УДК 531.36

© 1998 г. А.А. Зевин

ОБ ОБЛАСТЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Предлагается новое определение индекса области устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Дается простое доказательство теоремы Гельфанда–Лидского [1] о структуре областей устойчивости и доказывается теорема о направленной выпуклости таких областей. Из последней теоремы, в частности, следует, что области устойчивости параметрических колебаний в системе со знакоопределенным гамильтонианом выпуклы по частоте параметрического возмущения.

1. Постановка задачи. Рассматривается каноническая система

$$J\dot{\mathbf{x}} = H(t)\mathbf{x}, \quad J = \begin{Vmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{x} \in R^{2n} \tag{1.1}$$

где $H(t) = H(t+T)$ – симметрическая кусочно-непрерывная матрица (гамильтониан) порядка $2n$, I_n – единичная матрица порядка n.

К уравнению (1.1) приводят задачи о параметрических колебаниях и динамической устойчивости упругих систем, задачи об устойчивости периодических колебаний нелинейных гамильтоновых систем и многие другие. Основы теории таких уравнений заложены Ляпуновым и Пуанкаре; в дальнейшем Крейном и другими учеными получено много глубоких результатов (систематическое изложение теории см. в [2, 3]).

Система (1.1) называется устойчивой, если все ее решения ограничены при $t \to \infty$. Практический интерес представляют сильно устойчивые системы: в такой системе устойчивость сохраняется при достаточно малых возмущениях матрицы $H(t)$, не нарушающих ее симметрии.

Приведем некоторые известные факты, которые будут использованы в дальнейшем. Матрица фундаментальной системы решений уравнения (1.1) $X(t) = [\mathbf{x}_p(t)]_1^{2n}$ удовлетворяет тождеству

$$X(t)^*(iJ)X(t) = C \tag{1.2}$$

где $C = [c_{pk}]_1^{2n}$ – постоянная матрица.

В дальнейшем воспользуемся обратным утверждением [1]: если некоторая матрица $X(t)$ удовлетворяет тождеству (1.2), то $X(t)$ – решение уравнения (1.1) с гамильтонианом

$$H(t) = J\dot{X}(t)X^{-1}(t) \tag{1.3}$$

В соответствии с введенной Крейном классификацией [4] мультипликаторы уравнения (1.1) разделяются на мультипликаторы первого и второго рода. Для сильной устойчивости необходимо и достаточно [1,4], чтобы все мультипликаторы лежали на единичной окружности и были дефинитными, т.е. среди них не было совпавших мультипликаторов разного рода.

В устойчивой системе решения могут быть представлены в виде

$$\mathbf{x}_p(t) = \exp(i\omega_p t)\mathbf{f}_p(t), \quad \mathbf{x}_{p+n}(t) = \mathbf{x}_p^*(t), \quad p = 1,\dots,n \tag{1.4}$$

где $\mathbf{f}_p(t)$ – T-периодические функции, $i\omega_p = T^{-1}\ln \rho_p$ – характеристические показатели. В дальнейшем полагаем $0 < \omega_p < 2\pi$, ρ_p и $\rho_{p+n} = \rho_p^*$ ($p = 1, \dots, n$) – мультипликаторы первого и второго рода соответственно.

Для решений (1.4)

$$c_{pk} = (\mathbf{x}_p(t), iJ\mathbf{x}_k(t)) = [(\exp(i\omega_p - i\omega_k)t]((\mathbf{f}_p(t), iJ\mathbf{f}_k(t)) \tag{1.5}$$

где $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Учитывая периодичность функций $\mathbf{f}_q(t)$, найдем $c_{pk} = 0$ при $\omega_p \neq \omega_k$. Для простых мультипликаторов первого и второго рода $c_{pp} > 0$ и $c_{pp} < 0$ соответственно [4]; без ограничения общности полагаем $|c_{pp}| = 2$. В случае m-кратного мультипликатора отвечающие ему функции $\mathbf{f}_p(t)$ ($p = 1, \dots, m$) могут быть подобраны таким образом, чтобы равенство $c_{pk} = 0$ при $p \neq k$ сохранялось.

