm{Ra}=n-1$, $\mathrm{Ra}_1=n$, то период симметричных периодических решений системы (1.1) зависит от μ (в общем случае – также от $\mathbf{u}^\circ$), и при $\mu\neq 0$ нельзя гарантировать существование именно $2T^*$-периодических решений.

Отметим важный вывод. В каждой из рассматриваемых ситуаций: а) $\mathrm{Ra}=n$, б) $\mathrm{Ra}=n-1$, $\mathrm{Ra}_1=n$ и система автономна, содержится неизолированный по Пуанкаре случай, тем не менее свойство обратимой порождающей системы иметь симметричное периодическое движение является грубым, если возмущения также относятся к классу обратимых.

Пусть теперь $\mathrm{Ra}=k<n$. В этом случае разрешим, для определенности, первые k уравнений (1.3) относительно $u_1^\circ,\ldots,u_k^\circ$ и подставим результат в оставшиеся уравнения. Получим

$$v_s(0,u_{k+1}^\circ,\ldots,u_l^\circ,T)+\mu f_s(\mu,u_{k+1}^\circ,\ldots,u_l^\circ,T)=0 \quad (s=n-k+1,\ldots,n) \tag{1.6}$$

В случае 2π-периодической системы (1.1) имеем $T=\pi$, а система (1.3) допускает при $\mu=0$ семейство решений от m произвольных параметров. То же самое справедливо и для системы (1.6), следовательно

$$v_s(0,u_{k+1}^\circ,\ldots,u_l^\circ)\equiv 0 \quad (s=n-k+1,\ldots,n)$$

Поэтому если решение (1.2) порождающей системы является порождающим, то его параметры $h_1^*,\dots,h_m^*$ должны удовлетворять равенствам

$$P_\nu(h_1^*,\dots,h_m^*) \equiv f_\nu(0,u_{k+1}^\circ(h_1^*,\dots,h_m^*),\dots,u_l^\circ(h_1^*,\dots,h_m^*),\pi) = 0 \quad (\nu = n-k+1,\dots,n) \tag{1.7}$$

При выполнении условия

$$\mathrm{Ra}^* = \mathrm{rank}\left\| \frac{\partial P_\nu(h_1^*,\dots,h_m^*)}{\partial h_j^*} \right\| = n-k \tag{1.8}$$

система (1.6) при достаточно малых μ допускает решение $h_j = h_j(\mu)$, $h_j(0) = h_j^*$ ($j = 1,\dots,m$). Значит уравнения (1.7) определяют значения $h_1^*,\dots,h_m^*$ параметров порождающего решения, если для них выполнено условие (1.8).

В автономной системе (1.1) будем различать два негрубых случая: 1) $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_1 = k < n$, 2) $\mathrm{Ra} = k$, $\mathrm{Ra}_1 = k + 1 < n$, причем первый из них обязательно возникает, когда на рассматриваемом семействе полупериод T зависит от $h_1,\dots, h_m$.

В первом случае разрешим систему (1.3) относительно $u_1^\circ,\dots,u_k^\circ$. В результате получим равенства

$$P_\nu^*(h_1^*,\dots,h_m^*) \equiv f_\nu(0,u_{k+1}^\circ(h_1^*,\dots,h_m^*),\dots,u_l^\circ(h_1^*,\dots,h_m^*),T^*) = 0 \quad (\nu = n-k+1,\dots,n) \tag{1.9}$$

которым необходимо удовлетворяют параметры $h_1^*,\dots,h_m^*$ порождающего решения. Если при этом выполнено одно из условий

$$\mathrm{Ra}^* = \mathrm{rank}\left\| \frac{\partial P_\nu(h_1^*,\dots,h_m^*,T^*)}{\partial h_j^*} \right\| = n-k \tag{1.10}$$

$$\mathrm{Ra}^* = n-k-1,\quad \mathrm{Ra}_1^* = \mathrm{rank}\left\| \frac{\partial P_\nu(h_1^*,\dots,h_m^*,T^*)}{\partial h_j^*},\ \frac{\partial P_\nu(h_1^*,\dots,h_m^*,T^*)}{\partial T^*} \right\| = n-k \tag{1.11}$$

решение (1.2) является порождающим. В случае, когда на рассматриваемом семействе T не зависит от $h_1,\dots, h_m$ и выполняется (1.10), порождающая система вместе с решением (1.2) имеет семейство от T порождающих решений, которому принадлежит решение (1.2).

Во втором случае разрешим уравнения (1.3) относительно $u_1^\circ,\dots,u_k^\circ, T$. В результате имеем $n - k - 1$ уравнений вида (1.8) для определения параметров порождающего решения, для которого ранг функционального определителя должен равняться $n - k - 1$. Последнее условие эквивалентно тому, что в (1.11) $\mathrm{Ra}_1^* = n-k$.

2. Условия продолжения. Рассмотрим сначала периодическую систему. Уравнения (1.7) представляют собой результат исключения $\Delta u_1^\circ,\dots,\Delta u_k^\circ$ из уравнений

$$\sum_{j=1}^{l} F_{sj}^*\Delta u_j^\circ + Q_s^*\mu = 0 \quad (s = 1,\dots,n) \tag{2.1}$$

При $\mu = 0$ частные производные $\partial u_\alpha / \partial u_j^\circ$, $\partial v_\beta / \partial u_j^\circ$ ($\alpha, j = 1,\dots, l$; $\beta = 1,\dots, n$) удовлетворяют уравнениям в вариациях, составленным для порождающей системы в окрестности решения (1.2). Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\cdot &= \mathbf{A}^-(t)\mathbf{x} + \mathbf{A}^+(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}^\cdot &= \mathbf{B}^+(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}^-(t)\mathbf{y};\quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l,\quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.2}$$

где плюс (минус) означает 2π-периодическую матрицу с четными (нечетными) функциями.

Фундаментальную матрицу решений системы (2.2) с единичной матрицей начальных условий (при $t = \tau$) запишем в виде

$$\mathbf{S}(t,\tau) = \left\| \begin{matrix} \mathbf{x}^+(t,\tau) & \mathbf{x}^-(t,\tau) \\ \mathbf{y}^-(t,\tau) & \mathbf{y}^+(t,\tau) \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{S}(\tau,\tau) = \mathbf{I}_{l+n}$$

где $\mathbf{I}_{l+n}$ – единичная $(l + n)$ – матрица. Тогда [2]

$$\mathbf{x}^{\pm}(-t,0) = \pm\mathbf{x}^{\pm}(t,0), \quad \mathbf{y}^{\pm}(-t,0) = \pm\mathbf{y}^{\pm}(t,0)$$

При $t = 0$ имеем $u_\alpha = u_\alpha^\circ$, $v_\beta = 0$ $(\alpha = 1,\dots,l;\ \beta = 1,\dots,n)$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial u_j^\circ}\right)_0 = \delta_{\alpha j}, \quad \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial u_j^\circ}\right)_0 = 0 \quad (\alpha, j = 1,\dots,l;\ \beta = 1,\dots,n) \tag{2.3}$$

($\delta_{\alpha j}$ – символ Кронекера). Решение системы (2.2) с начальными условиями (2.3) задается матрицами $\mathbf{x}^+(t,0)$, $\mathbf{y}^-(t,0)$, причем $\mathbf{y}^-(t,0) = ||\partial v_\beta / \partial u_j^\circ||$. Следовательно, в (2.1) имеем $|| F_{sj}^* || = \mathbf{y}^-(\pi,0)$. Если $\operatorname{rank}\mathbf{y}^-(\pi, 0) = n - k$, то $l - k$ столбцов в матрице $\mathbf{y}^-(\pi, 0)$ можно полагать нулями. Учитывая, что для линейной системы линейная комбинация решений также представляет решение, выводим существование ровно $l - k$ решений, для которых при $t = \pi$ вектор $\mathbf{y}^-$ обращается в нуль. Если теперь принять во внимание равенство $\mathbf{y}^-(0, 0) = \mathbf{0}$, то немедленно устанавливаем существование $l - k$ симметричных относительно множества $\mathbf{M}_1^* = \{\mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ 2π-периодических частных решений системы (2.2). Тогда матрица $\mathbf{x}^+(2\pi, 0)$ имеет $l - k$ простых собственных значений, равных единице. Значит, матрица $\mathbf{y}^+(2\pi, 0)$ имеет $n - k$ таких же собственных значений, и система (2.2) допускает $n - k^*$ $(k^* \leqslant k)$ симметричных относительно множества $\mathbf{M}_2^* = \{\mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbf{x} = 0\}$ 2π-периодических движений.

