ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 62. Вып. 1, 1998

УДК 531.36

© 1998 г. В.И. Юдович

О БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛА ИЗ СЕМЕЙСТВА РАВНОВЕСИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ЕЕ ЗАТЯГИВАНИИ

Для динамической системы с косимметрией рассматривается бифуркация ответвления цикла от равновесия, входящего в однопараметрическое непрерывное семейство равновесий, при переходе параметра через критическое значение. В отличие от классической ситуации, когда равновесие изолированно, автоколебательный режим ответвляется, вообще говоря, с запаздыванием по параметру. Другое характерное отличие состоит в возможности сверхкритического ответвления неустойчивого предельного цикла.

Косимметрия динамической системы может служить естественной причиной существования непрерывного семейства равновесий [1, 2]. В системе с параметром такие семейства могут ответвляться от изолированных равновесий. Эта бифуркация имеет место в задаче о плоской фильтрационной конвекции однокомпонентной [1, 3] и многокомпонентной жидкости, допускается и наличие источников тепла[1]. Косимметрия и связанные с нею бифуркационные явления встречаются также и в задачах классической механики, например, когда потенциальная энергия натуральной механической системы инвариантна относительно некоторой группы преобразований[2].

Естественно встает вопрос о дальнейших бифуркациях семейства при изменении параметра. Наряду со статическими бифуркациями распада, слияния, рождения и гибели семейств равновесий [1, 2] возможна локальная бифуркация, связанная с возникновением колебательной неустойчивости равновесий семейства и развитием автоколебательного периодического режима движения. Это и есть тема данной статьи. В ней изложено содержание двух препринтов автора[3, 4].

Известны различные подходы к задаче о возникновении периодических автоколебаний [4, 5]. В данной статье использован метод Ляпунова – Шмидта в форме, развитой в [6]. К счастью, применяя метод к конкретным задачам, не нужно каждый раз возвращаться к анализу уравнения разветвления. Следует просто разыскивать решение в виде рядов по степеням надкритичности или нейтральной амплитуды [7].

Появление нейтральной колебательной моды у одного из равновесий первоначально устойчивого семейства приводит при возрастании параметра, вообще говоря, лишь к возникновению малой неустойчивой дуги. Предельный цикл ответвляется не сразу, а при

---

[1] *Юдович В.И.* Косимметрия и конвекция многокомпонентной жидкости в пористой среде. Ростов-на-Дону, 1993. 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 7.06.93, № 1523–В93; Косимметрия и фильтрационная конвекция с источниками тепла. Ростов-на-Дону, 1993. 29 с. – Деп. в ВИНИТИ 21.07.93, № 2057–В93.

[2] *Юдович В.И.* Косимметрия и дифференциальные уравнения второго порядка. Ростов-на-Дону, 1993. 14 с. – Деп. в ВИНИТИ 19.04.93, № 1008–В93; О несуществовании статической группы симметрии для косимметричных динамических систем. Ростов-на-Дону, 1993. 38 с. – Деп. в ВИНИТИ 13.04.93, № 929–В93.

[3] *Юдович В.И.* Косимметрия и колебательная неустойчивость. 1. Рождение предельного цикла из непрерывного семейства равновесий динамической системы с косимметрией. Ростов-на-Дону, 1994. 30 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.10.94, № 2440–В94.

[4] *Юдович В.И.* Косимметрия и колебательная неустойчивость. II. Пример затягивания бифуркации рождения цикла. Исследование устойчивости предельного цикла. Ростов-на-Дону, 1995. 25 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.11.95, № 3187–В95.

большем значении параметра, от одного из концов этой дуги. Это – эффект затягивания бифуркации рождения цикла, который и составляет новую специфическую черту систем с косимметрией. Отметим еще возможность сверхкритического ответвления неустойчивого цикла. Лишь ради краткости здесь рассматриваются аналитические векторные поля в гильбертовом пространстве. Переход к абстрактным параболическим уравнениям в банаховом пространстве и уравнениям математической физики проводится автоматически, без изменения формализма (см. [6]).