Полагая $\mathbf{f}_p(t) = \mathbf{u}_p(t) + i\mathbf{v}_p(t)$ ($p = 1, \dots, n$), найдем $c_{pp} = 2(J\mathbf{u}_p(t), \mathbf{v}_p(t))$. Таким образом, действительные функции $\mathbf{u}_p(t)$ и $\mathbf{v}_p(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$(J\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_p) = 0, \quad (J\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_p) = 0, \quad (J\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_k) = 0, \quad p \neq k; \quad (J\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p) = 1 \tag{1.6}$$

2. Структура областей устойчивости. В сильно устойчивой системе при обходе единичной окружности последовательно встречаются группы мультипликаторов разного рода. Мультипликаторный тип такого гамильтониана может быть определен набором чисел n_p ($p = 1, \dots, r$), где r – число таких групп на верхней полуокружности, $|n_p|$ – число мультипликаторов в p-й группе, $n_p > 0$ и $n_p < 0$ для мультипликаторов первого и второго рода соответственно; $|n_1| + \dots + |n_r| = n$.

Два сильно устойчивых гамильтониана $H_1(t)$ и $H_2(t)$ принадлежат одной области устойчивости, если существует непрерывный по s гамильтониан $H(t, s) = H(t + T, s)$, такой, что $H(t, 0) = H_1(t)$, $H(t, 1) = H_2(t)$) и соответствующее уравнение (1.1) сильно устойчиво при $s \in [0, 1]$; в противном случае $H_1(t)$ и $H_2(t)$ принадлежат различным областям устойчивости. Согласно теореме Гельфанда–Лидского [1] каждая область устойчивости однозначно определяется мультипликаторным типом и одним целым числом k ($-\infty < k < \infty$), называемым индексом вращения или просто индексом системы.

Положим $L(t) = [\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_n(t), \mathbf{v}_1(t), \dots, \mathbf{v}_n(t)]$. В силу (1.6)

$$L(t)^* JL(t) = J \tag{2.1}$$

т.е., $L(t)$ – симплектическая матрица. Пусть $\mathrm{Sp}(2n)$ – совокупность (группа) таких матриц порядка $2n$; тогда $L(t) \in \mathrm{Sp}(2n)$ – замкнутая кривая ($L(0) = L(T)$).

Следуя известному подходу ([5], с. 360), покажем, что непрерывной деформацией в группе $\mathrm{Sp}(2n)$ она может быть стянута к матрице $L_0 = [l_{pq}^0]_i^{2n}$, ненулевые элементы которой таковы:

$$l_{pp}^0 = 1, \quad p \neq n, \quad 2n, \tag{2.2}$$

$$l_{nn}^0 = l_{2n,2n}^0 = \cos(2\pi kt / T), \quad l_{2n,n}^0 = -l_{n,2n}^0 = \sin(2\pi kt / T)$$

где k – некоторое целое число, которое и будем называть индексом системы (1.1).

Действительно, так как любой ненулевой вектор является первым столбцом некоторой матрицы $L \in \mathrm{Sp}(2n)$, то $\mathbf{u}_1(t)$ можно стянуть в точку $(1, 0, \dots, 0)$. При этом матрица $L(t)$ трансформируется в $L^1(t)$, элементы $(n+1)$-й строки которой в силу (2.1) таковы: $l^1_{n+1,n+1} = -1$, $l^1_{n+1,q} = 0$, $q \neq n+1$. Очевидно, что при указанном первом столбце элементы $l_{q,n+1}$, $q \neq n+1$ могут принимать любые значения в группе $\mathrm{Sp}(2n)$, поэтому их можно стянуть к нулю. В результате для матрицы $L^2(t)$ при учете (2.1) получим $l_{1q} = l_{q1} = 0$, $q > 1$, $l_{q,n+1} = l_{n+1,q} = 0$, $q \neq n+1$; таким образом, исходная кривая $L(t)$ стягивается в цикл на подгруппе $\mathrm{Sp}(2n-2)$. Повторив эту процедуру $n-1$ раз, найдем, что полученная матрица отличается от L_0 лишь элементами $l_{nn}(t)$, $l_{n,2n}(t)$, $l_{2n,n}(t)$ и $l_{2n,2n}(t)$. Учитывая, что ее определитель равен $l_{nn}(t)l_{2n,2n}(t) - l_{n,2n}(t)l_{2n,n}(t) = 1$, можно показать, что эти элементы стягиваются к виду (2.2).