Пусть

$$\mathbf{S}_1(t) = \left\| \begin{matrix} \mathbf{p}^+(t) & \mathbf{p}^-(t) \\ \mathbf{q}^-(t) & \mathbf{q}^+(t) \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{S}_1(0) = \mathbf{I}_{l+n}$$

– фундаментальная матрица решений системы, сопряженной с системой (2.2). Тогда $\mathbf{S}_1(t)$ содержит $l - k^*$ симметричных относительно множества $\{\mathbf{p}, \mathbf{q} : \mathbf{q} = \mathbf{0}\}$ 2π-периодических решений $\{p_{\alpha\lambda}^+(t),\ q_{\beta\lambda}^-(t)\}$ $(\lambda = 1,\dots, l - k^*)$ и $n - k$ симметричных относительно множества $\{\mathbf{p}, \mathbf{q} : \mathbf{p} = \mathbf{0}\}$ 2π-периодических решений $\{p_{\alpha\nu}^-(t),\ q_{\beta\nu}^+(t)\}$ $(\nu = 1,\dots, n - k)$. Связь между решениями сопряженных систем приводит к равенствам

$$p_{j\lambda}^+(\tau) = \sum_{\alpha=1}^{l} x_{\alpha j}^+(t,\tau) p_{\alpha\lambda}^+(t) + \sum_{\beta=1}^{n} y_{\beta j}^-(t,\tau) q_{\beta\lambda}^-(t)$$

$$q_{s\lambda}^-(\tau) = \sum_{\alpha=1}^{l} x_{\alpha j}^-(t,\tau) p_{\alpha\lambda}^+(t) + \sum_{\beta=1}^{n} y_{\beta s}^+(t,\tau) q_{\beta\lambda}^-(t)$$

$$p_{j\nu}^-(\tau) = \sum_{\alpha=1}^{l} x_{\alpha j}^+(t,\tau) p_{\alpha\nu}^-(t) + \sum_{\beta=1}^{n} y_{\beta j}^-(t,\tau) q_{\beta\nu}^+(t)$$

$$q_{s\nu}^+(\tau) = \sum_{\alpha=1}^{l} x_{\alpha s}^-(t,\tau) p_{\alpha\nu}^-(t) + \sum_{\beta=1}^{n} y_{\beta s}^+(t,\tau) q_{\beta\nu}^+(t)$$

$$(j = 1,\dots,l;\ s = 1,\dots,n;\ \lambda = 1,\dots,l - k^*;\ \nu = 1,\dots,n - k)$$

Отсюда выводим соотношения

$$p_{j\nu}^{-}(0)=\sum_{\beta=1}^{n} y_{\beta j}^{-}(\pi,0)q_{\beta\nu}^{+}(\pi)=0, \quad p_{j\nu}^{-}(\tau)=\sum_{\beta=1}^{n} y_{\beta j}^{-}(\pi,\tau)q_{\beta\nu}^{+}(\pi)$$

$$q_{s\nu}^{+}(\tau)=\sum_{\beta=1}^{n} y_{\beta s}^{+}(\pi,\tau)\dot{q}_{s\nu}^{+}(\pi)$$

необходимые для исключения $\Delta u_1^{\circ},\ldots,\Delta u_k^{\circ}$ из (2.1).

Для полного решения указанной задачи отметим, что частные производные от $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ по параметру μ образуют [4] частное решение линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-}(t)\mathbf{x}+\mathbf{A}^{+}(t)\mathbf{y}+\mathbf{U}_1(0,\varphi,\psi,t) \tag{2.4}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}^{+}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}^{-}(t)\mathbf{y}+\mathbf{V}_1(0,\varphi,\psi,t)$$

с нулевыми начальными условиями. Поэтому

$$\frac{\partial v_s}{\partial \mu}=\int_0^t\left[\sum_{\varkappa=1}^{l} U_{1\varkappa}^{*}(\mathbf{h}^{*},\tau)y_{s\varkappa}^{-}(t,\tau)+\sum_{\nu=1}^{n} V_{1\nu}^{*}(\mathbf{h}^{*},\tau)y_{s\nu}^{+}(t,\tau)\right]d\tau$$

где через $\mathbf{U}_1^{*}(\mathbf{h}^{*},\tau)$ и $\mathbf{V}_1^{*}(\mathbf{h}^{*},\tau)$ обозначен результат подстановки $\mu = 0$, $\mathbf{u} = \varphi(\tau)$, $\mathbf{v} = \psi(\tau)$, $t = \tau$ соответственно в функции $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{V}_1$. Так как решение (1.2) принадлежит некоторому семейству от $\mathbf{h}$ и отвечает значению $\mathbf{h}^{*}$, то эти функции зависят и от $\mathbf{h}^{*}$.

Теперь условия (2.1) имеют вид

$$\sum_{j=1}^{l} y_{\beta j}^{-}(\pi,0)\Delta u_j^{\circ}+\mu\int_0^{\pi}\left[\sum_{\varkappa=1}^{l} U_{1\varkappa}^{*}(\mathbf{h}^{*},\tau)y_{\beta\varkappa}^{-}(\pi,\tau)+\sum_{\delta=1}^{n} V_{1\delta}^{*}(\mathbf{h}^{*},\tau)y_{\beta\delta}^{+}(\pi,\tau)\right]d\tau=0 \quad (\beta=1,\ldots,n)$$

Умножая эти равенства на $q_{\beta\nu}^{+}(\pi)$ и суммируя по β, получим

$$P_\nu(h_1^{*},\ldots,h_m^{*})\equiv\int_0^{\pi}\left[\sum_{\varkappa=1}^{l} U_{1\varkappa}^{*}(\mathbf{h}^{*},\tau)p_{\varkappa\nu}^{-}(\tau)+\sum_{\delta=1}^{n} V_{1\delta}^{*}(\mathbf{h}^{*},\tau)q_{\delta\nu}^{+}(\tau)\right]d\tau=0 \quad (\nu=1,\ldots,n-k) \tag{2.5}$$

Теорема 1. Пусть для 2π-периодической обратимой системы (1.1) 2π-периодическому решению (1.2) отвечают значения параметров $h_1^{*},\ldots,h_m^{*}$ и $\mathrm{Ra} = k < n$. Тогда это решение будет порождающим, если выполнены равенства (2.5) и $\mathrm{Ra}^{*} = n - k$.

Пример 1. Резонансные колебания в задаче Дуффинга ([4], с. 32). Уравнение Дуффинга в рассматриваемом случае

$$\ddot{x}+x=\mu(\lambda\sin t+ax+\gamma x^3); \quad \lambda,a,\gamma=\mathrm{const}$$

обратимо с неподвижным множеством $\{x,\dot{x} : x = 0\}$. При $\mu = 0$ имеем однопараметрическое от h семейство симметричных периодических решений вида $x = h\sin t$. Поэтому в системе вида (1.1) имеем $l = n = 1$, $\mathrm{Ra} = 0$. Для решения вопроса о существовании периодического решения при $\mu \neq 0$ составим уравнение (2.5)

$$\lambda+ah^{*}+0{,}75\gamma h^{*3}=0$$

Согласно теореме 1 каждому простому корню h^{*} этого уравнения отвечает порождающее решение линейного осциллятора.

Отметим, что только симметричные периодические движения и определяются [4] для уравнения Дуффинга.

В автономной системе (1.1) уравнения, определяющие параметры порождающего решения, имеют вид

$$\sum_{j=1}^{l} F_{sj}^*\Delta u_j^\circ + G_s^*\Delta T + Q_s^*\mu = 0 \quad (s = 1,\ldots,n)$$

Если $\mathrm{Ra}^* = \mathrm{Ra}_1^* = n-k$, то G_s^* будут линейными комбинациями F_{sj}^*. Поэтому из равенств

$$p_{j\nu}^-(0) = \sum_{\beta=1}^{n} y_{\beta j}^-(T^*,0)q_{\beta\nu}^+(T^*) = 0 \quad (j = 1,\ldots,l;\ \nu = 1,\ldots,n-k)$$

вытекает, что

$$\sum_{\beta=1}^{n} G_\beta^* q_{\beta\nu}^+(T^*) = 0 \quad (\nu = 1,\ldots,n-k)$$

В результате получим следующие уравнения для параметров порождающего решения:

$$P_\nu^*(h_1^*,\ldots,h_m^*,T^*) \equiv \int_0^{T^*}\left[\sum_{\varkappa=1}^{l} U_{1\varkappa}^*(\mathbf{h}^*,\tau)p_{\varkappa\nu}^-(\tau) + \sum_{\delta=1}^{n} V_{1\delta}^*(\mathbf{h}^*,\tau)q_{\delta\nu}^+(\tau)\right]d\tau = 0 \tag{2.6}$$

$(\nu = 1,\ldots,n-k)$

В случае $\mathrm{Ra}^* = k$, $\mathrm{Ra}_1^* = k+1 < n$ имеем

$$\sum_{\beta=1}^{n} G_\beta^* q_{\beta\nu}^+(T^*) = \sum_{\beta=1}^{n} V_{0\beta}^*(\mathbf{h}^*,T^*)q_{\beta\nu}^+(T^*)$$