1. Постановка задачи. Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение с вещественным параметром λ в гильбертовом пространстве H

$$\dot{\theta} = F(\theta, \lambda) \tag{1.1}$$

Оператор $F\colon H \times \mathbb{R} \to H$ будем считать аналитическим и предположим, что он допускает косимметрию $L\colon H \to H$, не зависящую от λ. Это означает, что для всех $\theta \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$(F(\theta, \lambda), L\theta) = 0 \tag{1.2}$$

Пусть при некотором значении λ_0 параметра λ известно некосимметричное решение θ_0 уравнения (1.1). Это означает, что

$$F(\theta_0, \lambda_0) = 0, \quad L\theta_0 \neq 0 \tag{1.3}$$

Предположим, что спектр $\sigma(A_0)$ производной $A_0 = F'_\theta(\theta_0, \lambda_0)$ состоит из трех спектральных множеств $\sigma_+(A_0)$, $\sigma_-(A_0)$, $\sigma_0(A_0)$, расположенных соответственно внутри правой полуплоскости, внутри левой полуплоскости и на мнимой оси. При этом будем считать, что нейтральный спектр $\sigma_0(A_0)$ содержит три простых собственных значения $0, \pm i\omega_0$ и не содержит других точек мнимой оси; впрочем, существенно лишь, что он не содержит точек $in\omega_0$ при $n = \pm 2, \pm 3, \ldots$

Заметим, что точка 0 принадлежит спектру $\sigma(A_0)$ потому, что $L\theta_0$ – собственный вектор сопряженного оператора A_0^* [1]:

$$A_0^* L\theta_0 = 0 \tag{1.4}$$

Предположение о простоте нулевого собственного числа означает отсутствие дополнительного вырождения, помимо обязательного, связанного с существованием косимметрии (1.2) и некосимметричностью равновесия ($L\theta_0 \neq 0$). В этих условиях применима косимметрическая версия теоремы о неявной функции (см. теорему 1 в [1]; обобщения изложены в [8, 9]). Из нее следует, что уравнение (1.1) имеет однопараметрическое семейство равновесий $s \mapsto c(s)$, $s \in (-\eta, \eta)$ для некоторого $\eta > 0$, так что

$$F(c(s), \lambda_0) = 0, \quad c(0) = \theta_0 \tag{1.5}$$

При этом в окрестности точки θ_0 нет иных равновесий, и точка 0 – простое собственное число оператора $A_s = F'_\theta(c(s), \lambda_0)$ для всех s. Соответствующий собственный вектор есть $\gamma_s = c'(s)$ – касательный вектор к семейству. При этом, ввиду простоты, $(\gamma_0, L\theta_0) \neq 0$, так что, масштабируя, если надо, параметр s, можно считать выполненными соотношения

$$A_0\gamma_0 = 0, \quad (\gamma_0, L\theta_0) = 1 \tag{1.6}$$

Когда λ, изменяясь, пересекает значение λ_0, семейство $c(s)$ не исчезает, а лишь слегка деформируется, и в этом смысле является регулярным. Это вытекает из косимметрической версии теоремы о неявной функции с параметром [8, 9], но дальше будет установлено независимо.

Присутствие в спектре оператора A_0 чисто мнимых собственных чисел означает, что λ_0 – критическое значение колебательной неустойчивости равновесия θ_0. Естественно возникает задача об устойчивости равновесий семейства при околокритических значениях параметра λ и о возможности ответвления предельных циклов от семейства равновесий $c(s)$. Ее решению и посвящена данная работа.

2. Линеаризованное уравнение. Введя новое время $\tau = \omega_0 t$, запишем линеаризованное на равновесии θ_0 уравнение в виде

$$Tu \equiv \omega_0 u' - A_0 u = f \tag{2.1}$$

где штрих означает дифференцирование по τ, а $f = f(\tau)$ – заданная непрерывная и 2π-периодическая вектор-функция. Будем разыскивать 2π-периодическое решение уравнения (2.1).

