УДК 531.36 534.1

© 1998 г. А.С. Ковалева

ОКОЛОРЕЗОНАНСНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Изучается влияние случайных возмущений на околорезонансные движения в нелинейных колебательных системах. Предполагается, что уравнения движения системы приводятся к стандартной форме с малым параметром ε, и в невозмущенной системе существует изолированный первичный резонанс [1]. Рассматривается поведение возмущенной системы в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности резонансной поверхности и исследуется эффект, аналогичный детерминированному "захватыванию в резонанс" [1] на асимптотически большом интервале времени.

Ранее [2, 3] изучались некоторые частные случаи резонансов в диффузионных системах на плоскости. Доказывалась близость возмущенного движения к детерминированному и исследовались малые уклонения возмущенных траекторий от стационарной точки.

Ниже показано, что случайные возмущения, малые в нерезонансной области, существенно влияют на поведение траекторий вблизи резонанса. Поэтому в околорезонансной области целесообразно рассматривать не малые случайные уклонения от невозмущенной траектории, а траекторию в целом как случайный процесс. Близкий подход для диффузионных систем развивался [4] в предположении, что ширина резонансной области пропорциональна ε, а не $\sqrt{\varepsilon}$. В этой области эффект "застревания" траекторий не может быть обнаружен.

В разд. 1 рассматривается базовая модель двухчастотной системы со случайными возмущениями произвольной природы. Строится процедура последовательного усреднения, позволяющая выделить медленную переменную. Доказано, что в околорезонансной области уравнения возмущенного движения сводятся к уравнению эквивалентного маятника со случайным крутящим моментом. Выделены зоны либрации и ротационного движения, соответствующие проходу через резонанс и движению без пересечения резонансной поверхности, и формулируется стохастический аналог эффекта "застревания на резонансе". В разд. 2 формулируется необходимое условие "застревания на резонансе". В разд. 3 приводятся аналогичные результаты для многочастотной системы. В разд. 4 полученные теоретические результаты применяются для анализа околорезонансных движений в системе с одной степенью свободы.

1. Последовательное усреднение. Исследуем систему вида

$$\dot{x} = \varepsilon f(x,\theta_1,\theta_2)+\varepsilon F(x,\theta_1,\theta_2)\xi(t) \tag{1.1}$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i(x)+\varepsilon g_i(x,\theta_1,\theta_2)+\varepsilon G_i(x,\theta_1,\theta_2)\xi(t), \quad i=1,2$$

при $\varepsilon \to 0$. Здесь x, θ_i – скаляры, $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий определенным условиям перемешивания [5], выполняющимся, в частности, для нормальных стационарных процессов. Предполагаем, что слагаемые в правой части (2.1) представимы как 2π-периодические по θ_i тригонометрические многочлены с конечным числом гармоник и достаточно гладкими коэффициентами, частоты $\omega_i(x) \geqslant \bar{\omega}_i > 0$ во всей рассматриваемой области изменения переменных. Нерезонансные движения (1.1) исследовались в [5].

Сравним (1.1) с невозмущенной системой

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, \theta_1, \theta_2), \quad \dot{\theta}_i = \omega_i(x) + \varepsilon g_i(x, \theta_1, \theta_2), \quad i = 1,2 \tag{1.2}$$

и предположим, что в рассматриваемом приближении по ε система (1.2) имеет единственную резонансную поверхность

$$\gamma(x) = \lambda_1 \omega_1(x) + \lambda_2 \omega_2(x) = 0 \tag{1.3}$$

где λ_1, λ_2 – некоторые целые числа, не равные одновременно нулю. Это означает [6], что временное среднее

$$\langle f \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x, \omega_i(x)t + \varphi_i) dt, \quad i = 1,2 \tag{1.4}$$

рассматриваемое как функция $\omega_i(x)$, терпит разрыв на поверхности (1.3).