($\mathbf{V}_0^*$ – результат подстановки решения (1.2) в функцию $\mathbf{V}_0$), и уравнения для определения γ ($\Delta T = \gamma\mu$) и $h_1^*,\ldots,h_m^*$ имеют вид

$$P_\nu^*(h_1^*,\ldots,h_m^*,T^*,\gamma) = \gamma\sum_{\beta=1}^{n} V_{0\beta}^*(\mathbf{h}^*,T^*)q_{\beta\nu}^+(T^*) +$$

$$+\int_0^{T^*}\left[\sum_{\varkappa=1}^{l} U_{1\varkappa}^*(\mathbf{h}^*,\tau)p_{\varkappa\nu}^-(\tau) + \sum_{\delta=1}^{n} V_{1\delta}^*(\mathbf{h}^*,\tau)q_{\delta\nu}^+(\tau)\right]d\tau = 0 \quad (\nu = 1,\ldots,n-k) \tag{2.7}$$

Теорема 2. Пусть в автономной системе (1.1) $2T^*$-периодическому решению (1.2) отвечают значения параметров $h_1^*,\ldots,h_m^*$ и $\mathrm{Ra} = k < n$. Тогда при $\mathrm{Ra}_1 = k$ это решение будет порождающим, если выполнены равенства (2.6) и $\mathrm{Ra}^* = n-k$ или $\mathrm{Ra}^* = n-k-1$, $\mathrm{Ra}_1^* = n-k$. В случае $\mathrm{Ra} = k$, $\mathrm{Ra}_1 = k+1 < n$ параметры порождающего решения и поправка ΔT определяются из системы (2.7), если

$$\mathrm{Ra}_1^* = \left\| \frac{\partial P_\nu^*(h_1^*,\ldots,h_m^*,T^*,\gamma)}{\partial h_\beta^*},\ \sum_{\beta=1}^{n} V_{0\beta}^*(\mathbf{h}^*,T^*)q_{\beta\nu}^+(T^*) \right\| = n-k$$

3. Выбор порождающей системы. Задачу о продолжении симметричных периодических движений в негрубых случаях можно свести к случаю грубому надлежащим выбором порождающей системы, зависящей от малого параметра. Такие примеры решения задачи известны [5, 6].

Рассмотрим автономную или 2π-периодическую обратимую систему

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}_0(\varepsilon,\mathbf{u},\mathbf{v},t) + \mu\mathbf{U}_1 \quad (\varepsilon,\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{V}_0(\varepsilon,\mathbf{u},\mathbf{v},t) + \mu\mathbf{V}_1 \quad (\varepsilon,\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t);\quad \mathbf{u}\in\mathbb{R}^l,\ \mathbf{v}\in\mathbb{R}^n \quad (l \geqslant n)$$

с неподвижным множеством $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ и малыми параметрами ε и μ. Пусть при $\mu = 0$ система (3.1) допускает $2T^*$-периодическое, симметричное относительно $\mathbf{M}$ периодическое решение

$$\mathbf{u} = \varphi(\varepsilon, t), \quad \mathbf{v} = \psi(\varepsilon, t); \quad \varphi(\varepsilon, -t) = \varphi(\varepsilon, t), \quad \psi(\varepsilon, -t) = -\psi(\varepsilon, t) \tag{3.2}$$

причем $T^*(\varepsilon) = \pi$ в случае 2π-периодической системы, а при $\varepsilon = 0$ решение (3.2) принадлежит m-семейству. Интересно выяснить, для какого класса функций $\mu = \mu(\varepsilon)$ вопрос о существовании в (3.1) симметричного периодического движения решается только порождающей системой, полученной из (3.1) при $\mu = 0$.

Необходимые и достаточные условия $2T$-периодичности симметричного решения имеют вид (1.3), где теперь левые части зависят также от ε. Обозначим

$$\varphi(\varepsilon, 0) = \mathbf{u}^*, \quad \Delta u_j^\circ = u_j^\circ - u_j^* \quad (j = 1, \ldots, l), \quad \Delta T = T - T^*(\varepsilon)$$

и запишем (1.3) в виде

$$\sum_{j=1}^{l} [F_{sj}^*(\varepsilon) + F_{sj}]\Delta u_j^\circ + [G_s^*(\varepsilon) + G_s]\Delta T + \mu v_{1s}(\varepsilon, \mu, \Delta u^\circ, \Delta T) = 0 \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

где функции F_{sj}, G_s обращаются в нуль при $\Delta u^\circ = 0$, $\Delta T = 0$.

Пусть $\mathrm{Ra} = \mathrm{rank}\|F_{sj}^*(0)\| = k < n$. Тогда без ограничения общности можно считать, что

$$F_{sj}^*(\varepsilon) = \varepsilon[a_{sj} + F_{sj}^\circ(\varepsilon)] \quad (s = n - k + 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, l)$$

где a_{sj} не зависят от ε, а $F_{sj}^\circ(\varepsilon)$ обращаются в нуль при $\varepsilon = 0$. В случае 2π-периодической системы имеем $\Delta T = 0$, и последние $n - k$ уравнений в (3.3) приобретают вид

$$\sum_{j=1}^{l} \left[a_{sj} + F_{sj}^\circ(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} F_{sj}\right]\Delta u_j^\circ + \frac{\mu}{\varepsilon} v_{1s}(\varepsilon, \mu, \Delta u^\circ, \Delta T) = 0 \quad (s = n - k + 1, \ldots, n)$$

Поэтому в случае $\mu = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, система (3.3) разрешима относительно n величин из $\Delta u_1^\circ, \ldots, \Delta u_l^\circ$, если $\mathrm{rank}\|F_{sj}^*(\varepsilon)\| = n$ с учетом линейных по ε членов.

Аналогично исследуется автономная система (3.1).

Обозначим

$$r = \mathrm{rank}\begin{Vmatrix} F_{sj}^\circ(0) \\ a_{sj} \end{Vmatrix}, \quad r_1 = \mathrm{rank}\begin{Vmatrix} F_{sj}^\circ(0) & G_s^*(0) \\ a_{sj} & b_s \end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

$$F_{sj}^\circ(0) = \left(\frac{\partial v_s(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}^\circ, T}{\partial u_j^\circ}\right)_0, \quad G_s^*(0) = \left(\frac{\partial v_s(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}^\circ, T}{\partial T}\right)_0$$

$$a_{sj} = \left(\frac{\partial^2 v_s(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}^\circ, T}{\partial u_j^\circ \partial \varepsilon}\right)_0, \quad b_s = \left(\frac{\partial^2 v_s(\varepsilon, \mu, \mathbf{u}^\circ, T)}{\partial T \partial \varepsilon}\right)_0$$

Тогда справедлива

Теорема 3. Пусть система (3.1) при $\mu = 0$ имеет симметричное периодическое решение (3.2), принадлежащее при $\varepsilon = 0$ m-семейству ($m \geqslant n - k$). Если при этом $r = n$, то система (3.1) имеет симметричное относительно неподвижного множества $\mathbf{M}$ периодическое решение для любых возмущений с $\mu = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. В автономной системе (3.1) существование периодического решения для указанных возмущений гарантируется также при $r_1 = n$.

Замечание. В разд. 1,2 в качестве порождающей системы в (3.1) выбрана линейная по μ часть системы (1.1), однако симметричное периодическое решение последней неизвестно. Теоремы 1, 2 позволяют решать вопрос о существовании периодического решения в (1.1), не вычисляя такое симметричное решение.

Пример 2. *Обобщение задачи Хилла.* Плоские орбиты пассивно-гравитирующей точки в окрестности одного из основных тел в рамках круговой ограниченной задачи трех тел описываются [6] обратимой системой

$$x^{\cdot\cdot}-2my^{\cdot}+kx\rho^{-3}=m^2X(m,x,y) \tag{3.5}$$

$$y^{\cdot\cdot}+2mx^{\cdot}+ky\rho^{-3}=m^2Y(m,x,y),\quad \rho^2=x^2+y^2,\quad k=\mathrm{const}$$

с неподвижным множеством $\mathbf{M}=\{x,y,x^{\cdot},y^{\cdot}:y=0,\ x^{\cdot}=0\}$ и малым параметром m. Эта система содержит задачу Хилла [7] о движении Луны, которая выводится из (3.5) при $X=3x$, $Y=0$.

При $m=0$ система (3.5) имеет частное – круговое решение. Однако это решение не является порождающим. Ляпунов [5], давший первое строгое доказательство существования близких к круговым орбит в задаче Хилла, использует порождающую систему, зависящую от параметра m. При этом он проверяет условия продолжимости с учетом линейных по m членов.