Пусть $H_1(t)$ и $H_2(t)$ – сильно устойчивые гамильтонианы с одинаковым мультипликаторным типом, k_1 и k_2 – соответствующие индексы. Следующая теорема аналогична теореме Гельфанда–Лидского [1], однако приведенное ниже доказательство существенно проще.

Теорема 1. Гамильтонианы $H_1(t)$ и $H_2(t)$ принадлежат одной области устойчивости, если только $k_1 = k_2$.

Доказательство. Пусть $H(t, s)$ – непрерывная устойчивая кривая, соединяющая гамильтонианы $H_1(t)$ и $H_2(t)$ ($s \in [0, 1]$, $H(t, 0) = H_1(t)$, $H(t, 1) = H_2(t)$). Фундаментальная система решений (1.4) имеет вид

$$X(t,s) = F(t,s)E(t,s) \tag{2.3}$$

$$F(t,s) = F(t+T,s) = [\mathbf{f}_p(t,s)]_1^{2n}, \quad E(t,s) = \mathrm{diag}[\exp(i\omega_p(s)t], \quad p = 1,\ldots,2n$$

$$F(t,0) = F^1(t), \quad F(t,1) = F^2(t), \quad \mathbf{f}_p(t,s) = \mathbf{u}_p(t,s) + i\mathbf{v}_p(t,s)$$

Матрица $L(t, s) = [\mathbf{u}_p(t, s), \mathbf{v}_p(t, s)]_1^n$ непрерывна по s и переводит $L^1(t) = [\mathbf{u}^1_p(t), \mathbf{v}^1_p(t)]_1^n$ в $L^2(t) = [\mathbf{u}^2_p(t), \mathbf{v}^2_p(t)]_1^n$. Очевидно, что при непрерывной деформации матрицы $L(t, s)$ ее индекс $k(s)$ сохраняется, поэтому $k(0) = k_1 = k(1) = k_2$, что и доказывает необходимость условия $k_1 = k_2$.

Для доказательства его достаточности построим требуемый гамильтониан $H(t, s)$. Как показано выше, при $k_1 = k_2 = k$ матрицы $L^1(t)$ и $L^2(t)$ могут быть стянуты в L_0; следовательно, существует симплектическая матрица $L(t, s)$, такая, что $L(t, 0) = L^1(t)$, $L(t, 1) = L^2(t)$. Соответствующая матрица $F(t, s)$ переводит $F^1(t)$ в $F^2(t)$.

Так как, по условию, мультипликаторные типы гамильтонианов $H_1(t)$ и $H_2(t)$ одинаковы, то ω^1_p и ω^2_p можно соединить кривыми $\omega_p(s)$ ($\omega_p(0) = \omega^1_p$, $\omega_p(1) = \omega^2_p$, $\omega_{p+n}(s) = -\omega_p(s)$), такими, что

$$\exp(i\omega_k(s)T) \neq \exp(-i\omega_p(s)T), \quad k, p = 1,\ldots,n, \quad s \in [0,1] \tag{2.4}$$

При указанных $F(t, s)$ и $\omega_p(s)$ матрица $X(t, s)$, определяемая формулой (2.3), удовлетворяет тождеству (1.2) (при этом $C = 2\mathrm{diag}[I_n, -I_n]$). Следовательно, $X(t, s)$ – матрица фундаментальных решений системы (1.1) с гамильтонианом $H(t, s)$, определяемым по формуле (1.3); очевидно, что $H(t, 0) = H_1(t)$, $H(t, 1) = H_2(t)$. Соответствующие мультипликаторы первого и второго рода таковы: $\rho_p(s) = \exp[i\omega_p(s)T]$ и $\rho_{p+n}(s) = \exp[-i\omega_p(s)T]$; в силу (2.4) уравнение (1.1) сильно устойчиво при $s \in [0, 1]$. Таким образом, требуемый гамильтониан построен, что завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. При определенных ограничениях на матрицу $A(t)$ [2] неканоническая система порядка $2n$

