УДК 531.36

© 1998 г. А.Ю. Александров

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Предлагается способ исследования устойчивости нелинейных систем, находящихся под воздействием нестационарных возмущений, основанный на использовании второго метода Ляпунова. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости решений неавтономных систем в критических случаях.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = f_s(\mathbf{X}), \quad s = 1,\ldots,n \tag{1.1}$$

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать возмущенную систему

$$\dot{x}_s = f_s(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{k} b_{sj}(t)h_{sj}(\mathbf{X}), \quad s = 1,\ldots,n \tag{1.2}$$

Функции $f_s(\mathbf{X})$ и $h_{sj}(\mathbf{X})$ определены и непрерывно дифференцируемы при всех $\mathbf{X} \in R^n$, функции $b_{sj}(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geqslant 0$.

Будем полагать, что системы (1.1) и (1.2) имеют нулевое решение $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, причем нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво. Исследуем условия, при выполнении которых нулевое решение возмущений системы также является асимптотически устойчивым.

Известно [1–3], что если $f_s(\mathbf{X})$ – однородные функции, то возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения в случае, когда их порядок выше порядка правых частей системы (1.1).

Предполагалось [4], что $f_s(\mathbf{X})$ и $h_{sj}(\mathbf{X})$ – однородные функции порядка μ и σ соответственно, а интегралы

$$I_{sj}(t) = \int_0^t b_{sj}(\tau)d\tau \tag{1.3}$$

ограничены при $t \in [0, +\infty)$. Было показано, что для возмущений такого типа асимптотическая устойчивость может сохраняться и при $\sigma \leqslant \mu$.

В настоящей работе рассмотрим случай, когда $f_s(\mathbf{X})$ и $h_{sj}(\mathbf{X})$ – обобщенно-однородные функции, а интегралы (1.3), вообще говоря, не ограничены при $t \geqslant 0$.

2. Пусть функция $g(\mathbf{X})$ задана и непрерывна при всех $\mathbf{X} \in R^n$.

Определение [5]. Функция $g(\mathbf{X})$ называется обобщенно-однородной класса $(m_1, \ldots, m_n)$ порядка m, если

$$g\left(c^{m_1}x_1,\ldots,c^{m_n}x_n\right) = c^m g\left(x_1,\ldots,x_n\right), \quad \forall c \in (-\infty;+\infty)$$

где $m, m_1, \ldots, m_n$ – положительные рациональные числа с нечетными знаменателями.

Будем считать, что $f_s(\mathbf{X})$ и $h_{sj}(\mathbf{X})$ – обобщенно-однородные функции класса

$(m_1, \ldots, m_n)$ порядка $m_s + \mu$ и $m_s + \sigma$ соответственно, где μ и σ – положительные рациональные числа с нечетными знаменателями.

Известно [5], что из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.1) следует существование положительно-определенных обобщенно-однородных класса $(m_1, \ldots, m_n)$ порядка m и $m + \mu$ функций $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$, для которых имеет место равенство

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s(\mathbf{X}) = -W(\mathbf{X})$$

причем функция $V(\mathbf{X})$ непрерывно дифференцируема. Используя эти функции, можно установить, что при $\sigma > \mu$ нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво.

Пусть функция $V(\mathbf{X})$ дважды непрерывно дифференцируема. Для этого достаточно, чтобы функции $f_s(\mathbf{X})$ являлись дважды непрерывно дифференцируемыми [5].

Предположим также, что интегралы (1.3), вообще говоря, не ограничены при $t \geqslant 0$. Однако существует число α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} I_{sj}(t) = 0$$

Теорема. При выполнении неравенства

$$2\sigma \geqslant (\alpha + 1)\mu \tag{2.1}$$

нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V_1 = V(\mathbf{X}) - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \sum_{j=1}^{k} I_{sj}(t) h_{sj}(\mathbf{X})$$

Ее производная в силу системы (1.2) имеет вид

$$\frac{dV_1}{dt} = -W(\mathbf{X}) - \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} I_{sj}(t) \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial V}{\partial x_s} h_{sj}\right)\left(f_r(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{k} b_{ri}(t) h_{ri}(\mathbf{X})\right)$$

Пусть

$$Z(\mathbf{X}) = \sum_{s=1}^{n} |x_s|^{1/m_s}, \quad \varphi(t) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |I_{sj}(t)|$$

При всех $\mathbf{X} \in R^n$ и $t \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$a_1 Z^m - a_3 \varphi(t) Z^{m+\sigma} \leqslant V_1(t, \mathbf{X}) \leqslant a_2 Z^m + a_3 \varphi(t) Z^{m+\sigma}$$

$$\frac{dV_1}{dt} \leqslant -c_1 Z^{m+\mu} + \varphi(t)\left(c_2 Z^{m+\mu+\sigma} + c_3 Z^{m+2\sigma}\right)$$

где $a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3$ – положительные постоянные [5].