Выберем в качестве порождающей для задачи (3.5) систему

$$x^{\cdot\cdot}-2my^{\cdot}+kx\rho^{-3}-m^2x=0,\quad y^{\cdot\cdot}+2myx^{\cdot\cdot}+ky\rho^{-3}-m^2y=0 \tag{3.6}$$

которая допускает круговые орбиты

$$x=a\cos\omega t,\quad y=a\sin\omega t,\quad ka^{-3}=(\omega+m)^2 \tag{3.7}$$

симметричные относительно множества $\mathbf{M}$ и принадлежащие семейству эллиптических орбит. Для решения вопроса о существовании в задаче (3.5) орбит, близких к орбитам (3.7), положим

$$x+iy=a\exp(i\omega t)(1+\alpha+i\beta)$$

Тогда в линейном по α и β приближении имеем

$$\alpha^{\cdot\cdot}+(\omega+m)^2\alpha-2(\omega+m)\gamma=0,\quad \beta^{\cdot}=\gamma-2(\omega+m)\alpha,\quad \gamma^{\cdot}=0 \tag{3.8}$$

причем неподвижному множеству $\mathbf{M}$ отвечает множество $\{\alpha,\beta,\alpha^{\cdot},\gamma^{\cdot}:\beta=0,\ \alpha^{\cdot}=0\}$. Поэтому нулевые корни характеристического уравнения не препятствуют [2] продолжению по параметру. Оставшаяся пара корней $\pm i(\omega+m)$, вычисленная с точностью линейных по m членов, не содержит критических корней, равных $\pm ip\omega$ ($p\in\mathbb{N}$). Следовательно, в (3.4) имеем $r=n=2$, и в системе (3.5) при малых $m\neq 0$ существуют симметричные относительно $\mathbf{M}$ периодические орбиты, близкие к круговым орбитам (3.7).

4. Сведение к квазилинейной системе. Негрубые случаи возникают и тогда, когда заранее неизвестно, что решение (1.2) порождающей системы принадлежит некоторому семейству. Кроме того, результаты разд. 1, 2 позволяют устанавливать существование периодических движений только в $O(\mu)$-окрестности порождающего решения, хотя известны [4, 8, 9] примеры движений, отличающихся от порождающих на величину $O(\mu^{1/s})$, $s\in\mathbb{N}$.

Указанные проблемы можно решить сведением к задаче о продолжении по параметру решений линейной системы. Отметим, что предложенный ниже подход с очевидными поправками применяется также к системам общего вида.

Пусть известно, что порождающая система, полученная из (1.1) при $\mu=0$, допускает 2π-периодическое решение (1.2). Положим

$$\mathbf{u}=\varphi(t)+\mathbf{x},\quad \mathbf{v}=\psi(t)+\mathbf{y}$$

Тогда для переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ получим 2π-периодическую систему

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{A}^{-}(t)\mathbf{x} + \mathbf{A}^{+}(t)\mathbf{y} + \mathbf{X}(\mathbf{x},\mathbf{y},t) + \mu\mathbf{U}_1 \quad (\mu, \boldsymbol{\varphi}+\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}+\mathbf{y}, t) \tag{4.1}$$
$$\mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{B}^{+}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}^{-}(t)\mathbf{y} + \mathbf{Y}(\mathbf{x},\mathbf{y},t) + \mu\mathbf{V}_1 \quad (\mu, \boldsymbol{\varphi}+\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}+\mathbf{y}, t)$$

которая является [10] обратимой с неподвижным множеством $\mathbf{M}_1 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$. Очевидно, линейная относительно **x**, **y** часть системы (4.1) при $\mu = 0$ совпадает с (2.2).

Теперь выполним замену: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\varepsilon\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{y})$, $\varepsilon = \mu^{\sigma}$, $0 < \sigma \leqslant 1$. В результате система (1.1) приобретает вид

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{A}^{-}(t)\mathbf{x} + \mathbf{A}^{+}(t)\mathbf{y} + \varepsilon^{\lambda}[\mathbf{X}_0(\mathbf{x},\mathbf{y},t) + \varepsilon\mathbf{X}_1(\varepsilon,\mathbf{x},\mathbf{y},t)] + \mu^{1-\sigma}\mathbf{U}_1(\mu, \boldsymbol{\varphi}+\varepsilon\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}+\varepsilon\mathbf{y}, t) \tag{4.2}$$
$$\mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{B}^{+}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}^{-}(t)\mathbf{y} + \varepsilon^{\lambda}[\mathbf{Y}_0(\mathbf{x},\mathbf{y},t) + \varepsilon\mathbf{Y}_1(\varepsilon,\mathbf{x},\mathbf{y},t)] + \mu^{1-\sigma}\mathbf{V}_1(\mu, \boldsymbol{\varphi}+\varepsilon\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}+\varepsilon\mathbf{y}, t)$$

($\lambda \geqslant 1, \lambda \in \mathbb{N}$). Если $\mathrm{Ra} = k < n$, то новая порождающая система, полученная из (4.2) при $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$, допускает ровно $l - k$ симметричных относительно $\mathbf{M}_1$, 2π-периодических решений

$$x_j = \varphi^*_{j\alpha}(t), \quad y_s = \psi^*_{s\alpha}(t) \quad (j = 1,\ldots,l;\ s = 1,\ldots,n;\ \alpha = 1,\ldots,l-k)$$

Значит, эта система имеет $(l-k)$-семейство от параметров $h_1,\ldots,h_{l-k}$ периодических решений

$$x_j = \varphi^*_j(\mathbf{h},t) \equiv \sum_{\alpha=1}^{l-k} h_\alpha \varphi^*_{j\alpha}(t), \quad y_s = \psi^*_s(\mathbf{h},t) \equiv \sum_{\alpha=1}^{l-k} h_\alpha \psi^*_{s\alpha}(t) \tag{4.3}$$

Пусть на рассматриваемом решении (1.2) не все интегралы вида (2.5) обращаются в нули. Тогда положим $\sigma = 1/(1+\lambda)$ и рассмотрим уравнения

$$P_\nu(\mathbf{h}) \equiv \int_0^{\pi}\left[\sum_{\alpha=1}^{l} X^*_\alpha(\mathbf{h},\tau)p^-_{\alpha\nu}(\tau) + \sum_{\beta=1}^{n} Y^*_\beta(\mathbf{h},\tau)q^+_{\beta\nu}(\tau)\right]d\tau = 0 \quad (\nu = 1,\ldots,n-k) \tag{4.4}$$

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{h},t) \equiv \mathbf{X}_0(\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{h},t),\ \boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{h},t),t) + \mathbf{U}_1(0,\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\psi}(t),t)$$
$$\mathbf{Y}^*(\mathbf{h},t) \equiv \mathbf{Y}_0(\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{h},t),\ \boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{h},t),t) + \mathbf{V}_1(0,\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\psi}(t),t)$$

где функции $p^-_{\alpha\nu}(\tau)$, $q^+_{\beta\nu}(\tau)$ имеют такой же смысл как и в (2.5). Применим результаты разд. 1, 2 к системе (4.2). Тогда справедлива

Теорема 3. Каждому корню $\mathbf{h}^*$ уравнения (4.4), удовлетворяющему условию

$$\operatorname{rank}\left\| \frac{\partial P_\nu(h^*_1,\ldots,h^*_{l-k})}{\partial h^*_j} \right\| = n-k \tag{4.5}$$

отвечает симметричное относительно множества $\mathbf{M}_1$, 2π-периодическое решение

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(t) + \mu^{\sigma}\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{h}^*,t) + o(\mu^{\sigma}), \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}(t) + \mu^{\sigma}\boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{h}^*,t) + o(\mu^{\sigma}), \quad \sigma = \frac{1}{1+\lambda}$$

системы (1.1), обращающееся в порождающее решение (1.2) при $\mu = 0$.

Следующий пример указывает на возможное обобщение теоремы 3.

Пример 3. Система уравнений

$$x^{\cdot\cdot} + x = (\alpha x^4 + y^{\cdot 2} + \mu a)\cos t, \quad y^{\cdot\cdot} + y = (\beta x^5 + x^3 y + \mu b)\cos t \tag{4.6}$$

(α, β, a, b = const) является обратимой системой вида (4.1) с неподвижным множеством $\{x, y, x^{\cdot}, y^{\cdot} : x^{\cdot} = 0, y^{\cdot} = 0\}$. Выполним в (4.6) замену: $(x, y) \to (\varepsilon x, \varepsilon^2 y)$, $\varepsilon^5 = \mu$. Тогда получим

$$x^{\cdot\cdot} + x = \varepsilon^3(\alpha x^4 + y^{\cdot 2} + \varepsilon a)\mathrm{cost}, \quad y^{\cdot\cdot} + y = \varepsilon^3(\beta y^5 + x^3 y + b)\mathrm{cost} \tag{4.7}$$

При $\varepsilon = 0$ система (4.7) допускает два семейства симметричных периодических движений: $x = A\cos t$, $y = B\cos t$. Поэтому уравнения (4.4) имеют вид

$$5\alpha A^4 + 6B^2 = 0,\ 5A^3B + 8b = 0$$

и при $\alpha < 0$ имеют простые решения, равные, например, $A = \mp 1$, $B = \pm 1$ при $\alpha = -6/5$, $b = 8/5$. Следовательно, при этих значениях параметров в системе (4.6) существуют периодические решения

$$x = \mp\mu^{1/5}\cos t + o(\mu^{1/5}),\ y = \pm\mu^{2/5}\cos t + o(\mu^{2/5})$$

Предположим теперь, что для решения (1.2) выполнены условия (2.5). В этом случае система (2.4) допускает семейство симметричных периодических решений

$$x_j = \varphi_j^*(\mathbf{h}, t) + \theta_j(t),\quad y_s = \psi_s^*(\mathbf{h}, t) + \chi_s(t);\quad j = 1,\ldots,l;\ s = 1,\ldots,n \tag{4.8}$$