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad A(t) = A(t+T) \tag{2.5}$$

также имеет возвратное характеристическое уравнение. Для сильной устойчивости такой системы необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы лежали на единичной окружности и были простыми. Матрица системы фундаментальных решений уравнения (2.5) также может быть представлена в виде (2.3), где $F(t)$ – неособая матрица. Ей отвечает матрица $L(t)$, причем без ограничения общности можно принять $\det L(t) = 1$; тогда $L(t) \in \mathrm{SL}(2n)$, где $\mathrm{SL}(2n)$ – группа унимодулярных линейных преобразований.

С помощью процедуры, аналогичной приведенной выше, матрицу $L(t)$ можно деформировать к виду $L_0 = \mathrm{diag}[I_{2n}, M]$, где M – матрица с элементами $m_{11} = m_{22} = \cos(2\pi kt/T)$, $m_{21} = -m_{12} = \sin(2\pi kt/T)$, k – целое число. Поэтому устойчивые матрицы $A_1(t)$ и $A_2(t)$ можно соединить устойчивой кривой, если только соответствующие числа $k_1 = k_2$. Таким образом, области устойчивости системы (2.5) с возвратным характеристическим уравнением также определяются индексом k.

3. Определение индекса. Описанная выше процедура не может быть, конечно, использована для вычисления индекса k. Были предложены [1, 2] некоторые конструктивные определения индекса; они сводятся к вычислению приращения на $[0, T]$ аргумента некоторой комплекснозначной функции, выражаемой с помощью матрицанта уравнения (1.1).

Дадим новое определение индекса области устойчивости. Рассмотрим самосопряженную краевую задачу

$$J\dot{\mathbf{x}} = [D + \lambda(H(t) - D)]\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(T) \tag{3.1}$$

где $D = -2\pi r T^{-1} I_{2n}$, причем целое число $r \geqslant 0$ принимается из условия $H(t) > D$ (для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $\beta_*(t) > -2\pi r T^{-1}$ при $t \in [0, T]$, где $\beta_*(t)$ – наименьшее собственное значение матрицы $H(t)$). В частности, если $H(t)$ – положительно определенная матрица, то полагаем $D = 0$.

В силу $H(t) - D > 0$ собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ задачи (3.1) действительны [2]. Пусть N – число собственных значений на $(0, 1]$; величину $q = N/2 - rn$ назовем индексом гамильтониана $H(t)$. Эта величина – четное число, не зависящее от r.

Действительно, при целом r задача (3.1) имеет $2n$ нулевых собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n} = 0$. Методом возмущений можно показать, что $d\lambda_k/dr > 0$, поэтому при непрерывном увеличении r они смещаются на интервал (0, 1); в дальнейшем они остаются на нем, так как число собственных значений $\lambda = 1$ не зависит от r. Следовательно, при увеличении r на единицу число N увеличивается на $2n$, в результате индекс не меняется.

Покажем, что N четно, поэтому q – целое число. При $\lambda = 0$ уравнение (3.1) имеет $2n$-кратный мультипликатор $\rho = 1$. Так как $H(t) - D > 0$, то при возрастании λ мультипликаторы первого рода движутся по единичной окружности в противоположных направлениях и могут сойти с нее только после встречи мультипликаторов разного рода [4]. Значения λ, при которых $\rho_k = 1$ являются собственными значениями задачи (3.1). Для простоты полагаем, что кратность такого мультипликатора равна 2 при всех λ_p (этого можно достичь сколь угодно малым возмущением гамильтониана, не влияющим на величину N). Если такая пара мультипликаторов ρ_k и $\rho_{k+n} = 1/\rho_k$ встречается в точке $\rho = 1$, двигаясь по единичной окружности, то кратность q_p соответствующего собственного значения λ_p равна 2 либо 1. В первом случае мультипликаторы продолжают движение по окружности, во втором – смещаются на действительную ось [6]. Если ρ_k и ρ_{k+n} встречаются в точке $\rho = 1$, двигаясь по действительной оси, то $q_p = 1$; в дальнейшем эти мультипликаторы движутся по окружности. Как известно, только четверки мультипликаторов (ρ_k, ρ_k^*, $1/\rho_k$ и $1/\rho_k^*$) могут попадать на положительную полуось и сходить с нее, минуя точку $\rho = 1$. Учитывая эти факты и принимая во внимание, что при $\lambda = 1$ мультипликаторы на действительной оси отсутствуют (соответствующее уравнение (3.1) сильно устойчиво), найдем, что число N собственных значений λ_k на (0, 1) четно.