Однородное уравнение $Tu = 0$ имеет три независимых 2π-периодических решения: $\gamma_0, \varphi e^{i\tau}, \varphi^* e^{-i\tau}$. При этом φ – собственный вектор оператора A_0: $A_0\varphi = i\omega_0\varphi$. Однородное сопряженное уравнение

$$T^* w \equiv -\omega_0 w' - A_0^* w = 0 \tag{2.2}$$

имеет тоже три независимых периодических решения: $L\theta_0$, $\Phi e^{i\tau}$, $\Phi^* e^{-i\tau}$, где Φ – собственный вектор оператора A_0^*:

$$A_0^*\Phi = -i\omega_0\Phi \tag{2.3}$$

Условие простоты собственных чисел $\pm i\omega_0$ позволяет ввести нормировку

$$(\varphi, \Phi) = 1 \tag{2.4}$$

Пусть $E_\pm$, E_0 – спектральные проекторы, отвечающие спектральным множествам $\sigma_+(A_0)$, $\sigma_-(A_0)$, $\sigma_0(A_0)$. Проектор E_0 дается формулой

$$E_0 h = (h, L\theta_0)\gamma_0 + (h,\Phi)\varphi + (h,\Phi^*)\varphi^* \tag{2.5}$$

для любого h из комплексной оболочки H^c пространства H. Определим также дополнительный проектор E'_0, полагая $E'_0 = I - E_0 = E_+ + E_-$.

Лемма (*условие разрешимости*). Для того чтобы уравнение (2.1) с вещественной непрерывной вектор-функцией f имело 2π-периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция f удовлетворяла условию ортогональности

$$\left\langle (f,\Phi)e^{-i\tau}\right\rangle = 0, \quad \left(\langle f\rangle, L\theta_0\right) = 0 \tag{2.6}$$

где угловые скобки соответствуют среднему по времени

$$\langle f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau \tag{2.7}$$

Если условие (2.6) выполнено, то все 2π-периодические решения уравнения (2.1) определяются равенством

$$u(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{(\tau-s)A_0^-}E_- f(s)ds - \int_{\tau}^{\infty} e^{(\tau-s)A_0^+}E_+ f(s)ds + \alpha\varphi e^{i\tau} + \alpha^*\varphi^* e^{-i\tau} + \beta\gamma_0 \tag{2.8}$$

Здесь A_0^-, A_0^+ – сужения оператора A_0 на инвариантные подпространства $\mathrm{im}E_-$ и $\mathrm{im}E_+$ соответственно, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные.

Приведенный результат есть частный случай хорошо известных теорем. Для общих уравнений с ограниченными операторными коэффициентами такие теоремы имеются в [10], а в [11] аналогичные вопросы рассмотрены для абстрактных параболических уравнений.

Уравнение (2.1) можно также решать методом Фурье. Если условия разрешимости (2.6) выполнены, а вектор-функция f имеет разложение Фурье

$$f(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\tau}, \qquad f_{-n}=f_n^* \tag{2.9}$$

то периодическое решение (2.8) записывается в виде

$$u(\tau)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0,\pm 1}}^{\infty}\left(in\omega_0 I-A_0\right)^{-1} f_n e^{in\tau}+(i\omega_0 I'-A_0')^{-1}E_0' f_1 e^{i\tau}-(i\omega_0 I'+A_0')^{-1}E_0' f_{-1}e^{-i\tau}-$$

$$-A_0'^{-1}E_0' f_0+\alpha\varphi e^{i\tau}+\alpha^*\varphi^* e^{-i\tau}+\beta\gamma_0 \tag{2.10}$$

Здесь A_0' – сужение оператора A_0 на дополнительное подпространство $\operatorname{im} E_0'$ к нейтральному подпространству $\operatorname{im} E_0, I'$ – тождественный оператор этого подпространства.