Положим в системе (4.2) $\sigma = 1$. Тогда в каждом из двух возможных случаев:

$$1)\ \lambda > 1,\ \mathbf{X}^* \equiv \mathbf{X}_\lambda \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \mu} + \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \mathbf{u}}\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{y}\right]_*,\quad \mathbf{Y}^* \equiv \mathbf{Y}_\lambda \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \mu} + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \mathbf{u}}\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{y}\right]_*$$

$$2)\ \lambda = 1,\ \mathbf{X}^* \equiv \mathbf{X}_\lambda + [\mathbf{X}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)]_*,\quad \mathbf{Y}^* \equiv \mathbf{Y}_\lambda + [\mathbf{Y}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)]$$

(звездочка у квадратной скобки означает, что производные вычислены при $\mu = 0$, $\mathbf{u} = \varphi(t)$, $\mathbf{v} = \psi(t)$, а вместо $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ подставлены выражения (4.8)) выполнение условий (4.4), (4.5) гарантирует существование в системе (1.1) решений

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(t) + \mu[\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{h}^*, t) + \boldsymbol{\theta}(t)] + o(\mu),\quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}(t) + \mu[\boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{h}^*, t) + \boldsymbol{\chi}(t)] + o(\mu)$$

Замечание. Как и в разд. 1, 2, можно провести опущенное здесь более подробное исследование в случае автономной системы (1.1).

5. Квазилинейная система. Теория колебаний для квазилинейной обратимой системы строится так же, как и для системы общего вида [4]. Однако при этом необходимо рассматривать симметричные периодические решения линейной системы и использовать результаты разд. 2. Опуская эти построения, ниже ограничимся одним результатом для автономной обратимой системы

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^\cdot = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mu\mathbf{X}(\mu, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\mathbf{y}^\cdot = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mu\mathbf{Y}(\mu, \mathbf{x}, \mathbf{y});\quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l,\quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\ (l \geqslant n) \end{aligned} \tag{5.1}$$

($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – постоянные матрицы) с неподвижным множеством $\{\mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$, не имеющим аналога в системе общего вида.

Матрица $\mathbf{A}$ имеет не более $l - n$ линейно-независимых строк, и элементарное преобразование приводит $\mathbf{A}$ к виду, в котором $l - n$ строк заполнены нулями. Обозначим через $\boldsymbol{\xi}$ переменную, отвечающую этим строкам. Тогда уравнение для $\mathbf{y}$ имеет вид

$$\mathbf{y}^\cdot = \mathbf{B}_*\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\xi} + \mu\mathbf{Y}(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y})\quad (\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{l-n},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

Предполагая, что $\det \mathbf{B}_* \neq 0$, заменим теперь вектор $\mathbf{x}$ на вектор $\mathbf{x} + \mathbf{B}_*^{-1}\mathbf{B}_1\boldsymbol{\xi}$. В результате всех преобразований система (5.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\xi}^\cdot = \mu\boldsymbol{\Xi}(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\mathbf{x}^\cdot = \mathbf{A}_*\mathbf{y} + \mu\mathbf{X}(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\mathbf{y}^\cdot = \mathbf{B}_*\mathbf{x} + \mu\mathbf{Y}(\mu, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y});\quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{l-n},\quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{5.2}$$

с неподвижным множеством $\mathbf{M}^* = \{\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$.

Пусть при $\mu = 0$ характеристическое уравнение системы (4.2) имеет пару $\pm i\omega$ чисто мнимых корней, а среди остальных нет корней вида $\pm ip\omega$ ($p \in \mathbb{N}$). Тогда порождающая система, полученная из (4.2) при $\mu = 0$, допускает единственное семейство

$$\xi_s = h_s, \quad x_j = \alpha_j h \cos\omega t, \quad y_j = \beta_j h \sin\omega t \quad (s = 1,\ldots,l-n; \; j = 1,\ldots,n) \tag{5.3}$$

симметричных относительно $\mathbf{M}^*$ периодических решений. При этом $h_1,\ldots,h_{l-n}$, h – параметры этого семейства, а $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ – одно из решений системы

$$-\boldsymbol{\alpha}\omega = \mathbf{A}_*\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\beta}\omega = \mathbf{B}_*\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_n)^T$$

Выясним вопрос о существовании периодических движений системы (5.1) при $\mu \neq 0$. В силу существования семейства решений (5.3) имеем в (1.5) $\mathrm{Ra} < n$. При $\mu = 0$ уравнение для ξ отделено от остальных уравнений, а подсистема для $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ допускает только одно семейство периодических движений. Значит, $\mathrm{Ra} = n - 1$. Вычислим

$$y_j^{\cdot}(\pi / \omega) = h\omega\beta_j \quad (j = 1,\ldots,n)$$

причем среди чисел β_j обязательно есть отличные от нуля. Без ограничения общности можно считать отличным от нуля только один коэффициент β_j, чего всегда можно добиться соответствующим линейным преобразованием переменных y_s. Отсюда немедленно следует, что в (1.5) $\mathrm{Ra}_1 = n$.

Теорема 4. Если в квазилинейной автономной обратимой системе (5.1) $\mathrm{rank}\, \mathbf{B} = n$, то каждой паре $\pm i\omega$ характеристического уравнения отвечает $2T(\mu)$-периодическое семейство от $h_1,\ldots, h_{l-n}$, h симметричных относительно множества $\{\mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ решений, $T(0) = \pi/\omega$, если среди остальных корней нет равных $\pm ip\omega (p \in \mathbb{N})$.

Следствие (теорема Ляпунова – Брюно – Девани [11, 12]). Если характеристическое уравнение обратимой системы

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{X}(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{Y}(\mathbf{x},\mathbf{y}); \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (l \geqslant n)$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{x},-\mathbf{y}) = -\mathbf{X}(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \mathbf{Y}(\mathbf{x},-\mathbf{y}) = \mathbf{Y}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – постоянные матрицы, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ – нелинейные члены) имеет пару чисто мнимых корней, а среди остальных корней нет равных $\pm ip\omega(p \in \mathbb{N})$, $\mathrm{rank}\, \mathbf{B} = n$, то к нулевому положению равновесия примыкает $(l - n + 1)$-семейство ляпуновских периодических движений.

Действительно, выполним замену $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\mu\mathbf{x}, \mu\mathbf{y})$. Тогда получим задачу о продолжении по параметру периодического решения квазилинейной системы (5.1).

6. Пространственные периодические орбиты в N-планетной задаче. Рассмотрим основную задачу небесной механики – задачу о движении механической системы, состоящей из $N + 1$ материальных точек $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_N$, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Предположим, что масса основного тела $\mathbf{S}$ значительно превосходит массы тел $\mathbf{P}_j$, и в этой N-планетной задаче исследуем вопрос о существовании периодических орбит.

Этот вопрос изучен мало. Рассматривались [13] плоские орбиты, близкие к круговым и замкнутые во вращающейся с постоянной угловой скоростью системе координат (орбиты первого рода). Получено [14] доказательство существования симметричных периодических орбит первого рода, а также орбит, близких к эллиптическим и замкнутым в неподвижной системе координат (орбиты 2 рода). Также сформулирован [3] результат о существовании пространственных периодических орбит (орбиты третьего рода). Ниже дано доказательство этого результата, основанное на теории разд. 2, 4, и в терминах малого параметра оценивается близость орбиты каждой планеты $\mathbf{P}_s$ к плоской орбите.

Движение планеты $\mathbf{P}_s$ отнесем к системе координат с началом в точке $\mathbf{S}$ – основном теле. Тогда положение $\mathbf{P}_s$ определится тройкой декартовых координат (ξ_s, η_s, ζ_s). Уравнения движения такой системы известны [15]. Выполним в полученной системе замену

$$x_s = \xi_s,\ y_s = \eta_s \cos\varphi_s + \zeta_s \sin\varphi_s,\ z_s = -\eta_s \sin\varphi_s + \zeta_s \cos\varphi_s \quad (s = 1,\dots,N)$$

с произвольными параметрами φ_s. В результате получим

$$\frac{d^2 w_s}{dt^2} + \frac{k_s w_s}{r_s^3} = \mu W_s(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}) \quad (s = 1,\dots,N) \tag{6.1}$$