Покажем, что величина q эквивалентна введенному выше индексу k области устойчивости, т.е., $q_1 \neq q_2$ при $k_1 \neq k_2$ и $q_1 = q_2$ при $k_1 = k_2$. Пусть $q_1 \neq q_2$, $H(t, s)$ – непрерывная кривая, соединяющая гамильтонианы $H_1(t)$ и $H_2(t)$. Как показано выше, увеличение числа r не меняет индекс, поэтому можно считать, что $H(t, s) > D$ при $s \in [0, 1]$. Учитывая непрерывность собственных значений $\lambda_k(s)$ и неравенство $N_1 \neq N_2$ ($q_1 \neq q_2$), найдем, что $\lambda_k(s) = 1$ при некоторых k и $s \in (0, 1)$. Соответствующее уравнение (1.1) имеет индефинитный мультипликатор $\rho = 1$ и не является поэтому сильно устойчивым. Таким образом, при $q_1 \neq q_2$ гамильтонианы $H_1(t)$ и $H_2(t)$ нельзя соединить устойчивой кривой $H(t, s)$; следовательно, $k_1 \neq k_2$. Обратно, если $k_1 = k_2$, то такая кривая существует; так как соответствующие значения $\lambda_k(s) \neq 1$ при $s \in [0, 1]$, то $q_1 = q_2$. Таким образом, величины q и k эквивалентны (впрочем, нетрудно показать, что они равны).

Число нулевых собственных значений не зависит от $H(t)$, поэтому при изменении гамильтониана собственные значения могут попадать на интервал (0, 1) и покидать его только через точку $\lambda = 1$. Следовательно, если при таком изменении $\lambda_k \neq 1$, то индекс сохраняется.

Заметим, что величина N равна числу нулей λ_k на (0, 1) действительной функции $\det[X(T, \lambda) - I_{2n}] = 0$, где $X(T, \lambda)$ – любая матрица фундаментальных решений уравнения (3.1). Поэтому введенный индекс q вычисляется несколько проще известных индексов во всяком случае при $H(t) > 0$. Для дальнейшего, однако, существенно, что с использованием этого индекса удается установить некоторые свойства областей устойчивости.

Замечание 2. В приложениях часто встречаются системы, описываемые векторным уравнением Хилла

$$(M(t)\dot{\mathbf{y}})^{\cdot} + C(t)\mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{y} \in R^n \tag{3.2}$$

где $M(t)$ и $C(t)$ – симметрические T-периодические матрицы, причем $M(t) > 0$. Как известно, уравнение (3.2) приводится к виду (1.1) с $H = H_0(t) = \mathrm{diag}(M^{-1}(t), C(t))$. Пусть $\mathbf{x}(t + T) = \rho\mathbf{x}(t)$ – решение уравнения (3.2), $|\rho| = 1$; тогда

$$\int_0^T (H_0\mathbf{x}, \mathbf{x})\mathrm{dt} = 2\int_0^T (M\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}})\mathrm{dt} - (M\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})\Big|_0^T \tag{3.3}$$

Так как $|\rho| = 1$, то внеынтегральный член равен нулю; следовательно, левая часть (3.3) положительна ($M(t) > 0$). Поэтому приведенные выше рассуждения справедливы при $D = 0$. Таким образом, при вычислении индекса системы (3.2) можно принять в (3.1) $D = 0$, даже если матрица $C(t)$ и, следовательно, $H_0(t)$ не является положительно определенной.