Выберем числа δ, γ, A и T так, чтобы выполнялись условия

$$3ma_2 > \mu c_1 \gamma, \quad \mu c_1 A a_1^{\mu/m} > m(3a_2)^{1+\mu/m}$$

$$2a_3 \delta A^{\sigma/\mu} < a_1, \quad 4c_2 \delta A^{\sigma/\mu} < c_1, \quad 4c_3 \delta A^{2\sigma/\mu - 1} < c_1$$

$$\varphi(t) < \sigma t^{\alpha} \quad \text{при} \quad t \geqslant T$$

Рассмотрим решение $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0)$ системы (1.2), начальные данные которого удовлетворяют условиям $Z^{\mu}(\mathbf{X}_0) < \gamma/t_0$, $t_0 \geqslant T$.

При всех $t \geqslant t_0$ справедливо неравенство

$$Z^{\mu}(\mathbf{X}(t)) < A/t \tag{2.2}$$

Действительно, если существует момент времени $t_1 > t_0$, такой, что $Z^{\mu}(\mathbf{X}(t_1)) = A/t_1$, а при $t \in [t_0, t_1)$ выполнено условие (2.2), то при $t \in [t_0, t_1]$ имеем

$$\frac{a_1}{2} Z^m(\mathbf{X}(t)) \leqslant V_1(t, \mathbf{X}(t)) \leqslant \frac{3a_2}{2} Z^m(\mathbf{X}(t))$$

$$\frac{dV_1(t, \mathbf{X}(t))}{dt} \leqslant -\frac{c_1}{2} Z^{m+\mu}(\mathbf{X}(t))$$

Применяя метод оценок [5], приходим к неравенству

$$t_1\left(\frac{\mu c_1}{3ma_2} - \frac{1}{A}\left(\frac{3a_2}{a_1}\right)^{\mu/m}\right) \leqslant t_0\left(\frac{\mu c_1}{3ma_2} - \frac{1}{\gamma}\right)$$

Из условий выбора чисел γ, A и T следует, что левая часть данного неравенства положительна, а правая – отрицательна. Получаем противоречие.

Используя доказанное свойство решений системы (1.2), а также их непрерывную зависимость от начальных данных, получаем, что нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Следствие 1. Если интегралы (1.3) ограничены при $t \geqslant 0$, то при выполнении неравенства

$$2\sigma > \mu$$

нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво.

Следствие 2. Пусть $f_s(\mathbf{X})$ и $h_{sj}(\mathbf{X})$ – однородные функции порядка $\mu + 1$ и $\sigma + 1$ соответственно. Тогда при выполнении неравенства (2.1) нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво.

Таким образом, получаем, что для возмущений указанного вида асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1.2) может сохраняться и в случае, когда $\sigma \leqslant \mu$.

3. Рассмотрим некоторые примеры применения доказанной теоремы.

Пример 1. Пусть движение механической системы описывается уравнениями

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{q}$ – n-мерный вектор обобщенных координат; функция $P(\mathbf{q})$ соответствует потенциальной энергии системы и является дважды непрерывно дифференцируемой положительно-определенной однородной функцией порядка λ, $\lambda > 2$; $W(\dot{\mathbf{q}})$ – дважды непрерывно дифференцируемая отрицательно-определенная однородная порядка μ функция, $\mu > 2$. Таким образом, система (3.1) диссипативна и положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ асимптотически устойчиво [6].

Будем считать, что $\mu < 3$, а $\lambda = 2/(3 - \mu)$. Тогда рассматриваемая система является обобщенно-однородной, а обобщенно-однородную функцию Ляпунова можно выбрать в виде

$$V = \left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\dot{\mathbf{q}} + P(\mathbf{q})\right)^l + c\sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s\left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)^{\beta}, \quad \beta = \frac{\lambda(2l-1)}{2\lambda - 2}$$

где l – натуральное число, c – положительная постоянная.

При достаточно малом c функция V положительно определена, а ее производная, вычисленная в силу системы (3.1), является отрицательно-определенной функцией.

Предположим также, что функции $(\partial P/\partial q_s)^{\beta}$, по крайней мере при достаточно больших значениях β, дважды непрерывно дифференцируемы.