Как и в детерминированных системах, исследуем поведение решений, лежащих в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности, резонансной поверхности (1.3). Пусть начальная точка $x(0, \varepsilon) = \bar{x}$ лежит в указанной окрестности, т. е.

$$\gamma(\bar{x}) = \mu \bar{p}, \quad \mu = \sqrt{\varepsilon} \tag{1.5}$$

Следуя [6], введем новые переменные

$$\gamma(x) = \lambda_1 \omega_1(x) + \lambda_2 \omega_2(x), \quad \Phi = \lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2, \quad \theta_1 = \psi \tag{1.6}$$

т. е. $x = X(\gamma)$. Разыскивая решение, лежащее в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности (1.3), положим

$$\gamma(x) = \mu P, \quad \mu = \sqrt{\varepsilon} \tag{1.7}$$

Тогда (1.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \mu b(\mu P, \Phi, \psi) + \mu D(\mu P, \Phi, \psi)\xi(t) \\ \dot{\Phi} &= \mu P + \mu^2 k(\mu P, \Phi, \psi) + \mu^2 K(\mu P, \Phi, \psi)\xi(t) \\ \dot{\psi} &= \tilde{\omega}(\mu P) + \mu^2 v(\mu P, \Phi, \psi) + \mu^2 V(\mu P, \Phi, \psi)\xi(t) \end{aligned} \tag{1.8}$$

коэффициенты (1.8) получены подстановкой (1.6), (1.7) в (1.1). Здесь $\tilde{\omega} = \omega_1(X(\mu P)) = \Omega_0 + \mu\Omega_1 P + \ldots$, где $\Omega_0 = \omega_1(X(0)) = \text{const}$. Следовательно, (1.8) может рассматриваться как система в стандартной форме, и к ней можно применить метод стохастического усреднения с учетом высших приближений [7]. В соответствии с [7], в детерминированных коэффициентах следует удержать слагаемые вплоть до второго порядка, а в случайных коэффициентах – слагаемые первого порядка малости по μ. Перепишем (1.8), учитывая только существенные для дальнейшего анализа слагаемые

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \mu b_0(\Phi, \psi) + \mu^2 b_1(\Phi, \psi) P + \mu D_0(\Phi, \psi)\xi(t) \\ \dot{\Phi} &= \mu P + \mu^2 k_0(\Phi, \psi), \quad \dot{\psi} = \Omega_0 + \mu\Omega_1 P + \mu^2 v_0(\Phi, \psi) \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $b_0(\Phi, \psi) = b(0, \Phi, \psi)$, $b_1(\Phi, \psi) = db/d(\mu P)|_{P=0}$ и т. д.

Для анализа системы (1.9) построим асимптотическую процедуру разделения движений, обобщающую метод последовательного усреднения для детерминированных систем [8], и выделим уравнения для медленной переменной, не зависящие от Φ, ψ.

Усреднение по быстрой переменной. Следуя [7], усредним (1.9) по ψ. Получим, что при $\mu \to 0$ процесс $P(t, \mu)$ слабо сходится [9] к решению $p(t, \mu)$ усредненной стохастической системы