4. Направленная выпуклость областей устойчивости. Область устойчивости Ω_k называется направленно выпуклой [4], если из условий $H_1(t) \in \Omega_k$ и $H_1(t) \leqslant H_2(t) \in \Omega_k$ следует, что любой гамильтониан $H(t)$, удовлетворяющий неравенству

$$H_1(t) \leqslant H(t) \leqslant H_2(t) \tag{4.1}$$

также принадлежит этой области.

Была установлена [7] направленная выпуклость областей устойчивости уравнения (1.1) при определенных условиях относительно чередования мультипликаторов разного рода (эти условия, в частности, выполняются при $n = 1$ и $n = 2$). Следующая теорема показывает, что свойство направленной выпуклости является общим.

Теорема 2. Области устойчивости уравнения (1.1) направленно выпуклы.

Доказательство. Положим $H(t, s) = H_1(t) + s(H_2(t) - H_1(t))$; покажем сначала, что $H(t, s) \in \Omega_k$ при $s \in [0, 1]$. В силу (4.1) $H(t, s)$ возрастает (не убывает) по s, поэтому соответствующие собственные значения $\lambda_k(s)$ задачи (3.1) убывают [4]. Так как $q_1 = q_2$ ($H_1(t), H_2(t) \in \Omega_k$), то $\lambda_k(s) \neq 1$ и, следовательно, $\rho_q(s) \neq 1$ при $s \in [0, 1]$, $q = 1, \ldots, 2n$.

Условимся наборы мультипликаторов каждого рода определять с точностью до перестановки их индексов. Пусть $\rho_k(0)$ и $\rho_p(0)$ – соседние мультипликаторам первого и второго рода соответственно, причем $\arg\rho_k(0) < \arg\rho_p(0)$ $(0 < \arg\rho_q(0) < 2\pi)$. При возрастании s мультипликаторы $\rho_k(s)$ и $\rho_p(s)$ движутся по единичной окружности навстречу друг другу; предположим, что при некотором $s = s' < 1$ они встречаются. Без ограничения общности полагаем, что кратность этого мультипликатора равна двум (как отмечено выше, это достигается сколь угодно малым возмущением $H(t, s)$). Если соответствующие элементарные делители матрицы монодромии непростые, то при дальнейшем увеличении s указанные мультипликаторы сходят с единичной окружности [4]. Как известно, только четверки мультипликаторов могут одновременно сходить и попадать на единичную окружность, минуя точки $\rho = 1$ и $\rho = -1$. При $s = 1$ уравнение (1.1) устойчиво, поэтому при учете принятого выше условия относительно индексов мультипликаторов одного рода можно считать, что $\rho_k(s)$ и $\rho_p(s)$ при некотором $s = s' \leqslant \leqslant 1$ вновь встречаются на той же полуокружности либо (если $\rho_k(s') = \rho_p(s') = -1$) в точке $\rho = -1$ и продолжают затем двигаться по ней в тех же направлениях. Если при $s = s'$ указанные элементарные делители простые, то $\rho_k(s)$ и $\rho_p(s)$ продолжают движение по окружности [4]. В обоих случаях относительное положение этих мультипликаторов на дуге $(0, 2\pi)$ окружности при $s = 0$ и $s = 1$ различно ($\arg\rho_k(0) < \arg\rho_p(0)$, $\arg\rho_k(1) > \arg\rho_p(1)$).

С помощью аналогичных рассуждений найдем, что если при $s \in [0, 1)$ на единичной окружности происходит несколько встреч мультипликаторов разного рода, то относительное положение каждой такой пары на окружности изменится указанным выше образом. В результате мультипликаторные типы гамильтонианов $H(t, 0)$ и $H(t, 1)$ окажутся различными. В этом можно убедиться, рассмотрев функцию $\psi(k)$ – разность между числом мультипликаторов первого и второго рода в наборе k первых (в порядке возрастания аргумента) мультипликаторов ($k = 1, ..., 2n$). Как видно, при указанном выше изменении относительного расположения мультипликаторов разного рода $\psi(k)$ убывает при некоторых k. Между тем, $\psi_1(k) = \psi_2(k)$, так как мультипликаторные типы гамильтонианов $H_1(t)$ и $H_2(t)$ одинаковы. Полученное противоречие показывает, что мультипликаторы разного рода не встречаются при возрастании s на $[0, 1]$.