Через w_s обозначены переменные x_s, y_s, z_s; k_s –произведение гравитационной постоянной на сумму масс тел $\mathbf{S}$ и $\mathbf{P}_s$; r_s – расстояние от $\mathbf{S}$ до $\mathbf{P}_s$, μ – отношение наибольшей из масс планет к массе тела $\mathbf{S}$ ($\mu \ll 1$). W_s –правые части уравнений для x_s, y_s, z_s (здесь и всюду далее суммирование ведется от $j = 1$ до $j = N$, причем $j \neq s$):

$$X_s = \sum k_j^* \left[\frac{x_s - x_j}{r_{sj}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right]$$

$$Y_s = \sum k_j^* \left\{ \frac{y_s}{r_{sj}^3} - \left[\frac{1}{r_{sj}^3} - \frac{1}{r_j^3} \right] [y_j \cos(\varphi_s - \varphi_j) + z_s \sin(\varphi_s - \varphi_j)] \right\} \tag{6.2}$$

$$Z_s = \sum k_j^* \left\{ \frac{z_s}{r_{sj}^3} + \left[\frac{1}{r_{sj}^3} - \frac{1}{r_j^3} \right] [y_j \sin(\varphi_s - \varphi_j) - z_s \cos(\varphi_s - \varphi_j)] \right\}$$

$$r_{sj}^2 = (x_s - x_j)^2 + (y_s - y_j)^2 + (z_s - z_j)^2 + 2\{(y_s y_j + z_s z_j)[1 - \cos(\varphi_s - \varphi_j)] -$$
$$-(y_s z_j - y_j z_s)\sin(\varphi_s - \varphi_j)]\} \quad (s, j = 1,\dots,N;\ s \neq j)$$

Система (6.1), (6.2) инвариантна относительно каждого из преобразований (t, **x**, **y**, **z**) $\to$ ($-t$, **x**, $-$**y**, $-$**z**) и (t, **x**, **y**, **z**) $\to$ ($-t$, $-$**x**, **y**, **z**), т.е. является линейно-обратимой вида (1.1) с двумя неподвижными множествами $\mathbf{M}_1 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}^{\cdot}, \mathbf{y}^{\cdot}, \mathbf{z}^{\cdot} : \mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{z} = \mathbf{0}\}$ и $\mathbf{M}_2 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}^{\cdot}, \mathbf{y}^{\cdot}, \mathbf{z}^{\cdot} : \mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{0}, \mathbf{z}^{\cdot} = \mathbf{0}\}$.

При $\mu = 0$ система (6.1) распадается на N задач двух тел, каждая из которых описывает невозмущенную кеплерову задачу. Получим орбиты – кривые второго порядка

$$r_s^*(\theta_s) = \frac{\lambda_s}{1 + e_s \cos\theta_s},\ r_s^{*2}(\theta_s)\frac{d\theta_s}{dt} = c_s,\ \lambda_s = \frac{c_s^2}{k_s},\ e_s = \left(1 + h_s \frac{c_s^2}{k_s^2}\right)^{1/2} \tag{6.3}$$

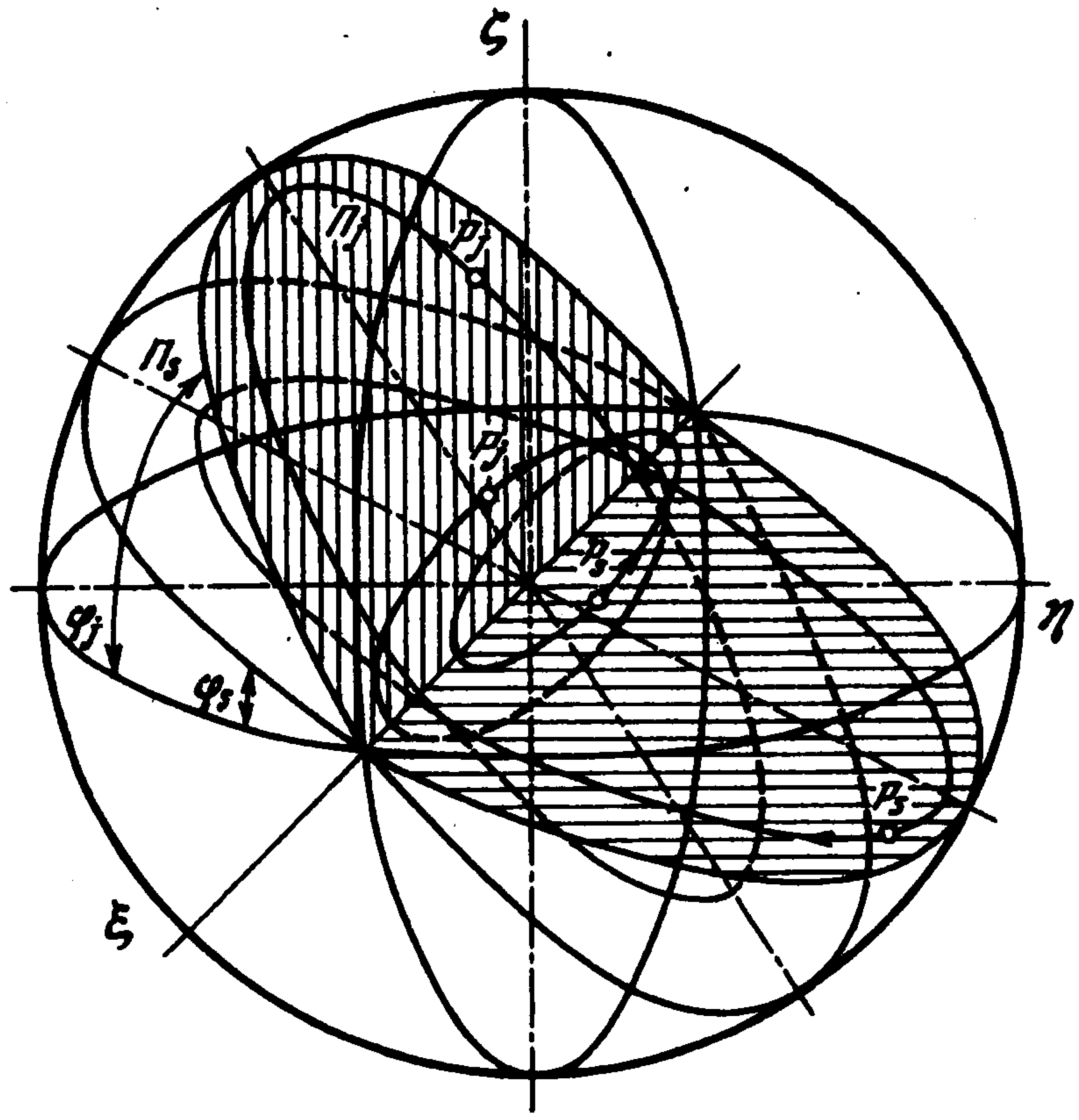
где c_s и h_s – постоянные площадей и энергии в s-й задаче. Движения будут происходить по эллипсам, если $0 < |e_s| < 1$.

Без ограничения общности можно считать, что движения (6.3) происходят в плоскостях (x_s, y_s), т.е. для них $z_s = 0$. Тогда в системе координат $\xi\eta\zeta$ каждая из планет $\mathbf{P}_s$ имеет свою плоскость орбиты (Π_s), которая образует угол φ_s с плоскостью $\xi\eta$. Для семейства, симметричного относительно множества $\mathbf{M}_1$, большие полуоси эллипсов совпадают с осью ξ, для второго семейства большие полуоси принадлежат прямым $\xi_s = 0$, $\eta_s \cos\varphi_s + \zeta_s \sin\varphi_s = 0$; $s = 1,\dots,N$ (фиг. 1). На первом семействе имеем

$$x_s = r_s^*(\theta_s)\cos\theta_s,\ y_s = r_s^*(\theta_s)\sin\theta_s,\ z_s = 0 \tag{6.4}$$

для второго семейства

$$x_s = r_s^*(\theta_s)\sin\theta_s,\ y_s = r_s^*(\theta_s)\cos\theta_s,\ z_s = 0 \tag{6.5}$$



Фиг. 1

Рассматриваемые движения являются периодическими в s-й подсистеме. Для всей порождающей системы решение (6.3) образует $2N$-параметрическое от начальных условий (c_s, h_s) семейство условно-периодических движений. Среди множества этих движений существуют периодические движения, для которых выполнены условия

$$n_s = \frac{\sqrt{k_s}}{a_s^{3/2}} = l_s\omega \quad (l_s \in \mathbb{N}), \quad \lambda_s = a_s(1-e_s^2) \qquad (s=1,\dots,N) \tag{6.6}$$

где n_s – средние движения, a_s – большие полуоси эллипсов, а ω – некоторое положительное число. Соотношения (6.6) означают, что средние движения относятся как целые числа.

Условия (6.6) числом $N-1$ накладываются на $2N$ постоянных c_s,h_s. Следовательно, имеем $(N+1)$-семейство от начальных условий периодических движений. Учитывая теперь зависимость системы (6.1) от $N-1$ существенных параметров $\varphi_s - \varphi_j$, значения которых также определяются начальными условиями, получим $2N$-семейство симметричных эллиптических движений порождающей системы. Таких семейств шесть, ибо при переходе $(\xi, \eta, \zeta) \to (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ можно взять вместо (ξ, η) любую из трех пар, а для каждой пары возможны два варианта (6.4) или (6.5). Отметим также, что условия (6.6) накладываются только на полуоси эллипсов, не затрагивая эксцентриситетов e_s, а направление движения планеты по эллипсу определяется индивидуально. Симметричные периодические орбиты, полученные продолжением по параметру μ эллиптических решений (6.4) или (6.5), назовем периодическими орбитами третьего рода, если среди разностей $\varphi_s - \varphi_j$ $(s \neq j)$ есть отличные от нуля.