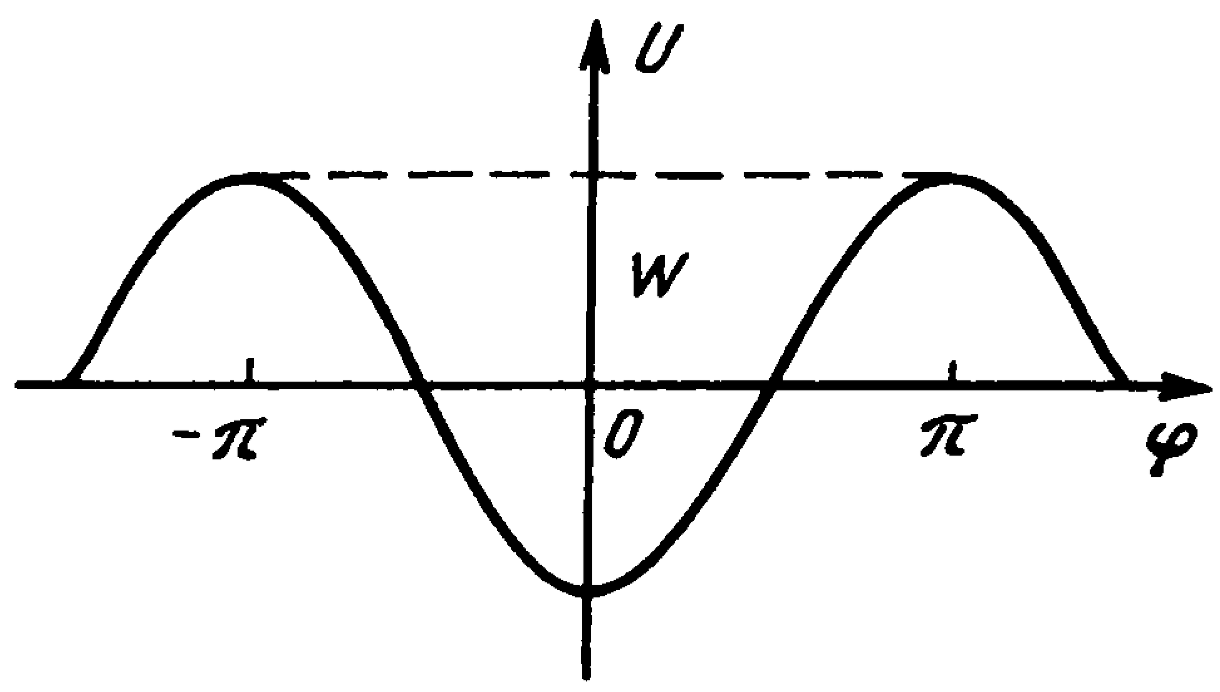
$$\dot{p} = \mu\beta_0(\varphi) + \mu^2 \beta_1(\varphi) p + \mu\sigma_0(\varphi)\dot{w}(t), \quad \dot{\varphi} = \mu p + \mu^2 \varkappa_0(\varphi) \tag{1.10}$$

с теми же начальными условиями, что и в (1.9). Здесь $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, коэффициенты сноса и диффузии вычисляются по формулам [7]

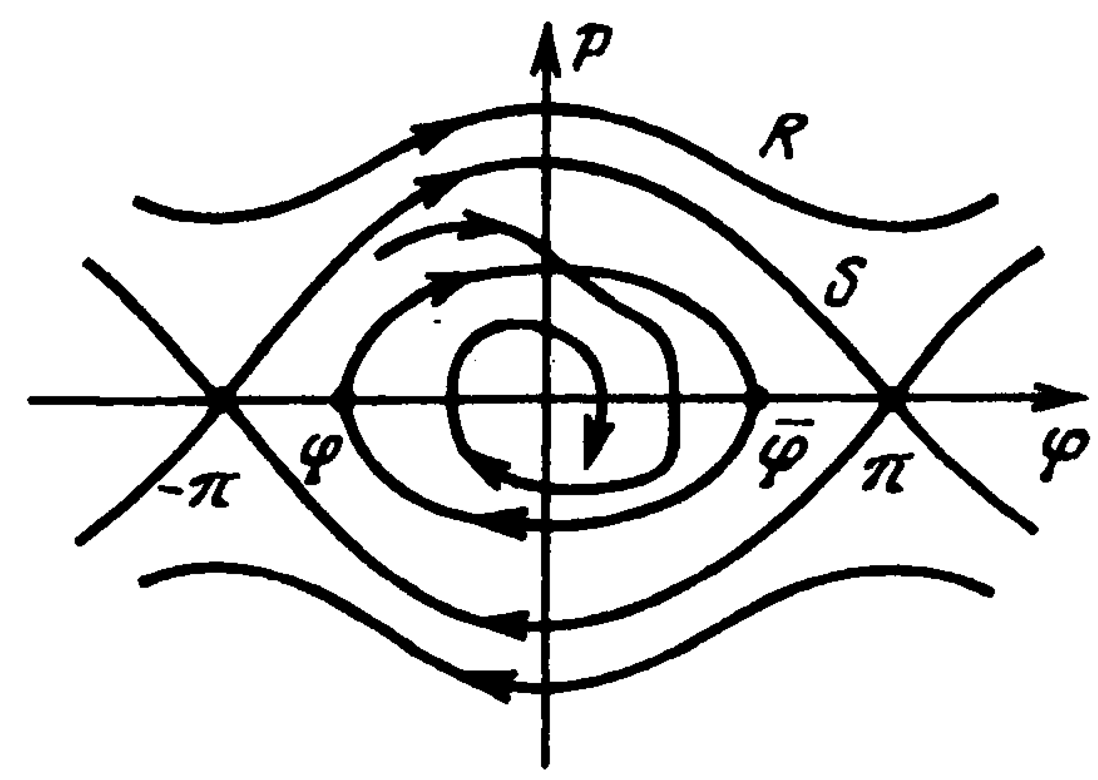
$$\beta_i(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b_i(\varphi,\psi)d\psi, \quad i = 0,1, \quad \varkappa_0(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_0(\varphi,\psi)d\psi \tag{1.11}$$