Предположим теперь, что уравнение (1.1) с гамильтонианом $H(t)$, удовлетворяющим неравенству (4.1), неустойчиво. Положим $H(t, s) = H_1(t) + s(H(t) - H_1(t))$, тогда при некотором $s \leqslant 1$ мультипликаторы разного рода $\rho_k(s)$ и $\rho_p(s)$ встречаются на единичной окружности. Как показано выше, при $H = H_2(t)$ для таких мультипликаторов выполняется неравенство $\arg\rho_k(s) < \arg\rho_p(s)$ при $s \in [0, 1]$. Следовательно, в рассматриваемом случае какой-либо из мультипликаторов $\rho_k(s)$ и $\rho_p(s)$ должен пройти такую точку ρ_* единичной окружности, что

$$\arg\rho_k(1) < \arg\rho_* < \arg\rho_p(1) \tag{4.2}$$

Пусть $x_*(t, s_*)$ – соответствующее решение $(x_*(t+T, s_*) = \rho_* x_*(t, s_*),\ s_* < 1)$. Рассмотрим краевую задачу

$$J\dot{\mathbf{x}} = [H_1(t) + \lambda(R(t) - H_1(t))]\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(T) = \rho_*\mathbf{x}(0) \tag{4.3}$$

При $R = H(t, s_*)$ и $\lambda = 1$ уравнение (4.3) имеет решение $\mathbf{x}_*(t, s_*)$, поэтому $\lambda = 1$ является собственным значением. Так как $H_2(t) \geqslant H(t) \geqslant H(t, s_*)$, то при $R = H_2(t)$ задача (4.3) должна иметь собственное значение $\lambda_k \leqslant 1$. Между тем в силу (4.2) при возрастании λ на $[0, 1]$ мультипликаторы уравнения (4.3) не попадают в точку ρ_*; поэтому собственные значения на $[0, 1]$ отсутствуют. Полученное противоречие показывает, что в системе (1.1) с гамильтонианом $H(t, s)$ при возрастании s на $[0, 1]$ мультипликаторы разного рода не встречаются; следовательно, $H(t, 1) = H(t) \in \Omega_k$. Теорема доказана.

Практическое значение доказанной теоремы заключается в следующем. В приложениях обычно гамильтониан $H(t)$ зависит от некоторых параметров ($H = H(t, \mu_1, \ldots$ $\ldots, \mu_p)$); задача заключается в отыскании областей в пространстве этих параметров, отвечающих сильной устойчивости системы. Для ее решения разработаны численные и аналитические методы (см., например, [2, 8, 9]). Большинство из них позволяет находить критические значения параметров, отвечающие границам областей устойчивости (т.е., совпадению на единичной окружности мультипликаторов разного рода). В частности, границы так называемых основных областей устойчивости (соответствующих наличию индефинитного мультипликатора $\rho = 1$ или $\rho = -1$) определяются из условия существования в системе T-периодического или T-антиперидического ($x(t+T) = -x(t)$) решения, что приводит к уравнению относительно искомых значений параметров [8]. При таком подходе остается открытым вопрос, действительно ли вся область, ограниченная найденными значениями параметров, отвечает сильной устойчивости. Теорема 2 позволяет утверждать, что если гамильтониан $H(t, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ возрастает по некоторому параметру μ_q, то области устойчивости Ω_k в пространстве параметров $\mu_1, \ldots, \mu_p$ выпуклы по μ_q; таким образом, в этом случае ответ на поставленный вопрос положителен, что делает излишним проведение дополнительных расчетов. Очевидно, что тот же вывод справедлив, если $H(t, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ убывает по μ_q (достаточно перейти к новому параметру $-\mu_q$).