Рассмотрим для определенности решение (6.4) порождающей системы и в его окрестности примем

$$x_s + iy_s = r_s^*(\theta_s)\exp(i\theta_s)(1+p_s), \quad x_s - iy_s = r_s^*\exp(-i\theta_s)(1+q_s)$$

$$z_s = r_s^*(\theta_s)\sigma_s \quad (s=1,\dots,N) \tag{6.7}$$

Тогда получим

$$\frac{d^2p_s}{d\theta_s^2} + 2i\frac{dp_s}{d\theta_s} + \frac{1+p_s}{1+e_s\cos\theta_s}R_s(\mathbf{p},\mathbf{q},\boldsymbol{\sigma}) + \mu\frac{r_s^{*3}e^{-i\theta_s}}{c_s^2}(X_s^* + iY_s^*) = 0$$

$$\frac{d^2 q_s}{d\theta_s^2} - 2i\frac{dq_s}{d\theta_s} + \frac{1+q_s}{1+e_s\cos\theta_s}R_s(\mathbf{p},\mathbf{q},\boldsymbol{\sigma}) + \mu\frac{r_s^{*3}e^{i\theta_s}}{c_s^2}(X_s^* - iY_s^*) = 0 \qquad (6.8)$$

$$\frac{d^2\sigma_s}{d\theta_s^2} + \left(1 + \frac{R_s(\mathbf{p},\mathbf{q},\boldsymbol{\sigma})}{1+e_s\cos\theta_s}\right)\sigma_s + \mu\frac{r_s^{*3}}{c_s^2}Z_s^* = 0$$

$$R_s(\mathbf{p},\mathbf{q},\boldsymbol{\sigma}) = [(1+p_s)(1+q_s)+\sigma_s^2]^{-3/2} - 1 \quad (s = 1,\dots,N)$$

где X_s^*, Y_s^*, Z_s^* – результат подстановки в функции соответственно X_s, Y_s, Z_s новых переменных p_s, q_s, σ_s по формулам (6.7).

В системе (6.8) независимой переменной является угол $\theta = \omega t$, причем правые части являются 2π-периодическими функциями θ, а $\pm\theta_s = l_s\theta + f_s(l_s\theta)$ [15], где f_s – ряд Фурье относительно $l_s\theta$, абсолютно сходящийся пока $|e| < \bar{e}$ (предела Лапласа), а знак перед θ_s совпадает с знаком c_s. Имея это в виду, тем не менее для дальнейшего рассмотрения удобно в качестве переменной в s-й подсистеме сохранить угол θ_s.

Отметим также то важное обстоятельство, что система (6.8) обратима и инвариантна относительно замены $(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma) \to (t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, -\sigma)$.

Выполним еще одну замену: $\sigma_s = \varepsilon\chi_s (s = 1,\dots,N)$, $\varepsilon^3 = \mu$. Тогда уравнение для χ_s имеет вид

$$\frac{d^2\chi_s}{d\theta_s^2} + \left[1 + \frac{R_s}{1+e_s\cos\theta_s}\right]\chi_s + \varepsilon^2\Phi_s + \varepsilon^3\psi_s \quad (s = 1,\dots,N)$$

$$\Phi_s = \frac{r_s^{*3}}{c_s^2}\sum k_j^*\left[\frac{1}{r_{sj}^3} - \frac{1}{r_j^3}\right]\frac{r_j^*\sin\theta_j}{1+e_s\cos\theta_s}\sin(\varphi_s - \varphi_j)$$

$$\Psi_s = \frac{r_s^{*3}}{c_s^2}\sum k_j^*\left[\frac{r_s^*\chi_s}{r_{sj}^3} - \left(\frac{1}{r_{sj}^3} - \frac{1}{r_j^3}\right)r_j^*\chi_j\cos(\varphi_s - \varphi_j)\right]$$

Отсюда, а также из первых двух групп уравнений (6.8), полагая $\varepsilon = 0$, получим порождающую систему

$$\frac{d^2 p_s}{d\theta_s^2} + 2i\frac{dp_s}{d\theta_s} + \frac{1+p_s}{1+e_s\cos\theta_s}R_s^* = 0$$

$$\frac{d^2 q_s}{d\theta_s^2} - 2i\frac{dq_s}{d\theta_s} + \frac{1+q_s}{1+e_s\cos\theta_s}R_s^* = 0 \qquad (6.9)$$

$$\frac{d^2\chi_s}{d\theta_s^2} + \left[1 + \frac{R_s^*}{1+e_s\cos\theta_s}\right]\chi_s = 0, \quad R_s^* = [(1+p_s)(1+q_s)]^{-3/2} - 1 \quad (s = 1,\dots,N)$$

Видно, что подсистема уравнений для p_s, q_s отщепляется от уравнений для χ_s. При этом подсистема допускает [14] единственное (нулевое) периодическое решение, если исключить из рассмотрения конечное число значений эксцентриситетов. Значит, порождающая система (6.9) допускает единственное семейство симметричных относительно неподвижного множества $\mathbf{M}_1^* = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \chi, \mathbf{p}^\cdot, \mathbf{q}^\cdot, \chi^\cdot : \mathbf{p} = \mathbf{q}, \mathbf{p}^\cdot = \mathbf{q}^\cdot, \chi = \mathbf{0}\}$ периодических решений

$$p_s = 0,\ q_s = 0,\ \chi_s = \alpha_s\sin\theta_s(\alpha_s = \text{const});\ s = 1,\dots,N \qquad (6.10)$$

Размерность неподвижного множества $\mathbf{M}_1^*$ равна $3N$ – половине размерности фазового пространства. В плоской задаче ($\chi_s = 0$; $s = 1,\dots, N$) решение $p_s = q_s = 0$

($s = 1,\dots, N$) является [14] порождающим и Ra = $2N$, значит в системе (6.9) для решения (6.10) также имеем Ra = $2N < 3N$.

Выясним условия продолжения по ε решения (6.10), используя теорию разд. 4. В уравнениях для χ_s отсутствуют линейные по ε члены. Члены порядка ε^2 имеют вид

$$U_{1s} = -\frac{3\chi_s^3}{2(1+e_s\cos\theta_s)} + \Phi_s \quad (s = 1,\dots,N)$$

Поэтому из (4.4) следует, что амплитуды $|\alpha_s|$ порождающего решения должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{3}{2}\alpha_s^3\int_0^\pi \frac{\sin^4\theta_s d\theta}{1+e_s\cos\theta_s} = A_s^* \tag{6.11}$$

$$A_s^* = \int_0^\pi g_s(\theta)\sin\theta_s\sin\theta_j d\theta, \qquad g_s(\theta) = \frac{r_s^{*3}}{c_s^2}\sum k_j^*\left[\frac{1}{r_{sj}^{*3}} - \frac{1}{r_j^{*3}}\right]\frac{r_j^*\sin(\varphi_s-\varphi_j)}{1+e_j\cos\theta_j}$$

$$r_{sj}^{*2} = r_s^{*2} + r_j^{*2} - 2r_s^* r_j^*[\cos\theta_s\cos\theta_j + \sin\theta_s\sin\theta_j\cos(\varphi_s-\varphi_j)] \quad (s = 1,\dots,N)$$

Очевидно, при $A_s^* \neq 0$ $(s = 1,\dots,N)$ все корни α_s уравнения (6.11) простые, и условия продолжения теоремы 3 выполнены.

Интегралы A_s^* зависят от $2N$ параметров e_s, $\varphi_s - \varphi_1$ ($s = 1,\dots, N$), ω. В пространстве этих параметров условие $A_j^* = 0$ определяет многообразие размерности $2N - 1$, для которого решения (6.10) не являются порождающими. При фиксированных эксцентриситетах e_s и частоте ω условие $A_j^* = 0$ определяет те плоскости, для которых задача о существовании пространственных периодических орбит требует дальнейшего исследования. В любом случае почти все пространственные орбиты (6.4), (6.10) являются порождающими.

Аналогичные вычисления для семейства (6.5) приводят к задаче о продолжении по параметру ε симметричных относительно неподвижного множества $\mathbf{M}_2^* = \{\mathbf{p},\mathbf{q},\boldsymbol{\chi},\mathbf{p}^\cdot, \mathbf{q}^\cdot,\boldsymbol{\chi}^\cdot : \mathbf{p} = \mathbf{q}, \mathbf{p}^\cdot = \mathbf{q}^\cdot, \boldsymbol{\chi}^\cdot = \mathbf{0}\}$ периодических решений $p_s = 0$, $q_s = 0$, $\chi_s = \beta_s\cos\theta_s$ (β_s = const); $s = 1,\dots, N$.