$$\sigma_0^2(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} D_0(\varphi,\psi)D_0(\varphi,\psi+\Omega_0 t)K_\xi(t)dt$$

$K_\xi(t)$ – корреляционная функция процесса $\xi(t)$. Структура коэффициентов (1.9) такова, что при усреднении вплоть до второго порядка дополнительные слагаемые в коэффициенте сноса не появляются. Доказано [7], что сходимость $P \to p$ обеспечивается на



Фиг. 1



Фиг. 2

таком интервале времени, где процесс $p(t, \mu)$ слабо компактен [9], [10]. Ниже покажем, что слабая компактность обеспечивается на интервале времени $t \sim 1/\mu^2$.

Усреднение по полумедленной переменной. Выделим в (1.10) укороченную подсистему

$$\dot{p}_0 = \mu\beta_0(\varphi_0), \quad \dot{\varphi}_0 = \mu p_0 \tag{1.12}$$

с теми же начальными условиями.

Если коэффициенты исходной системы (1.1) представимы в виде тригонометрических полиномов, то коэффициент $\beta_0(\varphi)$ может рассматриваться как 2π-периодическая функция с нулевым средним [1, 11]. При этом невозмущенная система (1.12) имеет первый интеграл, определяемый соотношением ($p = p_0$, $\varphi = \varphi_0$)

$$H = p^2/2 + U(\varphi), \quad dU/d\varphi = -\beta_0(\varphi) \tag{1.13}$$

Типичный 2π-периодический потенциал $U(\varphi)$, характеризующий движение вблизи резонанса, представлен на фиг. 1, соответствующие ему фазовые траектории – на фиг. 2 [11]. На фазовой плоскости выделяются области колебательного (O) и вращательного (R) движений, разделенные сепаратрисой S. Иначе говоря, движение возмущенной системы можно рассматривать как колебательные и вращательные движения эквивалентного маятника с упругим моментом – $\beta_0(\varphi)$ и возмущающим крутящим моментом. "Застреванию на резонансе" соответствуют только органиченные движения в области колебательных движений. В терминах изменения полной энергии H "захваченным" движениям соответствует движение в потенциальной яме W: $\min U(\varphi) < H < \max U(\varphi)$.

Исследуем влияние случайных возмущений на эти движения.

Следуя [12], введем новые переменные H и ϕ, где H удовлетворяет (1.13), а фаза ϕ определяется соотношениями

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \frac{2\pi}{T(h)}\frac{1}{p(h,\varphi)}, \quad T(H) = \int_{\Gamma(h)} \frac{1}{p(h,\varphi)}d\varphi \tag{1.14}$$

Здесь $T(H)$ – период, $2\pi/T(H)=\omega(H)$ – собственная частота колебаний. В области O интегрирование ведется по замкнутому контуру $\Gamma(H)$, ограниченному точками поворота $\varphi(H)$, $\bar{\varphi}(H)$ – корнями уравнения $H=U(\varphi)$.