Рассмотрим теперь возмущенную систему

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{B}_1(t)\mathbf{H}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{B}_2(t)\mathbf{R}(\mathbf{q}) \tag{3.2}$$

где элементы векторов $\mathbf{H}(\dot{\mathbf{q}})$ и $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ размерности k и m являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка ν и σ соответственно, $\nu > 1$, $\sigma > 1$; $\mathbf{B}_1(t)$ и $\mathbf{B}_2(t)$ – $(n\times k)$- и $(n\times m)$-матрицы, непрерывные и ограниченные при $t \geqslant 0$, причем существует число α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, такое, что

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\int_0^t \mathbf{B}_j(\tau)d\tau = \mathbf{0}, \quad j = 1,2$$

Применяя доказанную теорему, получаем достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (3.2)

$$2\nu \geqslant \alpha(\mu-2)+\mu, \quad 2\sigma \geqslant (\alpha(\mu-2)+\mu)/(3-\mu)$$

Пример 2. Рассмотрим векторное уравнение Льенара

$$\ddot{\mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}\dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{X}$ – n-мерный вектор неизвестных функций, компоненты вектора $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ и скалярная функция $G(\mathbf{X})$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка μ и 2μ соответственно, $\mu > 2$.

Делая в уравнении (3.3) замену $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{F}(\mathbf{X})$, получим обобщенно-однородную систему

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{Y} - \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{Y}} = -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}}$$

Предположим, что функции $G(\mathbf{X})$ и $\mathbf{F}^T \partial G/\partial \mathbf{X}$ положительно определены. Тогда нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво, а дважды непрерывно дифференцируемую обобщенно-однородную функцию Ляпунова можно выбрать в виде

$$V = \left(\frac{1}{2}\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} + G(\mathbf{X})\right)^2 + c\sum_{s=1}^n x_s y_s^{4-1/\mu}$$

где c – отрицательная постоянная.

Если число c достаточно мало по абсолютной величине, то построенная функция удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Наряду с уравнением (3.3) рассмотрим возмущенное уравнение

$$\ddot{\mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{B}_1(t)\mathbf{H}(\mathbf{X})\right)\dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{B}_2(t)\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

Будем считать, что элементы $(k\times n)$-матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ и компоненты m-мерного вектора $\mathbf{R}(\mathbf{X})$, а также $(n\times k)$- и $(n\times m)$-матрицы $\mathbf{B}_1(t)$ и $\mathbf{B}_2(t)$ обладают свойствами, указанными в примере 1.

Тогда условия асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (3.4) имеют вид

$$2\nu \geqslant (\alpha+1)(\mu-1), \quad 2\sigma \geqslant 2\mu + (\alpha+1)(\mu-1) \tag{3.5}$$

Замечания. 1^0. В некоторых случаях результаты, полученные в настоящей работе, можно усилить, используя несколько модифицированный метод построения функций Ляпунова (см. [7]).

Например, применяя указанный метод к уравнению (3.4), получим новые условия асимптотической устойчивости нулевого решения

$$2\nu \geqslant (\alpha+1)(\mu-1), \quad \sigma \geqslant \mu + \alpha(\mu-1), \quad \nu + \sigma \geqslant \mu + (\alpha+1)(\mu-1)$$

уточняющие условия (3.5).

2^0. Для некоторых типов нелинейных систем предложенный способ исследования устойчивости положения равновесия можно использовать и в случае, когда правые части невозмущенных уравнений не являются обобщенно-однородными функциями.

Пример 3. Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O, расположенной в его центре инерции. Предположим, что с телом связаны оси $Oxyz$, которые являются главными центральными осями этого тела. Уравнения вращательного движения тела под действием управляющего момента **M** имеют вид

$$\Theta\dot{\omega}+\omega\times\Theta\omega=\mathbf{M} \tag{3.6}$$

где ω – вектор угловой скорости, Θ – тензор инерции тела [8].

Пусть заданы два орта **r** и **s**; вектор **s** будем считать неизменным в абсолютном пространстве, вектор **r** – неизменным в твердом теле. Тогда вектор **s** вращается по отношению к системе $Oxyz$ с угловой скоростью $-\omega$. Следовательно,

$$\dot{\mathbf{s}}=-\omega\times\mathbf{s} \tag{3.7}$$

Построим управляющий момент **M**, при котором система уравнений (3.6), (3.7) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $\mathbf{s}=\mathbf{r}$, $\omega=\mathbf{0}$.

Известно [8], что момент **M** можно выбрать в виде

$$\mathbf{M}=\frac{\partial W}{\partial\omega}-\frac{dG}{d\varphi}\mathbf{s}\times\mathbf{r}$$

где $W(\omega)$ – отрицательно-определенная функция компонент вектора ω, $G(\varphi)$ – положительно-определенная функция величины $\varphi=\|\mathbf{s}-\mathbf{r}\|^2/2$.