В задачах о параметрических колебаниях и динамической устойчивости линейных систем гамильтониан, как правило, представляют в виде $H(\omega t, \varepsilon)$, где ω и ε – частота и интенсивность параметрического возбуждения, в плоскости которых и строятся области устойчивости. При этом обычно $H(\omega t + 2\pi, \varepsilon) = H(\omega t, \varepsilon) > 0$, $H(\omega t, 0) = H_0$ – постоянный гамильтониан. Полагая $\tau = \omega t$, запишем уравнение (1.1) в виде

$$J\mathbf{x}' = H(\tau, \varepsilon, \omega)\mathbf{x} \tag{4.4}$$

$$H(\tau, \varepsilon, \omega) = H(\tau, \varepsilon)/\omega, \quad H(\tau + 2\pi, \varepsilon) = H(\tau, \varepsilon), \quad x' = dx/d\tau$$

Так как $H_0 > 0$, то матрица $J^{-1}H_0$ имеет чисто мнимые собственные значения $\pm i\omega_k^0$ ($k = 1, \ldots, n$), где ω_k^0 – частоты свободных колебаний системы при $\varepsilon = 0$. На оси ω областям устойчивости системы (4.4) отвечают отрезки, разделенные точками $\omega_{pk} =$ $= (\omega_p^0 + \omega_k^0)/m$ ($p, k = 1, 2 \ldots, n$; $m = 1, 2 \ldots$). При $\omega_{pk} = \omega_p^0/m$ уравнение (4.4) имеет мультипликатор $\rho = 1$, поэтому из приведенного выше определения индекса следует, что эти точки оси ω разделяют области устойчивости с различными индексами; остальные точки ω_{pk} разделяют области устойчивости, различающиеся лишь мультипликаторными типами.

Как видно из (4.4), $H(\tau, \varepsilon, \omega)$ убывает по ω ($H(\tau, \varepsilon) > 0$). Поэтому из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие. Области устойчивости системы (1.1) при $H(\omega t, \varepsilon) > 0$ выпуклы по ω.

Таким образом, вычислив верхнюю и нижнюю границы $\omega_k^+(\varepsilon)$ и $\omega_k^-(\varepsilon)$ области устойчивости Ω_k, можно быть уверенным, что система устойчива при $\omega \in (\omega_k^-(\varepsilon),$ $\omega_k^+(\varepsilon))$. Заметим, что для малых ε этот результат был установлен методом возмущений [9].

Замечание 3. При исследовании параметрических колебаний в системе, описываемой векторным уравнением Хилла, последнее обычно записывается в виде

$$[M(\omega t, \varepsilon)\dot{\mathbf{x}}]^{\cdot} + C(\omega t, \varepsilon)\mathbf{x} = 0 \tag{4.5}$$

$$M(\omega t, \varepsilon) = M(\omega t + 2\pi, \varepsilon) = M_0 + \varepsilon M_1(\omega t), \quad C(\omega t, \varepsilon) = C(\omega t + 2\pi, \varepsilon) = C_0 + \varepsilon C_1(\omega t)$$

Как показано выше, при $M(\omega t, \varepsilon) > 0$ для соответствующего гамильтониана левая часть (3.3) положительна, даже если матрица $C(\omega t, \varepsilon)$ не является положительно определенной. Поэтому здесь области устойчивости выпуклы по ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И.М., Лидский В.Б.* О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Успехи мат. наук. 1955. Т. 10. Вып. 1. С. 3–40.
2. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
3. *Якубович В.А.* О работах М.Г. Крейна по теории линейных периодических гамильтоновых систем // Укр. мат. журн. 1994. Т. 46. № 1/2. С. 128–144.
4. *Крейн М.Г.* Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Памяти А.А. Андронова. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 413–498.
5. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. М.: Изд-во иностр. лит., 1947. 408 с.
6. *Крейн М.Г., Любарский Г.Я.* Об аналитических свойствах мультипликаторов периодических канонических дифференциальных систем положительного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1962. Т. 26. № 4. С. 549–572.
7. *Якубович В.А.* О свойствах выпуклости областей устойчивости линейных гамильтоновых систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Вестн. ЛГУ. Сер. математики, механики и астрономии. 1962. Т. 13. Вып. 3. С. 61–68.
8. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
9. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
10.VI.1996