Рассматривая H как новую медленную переменную, получим

$$p(H,\varphi)=\pm\{2[H-U(\varphi)]\}^{1/2} \tag{1.15}$$

Используя формулу Ито замены переменных в стохастических системах [9], получим

$$\dot{H}=\frac{\partial h}{\partial\varphi}\dot{\varphi}+\frac{\partial h}{\partial p}\dot{p}+\frac{1}{2}\mu^2\sigma_0^2(\varphi)\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}$$

$$\dot{\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\dot{\varphi}+\frac{\partial\phi}{\partial h}\dot{H}+\frac{1}{2}\mu^2\sigma_0^2(\varphi)p^2(H,\varphi)\frac{\partial^2\phi}{\partial h^2} \tag{1.16}$$

Из (1.11), (1.16) следует

$$\dot{H}=\mu^2 d(H,\varphi(H,\phi))+\mu\delta(H,\varphi(H,\phi))\dot{w}(t) \tag{1.17}$$

$$\dot{\phi}=\mu\omega(H)+\mu^2\Psi(H,\varphi(H,\phi))+\mu\Delta(H,\varphi(H,\phi))\dot{w}(t)$$

где

$$d=(H,\varphi)=\beta_0(\varphi)p^2(H,\varphi)-\beta_1(\varphi)\varkappa_0(\varphi)+\frac{1}{2}\sigma_0^2(\varphi),\quad \delta(H,\varphi)=\sigma_0(\varphi)p(H,\varphi) \tag{1.18}$$

Коэффициенты Ψ, Δ могут быть вычислены с помощью (1.16). Очевидно, что ϕ может рассматриваться как быстрая фаза по отношению к медленной переменной H и в силу (1.14) правые части (1.17) 2π-периодичны по ϕ. Для систем типа (1.17) справедлив принцип усреднения [13]: при $\mu\to 0$ процесс $h(t,\mu)\in W$ слабо сходится к медленному диффузионному процессу $h(\tau)$, удовлетворяющему уравнению

$$h'(\tau)=d_0(h)+\delta_0(h)w'(\tau),\quad \tau=\mu^2 t \tag{1.19}$$

штрих означает дифференцирование по медленной переменной τ, коэффициенты сноса и диффузии вычисляются усреднением по быстрой фазе ϕ. Учитывая связь (1.14) между фазами φ и ϕ, получим

$$d_0(h)=\frac{1}{T(h)}\int_{\Gamma(h)}\frac{d(h,\varphi)}{p(h,\varphi)d\varphi},\quad \delta_0^2(h)=\frac{1}{T(h)}\int_{\Gamma(h)}\frac{\delta^2(h,\varphi)}{p(h,\varphi)d\varphi} \tag{1.20}$$

где интегрирование ведется по контуру вдоль соответствующей фазовой траектории (ср. (1.14)). Аналогичная схема усреднения приведена в [3], [13].

Сходимость обеспечивается на интервале времени $\tau\in[0,T]=I_T$ таком, что $h(\tau)\in W$, $\tau\in I_T$ [13].

2. Необходимое условие захватывания. Сформулируем условия, аналогичные условиям "застревания на резонансе" (в вероятностном смысле). Очевидно, что эффект, аналогичный "застреванию" имеет место, если любая траектория, начинающаяся в области R, с вероятностью единица за конечное время попадает в область O и начиная с некоторого конечного момента времени, не выходит из этой области (фиг. 2). Это означает [9], что процесс $P(t,\mu)$ положительно возвратен по отношению к области O и невозвратен по отношению к области R равномерно при достаточно малых μ. Проблемы возвратности для возмущенных диффузионных Гамильтоновых систем обсуждались ранее [2, 3], однако полученные условия легко проверяются только для квазилинейных систем с одной степенью свободы и постоянным коэффициентом диффузии. В данной задаче удобно рассмотреть другие условия, при выполнении которых система выходит из области O.