При этом амплитуды $|\beta_s|$ порождающего уравнения удовлетворяют уравнениям

$$\frac{3}{2}\beta_s^3\int_0^\pi \frac{\cos^4\theta_s d\theta}{1+e_s\cos\theta_s} = B_s^*, \quad B_s^* = \int_0^\pi g_s(\theta)\cos\theta_s\cos\theta_j d\theta$$

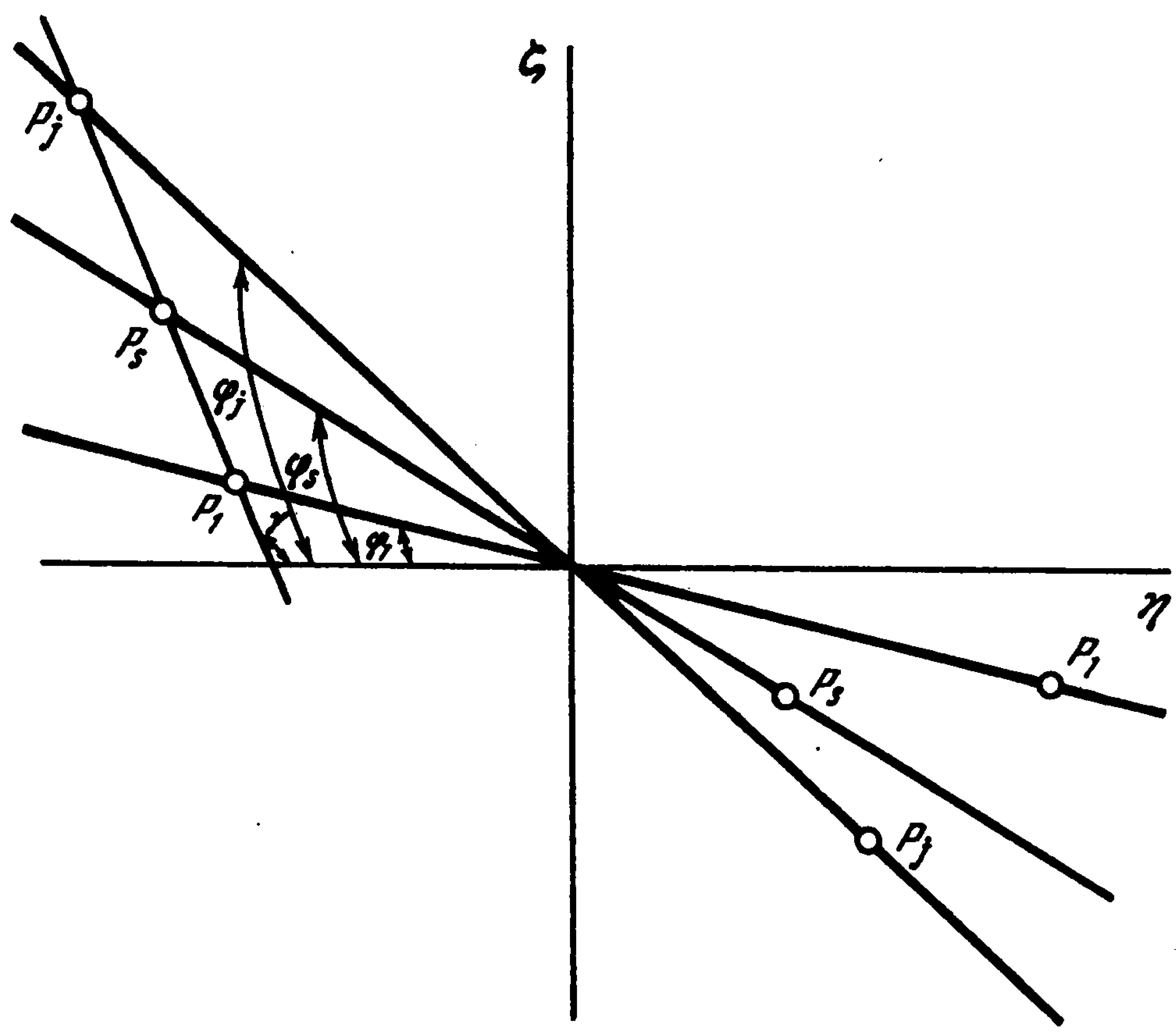
Теперь можно уточнить вид пространственных орбит. В первом по ε приближении получим

$$x_s = r_s^*(\theta_s)\cos\theta_s + O(\varepsilon^2),\ y_s = r_s^*(\theta_s)\sin\theta_s + O(\varepsilon^2),\ z_s = \varepsilon\alpha_s r_s^*(\theta_s)\sin\theta_s + O(\varepsilon^2) \tag{6.12}$$

$$x_s = r_s^*(\theta_s)\sin\theta_s + O(\varepsilon^2),\ y_s = r_s^*(\theta_s)\cos\theta_s + O(\varepsilon^2),\ z_s = \varepsilon\beta_s r_s^*(\theta_s)\cos\theta_s + O(\varepsilon^2) \tag{6.13}$$

соответственно для случаев (6.4) и (6.5). Отсюда следует, что при $\mu \neq 0$ симметричные периодические орбиты расположены в $O(\mu^{1/3})$-окрестности плоскостей Π_s. При этом период рассматриваемых движений равен $2\pi/\omega$ по времени t.

Теорема 5. При достаточно малом $\mu = \max\limits_s\{M_s / M_0\}$ в N-планетной задаче, состоящей из основного тела с массой M_0 и планет $\mathbf{P}_1,\dots,\mathbf{P}_N$ с массами соответственно $M_1,\dots,M_N$, существуют два семейства симметричных, близких к эллиптическим, периодических орбит при всех значениях эксцентриситетов $e_s(0<|e_s|<1)$, исключая, быть может, конечное число критических значений. Орбита для планеты $\mathbf{P}_s$ расположена в $O(\mu^{1/3})$-окрестности плоскости Π_s и описывается формулами (6.12) или (6.13), все плос-



Фиг. 2

кости проходят через одну и ту же неподвижную прямую – линию узлов, угол $\varphi_s - \varphi_j$ между плоскостями Π_s и Π_j – произвольный. Средние движения по орбитам равны средним движениям по эллипсам (6.4) или (6.5) и относятся как натуральные числа, движение всей системы является периодическим. В моменты времени, кратные полупериоду, все планеты в первом семействе располагаются на линии узлов (парад планет), во втором семействе они пересекают одну и ту же неподвижную плоскость, которой принадлежат линии апсид в невозмущенной ($\mu = 0$) задаче.

Понятно, что и во втором семействе орбит планеты $\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_N$ могут образовывать прямую в моменты времени, кратные полупериоду (фиг. 2). С точностью до слагаемых порядка $\mu^{1/3}$ расстояние $\mathbf{SP}_s$ в эти моменты времени равно $a_s(1+e_s)$, причем в случае $e_s > 0$ планета $\mathbf{P}_s$ проходит в порождающем решении апоцентр, в противном случае – перицентр. Если прямая $\mathbf{L}$, на которой располагаются планеты, образует угол γ с осью η, то

$$\frac{a_s(1+e_s)}{a_1(1+e_1)} = \frac{\sin(\gamma+\varphi_1)}{\sin(\gamma+\varphi_s)}$$

Еще через полупериод планеты в общем случае не располагаются на одной прямой. Это иллюстрирует фиг. 2, на которой $e_1 < 0$, $e_s > 0$, $e_j > 0$. Следовательно, для второго семейства орбит парад планет наблюдается во времена, кратные периоду $2\pi/\omega$. Только в случае $e_s = e_1$ ($s = 2,\ldots,N$) парад наблюдается дважды за период.

Автор благодарит В.В. Румянцева, привлекшего внимание автора к явлению резонансности в Солнечной системе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00538).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тхай В.Н.* Неподвижные множества и симметричные периодические движения обратимых механических систем // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 959–971.
2. *Тхай В.Н.* Нелинейные колебания обратимых систем // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 38–50.

3. *Тхай В.Н.* Симметричные периодические орбиты третьего рода в N-планетной задаче. Резонансность и парад планет // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 1. С. 52–55.
4. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
5. *Ляпунов А.М.* О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны. Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 1. С. 418–476.
6. *Тхай В.Н.* Симметричные периодические орбиты в ограниченной задаче трех тел // Космич. исследования. 1997. Т. 35. № 2. С. 164–171.
7. *Hill G.W.* Researches in the lunar theory // Amer. J. Math. 1878. V. 1. P. 5–26; 129–147; 245–260.
8. *Проскуряков А.П.* Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 256 с.
9. *Холостова О.В.* О движении близкой к гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 405–412.
10. *Матвеев М.В., Тхай В.Н.* Устойчивость периодических обратимых систем // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 3–11.
11. *Брюно А.Д.* Аналитическая форма обыкновенных дифференциальных уравнений / Тр. Моск. мат. о-ва. 1971. Т. 25. С. 119–262; 1972. Т. 26. С. 199–239.
12. *Devaney R.L.* Reversible diffeomorphisms and flows // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218. P. 89–113.
13. *Moulton F.R., Buchman D., Buch T.* Periodic orbits. Washington: Carnegie Inst., 1920. 524 p.
14. *Тхай В.Н.* Симметричные периодические орбиты задачи многих тел. Резонансность и парад планет // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 355–365.
15. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 799 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.XII.1996