Будем считать, что $W(\omega)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой однородной порядка μ функцией, $\mu>2$; $G(\varphi)=a\varphi^{\lambda+1}$, где $a>0$, $\lambda\geqslant 1$.

Пусть $\mathbf{X}=\mathbf{s}\times\mathbf{r}$, $\mathbf{Y}=\left(x_1^\beta,x_2^\beta,x_3^\beta\right)^T$, β – рациональное число с нечетным числителем и знаменателем, $\beta\geqslant 1$.

Рассмотрим функцию

$$V=\frac{1}{2}\omega^T\Theta\omega+G(\varphi)+c\omega^T\Theta\mathbf{Y} \tag{3.8}$$

где c – положительная постоянная.

Если $\beta\geqslant\max\{1+(\mu-2)(\lambda+1),\ (2\lambda+1)/(\mu-1)\}$, а число c достаточно мало, то функция V положительно определена, а ее производная, вычисленная в силу уравнений (3.6), (3.7), является отрицательно-определенной функцией.

Используя эту функцию, можно показать, что для решений уравнений (3.6), (3.7), начинающихся при $t=0$ в достаточно малой окрестности положения равновесия $\mathbf{s}=\mathbf{r}$, $\omega=\mathbf{0}$, при всех $t\geqslant 0$ имеют место неравенства

$$\|\omega(t)\|\leqslant A(t+1)^{-(\lambda+1)/\delta},\quad \|\mathbf{s}(t)-\mathbf{r}\|\leqslant A(t+1)^{-1/\delta}$$

Здесь $A>0$, $\delta=\max\{(\mu-2)(\lambda+1),\ \beta-1\}$.

Пусть на рассматриваемое тело действует наряду с управляющим моментом еще момент внешних возмущающих сил $\mathbf{M}_1$, имеющий вид

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{B}(t)\mathbf{H}(\omega)$$

где компоненты k-мерного вектора $\mathbf{H}(\omega)$ – непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка ν, $\nu>1$; $\mathbf{B}(t)$ – $(3\times k)$-матрица, непрерывная и ограниченная при $t\geqslant 0$.

Продифференцировав функцию Ляпунова (3.8) в силу возмущенной системы, найдем достаточное условие асимптотической устойчивости исследуемого положения равновесия:

$$\nu>\mu-1 \tag{3.9}$$

Предположим далее, что существует число α, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, такое, что

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\int_0^t\mathbf{B}(\tau)d\tau=\mathbf{0}$$

Тогда условие (3.9) можно уточнить, применяя предложенный в настоящей работе метод исследования устойчивости решений неавтономных систем.

Выберем для возмущенной системы функцию Ляпунова в виде

$$V_1=V-(\omega+\mathbf{Y})^T\int_0^t\mathbf{B}(\tau)d\tau\mathbf{H}(\omega)$$

Используя эту функцию, получим, что при выполнении неравенства

$$\nu \geqslant \max\left\{\frac{\mu}{2}+\frac{\alpha(\mu-2)}{2},\mu-2+\frac{1}{\lambda+1}+\alpha(\mu-2),1+\xi,\frac{\mu}{2}+\frac{\xi}{2}\right\},\quad \left(\xi=\frac{\alpha(2\lambda+2-\mu)}{(\lambda+1)(\mu-1)}\right) \tag{3.10}$$

положение равновесия $\mathbf{s}=\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ возмущенной системы асимптотически устойчиво.

Замечание. Для систем с обобщенно-однородными правыми частями условие (2.1) при всех $\alpha \in [0, 1]$ уточняет известное условие асимптотической устойчивости нулевого решения $\sigma > \mu$. В рассмотренном примере неравенство (3.10) расширяет множество значений параметра ν, определенное условием (3.9), только в случае, когда выполнены неравенства

$$\alpha(\mu-2)(\lambda+1)\leqslant\lambda,\quad \alpha(2\lambda+2-\mu)\leqslant(\mu-1)(\mu-2)(\lambda+1)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
2. *Малкин И.Г.* Теорема об устойчивости по первому приближению // Докл. АН СССР. 1951. Т. 76. № 6. С. 783–784.
3. *Красовский Н.Н.* Об устойчивости по первому приближению // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 5. С. 516–530.
4. *Александров А.Ю.* Об устойчивости равновесия нестационарных систем // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 205–209.
5. *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959. 324 с.
6. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability theory by Liapunov's direct method. N.Y.: Springer, 1977. 396 p.
7. *Александров А.Ю., Старостенко Б.В.* Достаточные условия неустойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений // Тр. Алтайск. гос. техн. ун-та им. И.И. Ползунова. 1994. Вып. 3. С. 259–263.
8. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
6.I.1997