Если рассматривать энергию $h(\tau)$ как меру уклонения от резонансной поверхности, то условие выхода приводится к очевидному неравенству

$$d_0(h) > 0, \quad h \in W, \quad h(0) \in W \tag{2.1}$$

Из (1.18), (1.20) следует, что (2.1) слабее аналогичного условия для детерминированных систем ($\sigma^2 = 0$). Это означает, что случайные возмущения могут вызывать уход системы от резонанса даже в тех случаях, когда в детерминированной системе существует устойчивый резонансный режим. Пример обсуждается в разд. 4.

3. Многочастотные системы. Рассмотрим некоторые особенности анализа околорезонансных движений в многочастотных системах. Исследуем системы вида

$$\dot{x} = \varepsilon f(x,\theta) + \varepsilon F(x,\theta)\xi(t), \quad x \in R_n \tag{3.1}$$

$$\dot{\theta} = \omega(x) + \varepsilon g(x,\theta) + \varepsilon G(x,\theta)\xi(t), \quad \theta \in R_m$$

Здесь $\xi(t)$ – векторный случайный процесс, удовлетворяющий условиям разд. 1, f, g, ω – векторы, F, G – матрицы соответствующих размерностей. Правые части (3.1) предполагаются достаточно гладкими по своим переменным и 2π-периодическими по каждой из компонент вектора θ. Нерезонансный случай рассмотрен в [5].

Предполагается, что в невозмущенной системе существует по крайней мере одна резонансная поверхность

$$\gamma(x) = (\lambda, \omega(x)) = 0 \tag{3.2}$$

где λ – целочисленный вектор, $|\lambda| \neq 0$. Если в рассматриваемом приближении возможно появление нескольких резонансов, то предполагается, что при достаточно малых ε перекрытия резонансов не наблюдается, и движение в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности каждой из поверхностей может изучаться независимо [11].

Как и в разд. 1, введем новые переменные, характеризующие движение в μ-окрестности (3.2), $\mu = \sqrt{\varepsilon}$

$$\mu P = (\lambda, \omega(x)), \quad \Phi = (\lambda, \theta), \quad Y_i = x_i, \quad \psi_i = \theta_i, \quad i = 1,\ldots,n-1 \tag{3.3}$$

Преобразуя (3.1) с учетом (3.3) и удерживая только существенные для дальнейшего анализа члены, получим систему, аналогичную (1.9), но с дополнительной медленной переменной Y.

$$\dot{P} = \mu b_0(Y,\Phi,\psi) + \mu^2 b_1(Y,\Phi,\psi)P + \mu D_0(Y,\Phi,\psi)\xi(t) \tag{3.4}$$

$$\dot{\Phi} = \mu P + \mu^2 k_0(Y,\Phi,\psi), \quad \dot{Y} = \mu^2 r_0(Y,\Phi,\psi)$$

$$\dot{\psi} = \Omega_0 + \mu\Omega_1 P + \mu^2 v_0(Y,\Phi,\psi)$$

Усредняя систему (3.4) по быстрой фазе ψ, получим, что при $\mu \to 0$ ее решение аппроксимируется (в слабом смысле) решением системы [5]

$$\dot{p} = \mu\beta_0(y,\varphi) + \mu^2\beta_1(y,\varphi)p + \mu\sigma_0(y,\varphi)\dot{w}(t) \tag{3.5}$$

$$\dot{\varphi} = \mu p + \mu^2 \varkappa^0(\varphi), \quad \dot{y} = \mu^2 \rho_0(y,\varphi)$$

Сравним (3.5) с невозмущенной системой

$$\dot{p}_0 = \mu\beta_0(y,\varphi_0), \quad \dot{\varphi}_0 = \mu p_0$$

Считаем, что $\beta_0(y, \varphi)$ – 2π-периодическая функция φ при каждом фиксированном y из рассматриваемой области $y \in D_y$ изменения переменной. Тогда при каждом $y \in D_y$

потенциал $U(y, \varphi)$ и соответствующие ему фазовые траектории имеют вид, как на фиг. 1, 2.

Определим новую медленную переменную H соотношением, аналогичным (1.13), при $U = U(y, \varphi)$. В результате тех же преобразований, что и в разд. 1, получим, что переменная $H(t, \mu)$, определенная на решениях (3.5), слабо сходится к медленному процессу $h(\tau)$, удовлетворяющему системе уравнений

$$h'(\tau) = d_0(h, y) + \delta_0(h, y)w'(\tau), \quad t'(\tau) = \nu_0(h, y) \tag{3.6}$$

Здесь, как и в разд. 2, $\tau = \mu^2 t$, штрих означает дифференцирование по τ, коэффициенты d_0, δ_0 определяются аналогично (1.21), $\nu_0(h, y)$ получается в результате усреднения коэффициента $\rho_0(h, \varphi, y)$ по фазе φ при фиксированном y. Сходимость обеспечивается на интервале времени $t \in [0, T/\mu^2]$, и на этом же интервале справедливы выводы разд. 2 о возможности "захватывания в резонанс".

4. Пример. Рассмотрим резонансный режим в системе

$$\ddot{z} + 2z[\dot{z}^2 + (\dot{z}^4 + 4z^2)^{1/2}]^{-1} + \varepsilon^{3/2}\alpha\dot{z} = \varepsilon(\sin\omega t + \xi(t)) \tag{4.1}$$

Здесь $\xi(t)$ – стационарный белый шум со спектральной плотностью S_0. Следуя подходу, принятому при рассмотрении детерминированного аналога (4.1) [6], введем новые переменные x, θ_1, θ_2 по формулам

$$z = x\sin\theta_2, \quad \dot{z} = x^{1/2}\cos\theta_2, \quad \dot{\theta}_1 = \omega$$

преобразующие (4.1) к стандартной форме (1.1), а затем, следуя (1.6), (1.7), – переменные

$$\theta_2 - \theta_1 = \Phi, \quad \gamma = x^{-1/2} - \omega = \mu P, \quad \mu = \varepsilon^{1/2}$$

откуда имеем

$$x^{-1/2} = \omega + \mu P, \quad x^{1/2} = \omega^{-1}(1 - \mu\omega^{-1}P) + \mu^2 \ldots$$

В результате преобразований приведем исходную систему к виду (1.9). В правой части первого из уравнений (1.9) появится дополнительное слагаемое $\mu^2 l$, получающееся в результате преобразования диссипативных сил порядка $\varepsilon^{3/2}$ в (4.1). Коэффициенты (1.9) запишутся в виде

$$b_0 = \omega^{-1}R(\Phi + \psi)\cos(\Phi + \psi)\sin\psi, \quad k_0 = \omega^{-1}R(\Phi + \psi)\sin(\Phi + \psi)\sin\psi$$

$$b_1 = -\omega^{-1}b_0, \quad l = -\alpha\omega^{-2}R(\Phi + \psi)\cos^2(\Phi + \psi), \quad D_0 = \omega^{-1}R(\Phi + \psi)\cos(\Phi + \psi)$$

где $R(\psi) = 2(1 + \sin^2\psi)^{-1}$. Очевидно, что процедура усреднения по быстрой фазе ψ сохраняет силу, но в правой части первого из уравнений (1.10) появится дополнительное слагаемое λ_0, соответствующее усреднению l по ψ. Аппроксимирующая система (1.10) примет вид

$$\dot{p} = \mu\beta_0(\varphi) + \mu^2[\beta_1(\varphi)p + \lambda_0] + \mu\sigma_0\dot{w}(t), \quad \dot{\varphi} = \mu p + \mu^2\varkappa_0(\varphi) \tag{4.2}$$

где

$$\beta_0(\varphi) = -2\omega^{-1}r_c\sin\varphi, \quad \beta_1 = \omega^{-1}\beta_0, \quad \varkappa_0 = 2\omega^{-1}r_s\cos\varphi$$

$$\lambda_0 = -2\alpha\omega^{-2}r_c, \quad \sigma_0^2 = 4S_0\omega^{-2}\rho^2$$

и (ср. [6]) $r_c = \sqrt{2} - 1$, $r_s = 1 - 1/\sqrt{2}$, $\rho^2 = 1/\sqrt{2}$.

Введем новую переменную H по формуле (1.13). Потенциал $U(\varphi) = -2r_c\omega^{-1}\cos\varphi$ имеет вид, как на фиг. 1. Колебательные режимы определяются условием $|H| < 2r_c\omega^{-1}$, точки поворота имеют вид $\bar{\varphi} = -\varphi = \pi - \arccos(H\omega/(2r_0))$, функция $p(H, \varphi)$ определена формулой (1.15).

Повторяя все преобразования разд. 1, получим, что аппроксимирующий диффузионный процесс $h(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$h' = d_0 + \sigma_0 V(h)w'(\tau) \tag{4.3}$$

где

$$d_0 = 2\omega^{-2}(2S_0\rho^2 - \alpha r_c) \tag{4.4}$$

$$V^2(h) = \frac{1}{T(h)} \int\limits_{\Gamma(h)} p(h,\varphi)d\varphi, \quad T(h) = \int\limits_{\Gamma(h)} \frac{1}{p(h,\varphi)d\varphi} \tag{4.5}$$

интегрирование ведется по контурам в соответствующих областях изменения переменных. С учетом (4.3) получим

$$V^2(h) = 2\lambda_0^2 E(\overline{\varphi}/2,k)F^{-1}(\overline{\varphi}/2,k) \tag{4.6}$$

$$\lambda_0^2 = h + 2r_c\omega^{-1}, \quad k^2 = 4r_c\omega^{-1}\lambda_0^2$$

где F и E – эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

В соответствии с (2.1), (4.4) условие захватывания $d_0 < 0$ принимает вид

$$2S_0\rho^2 < \alpha r_c \tag{4.7}$$

Вместе с тем внутри области O коэффициент $V(h) \neq 0$, т. е. "захваченная" траектория не может остаться в положении равновесия $p = 0$, $\varphi = 0$. Это означает, что флуктуации частоты колебаний $\mu P = x^{-1/2} - \omega$ не обращаются в нуль и могут быть вычислены по уравнению (4.3).

Таким образом, случайные возмущения сужают область захватывания траекторий, и строгая синхронизация в возмущенной системе невозможна.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96–01–00197).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
2. *Wolansky G.* Limit theorem for a dynamical system in the presence of resonances and homoclinic orbits // J. Different. Equat. 1990. V. 83. № 2. P. 330–335.
3. *Freidlin M.I., Wentzell A.D.* Random perturbations of Hamiltonian systems // Mem. Amer. Math. Soc. 1994. V. 109. № 523. P. 1–82.
4. *Zhu W.Q., Yang Y.Q.* Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated integrable Hamiltonian systems // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1996. V. 63. № 2. P. 493–500.
5. *Ковалева А.С.* Об усреднении в многочастотных нелинейных системах при случайных возмущениях // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 30–37.
6. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
7. *Ковалева А.С.* О построении последовательных приближений метода возмущений для систем со случайными коэффициентами // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 612–619.
8. *Печенев А.В.* Об осреднении систем с иерархией скоростей вращения фаз // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 24–28.
9. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
10. *Kushner H.J.* Approximation and weak convergence methods for random processes, with applications to stochastic systems theory. Cambridge: MIT Press, 1984. 269 p.
11. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
12. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
13. *Cogburn R., Ellison J.A.* A stochastic theory of adiabatic invariance // Commun. Math. Phys. 1992. V. 149. P. 97–126.

Москва

Поступила в редакцию
24.VI.1996