Далее понадобится следующее разложение гильбертова пространства $H_p = L_2(S^1, H)$ – вектор-функций на окружности S^1 со значениями в H. Пусть H_p^0 – подпространство в H_p, состоящее из вектор-функций вида

$$u(\tau)=\alpha\varphi e^{i\tau}+\alpha^*\varphi^* e^{-i\tau}+\beta\gamma_0; \quad \alpha\in\mathbb{C}, \quad \beta\in\mathbb{R} \tag{2.11}$$

Определим проектор Π: $H_p \to H_p^0$, полагая для любой вектор-функции $f \in H_p$

$$(\Pi f)(\tau)=\left\langle (f,\Phi)e^{-i\tau}\right\rangle e^{i\tau}\varphi+\left\langle (f,\Phi^*)e^{i\tau}\right\rangle e^{-i\tau}\varphi^*+\left(\langle f\rangle, L\theta_0\right)\gamma_0 \tag{2.12}$$

Через H_p' обозначим дополнительное подпространство, а через Π' – дополнительный проектор, так что $H_p = H_p^0 \oplus H_p'$, $\Pi' = I - \Pi$.

3. Уравнение разветвления циклов. Будем разыскивать периодическое решение уравнения (1.1) с неизвестным периодом $p = 2\pi/\omega$ в виде

$$\theta(t)=\theta_0+u(\tau), \quad \tau=\omega t \tag{3.1}$$

Подстановка в (1.1) дает для определения u, ω уравнение

$$\omega\frac{du}{d\tau}=F(\theta_0+u,\lambda) \tag{3.2}$$

Положим $\lambda = \lambda_0 + \delta$, $\omega = \omega_0 + \mu$ и будем считать, что δ, μ, равно как и u, малы. Уравнение (3.2) перепишем в виде

$$Tu=-\mu u'+F(\theta_0+u,\lambda_0+\delta)-A_0 u \tag{3.3}$$

Далее применим метод Ляпунова – Шмидта в форме, развитой в [6].

Представим u в виде: $u = \Pi u + \Pi' u$, или

$$u(\tau)=\alpha\varphi e^{i\tau}+\alpha^*\varphi^* e^{-i\tau}+\beta\gamma_0+v(\tau) \tag{3.4}$$

Для $v = \Pi' u$ должны выполняться условия ортогональности

$$\left\langle (v,\Phi)e^{-i\tau}\right\rangle=0, \quad \left(\langle v\rangle, L\theta_0\right)=0 \tag{3.5}$$

При этом $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$ – неизвестные постоянные, $v \in H'_p$ – неизвестная вектор-функция.

Задача инвариантна относительно сдвига времени $\tau \to \tau + \tau_0$. Поэтому вместе с любым решением α, β, $v(\tau)$ вся орбита действия группы вращений окружности $\{\alpha e^{i\tau_0}$, β, $v(\tau + \tau_0)\}$ состоит из решений. Выбирая τ_0, так, что $\alpha > 0$, перепишем (3.4) в виде

$$u(\tau) = \alpha\psi(\tau) + \beta\gamma_0 + v(\tau), \quad \psi(\tau) = \varphi e^{i\tau} + \varphi^* e^{-i\tau} \tag{3.6}$$

Уравнение (3.3) эквивалентно системе

$$Tv = \Pi' f \tag{3.7}$$

$$\Pi f = 0 \tag{3.8}$$

$$f = -\mu\alpha\psi' - \mu v' + F(\theta_0 + \alpha\psi + \beta\gamma_0 + v, \lambda_0 + \delta) - A_0(\alpha\psi + v)$$

Уравнение (3.8) эквивалентно двум равенствам

$$g \equiv \left\langle (f, \Phi)e^{-i\tau} \right\rangle = 0, \quad h \equiv \left(\langle f \rangle, L\theta_0 \right) = 0 \tag{3.9}$$

Из уравнения (3.7) v выражается далее через α, β, μ, δ. После этого подстановка в (3.9) дает систему уравнений разветвления циклов.

Сужение T_1 оператора T на H'_p есть обратимый оператор. Поэтому к уравнению (3.7) в окрестности точки $v = 0$, $\alpha = \beta = \mu = \delta = 0$ применима теорема о неявной функции. При любых малых α, β, μ, δ уравнение (3.7) имеет в окрестности нуля в H'_p единственное решение, аналитически зависящее от α, β, μ, δ:

$$v = \sum_{k,l,m,n=0}^{\infty} v_{klmn} \alpha^k \beta^l \mu^m \delta^n \tag{3.10}$$

Коэффициенты v_{klmn} определяются последовательно после подстановки (3.10) в (3.7). При этом используется разложение оператора F в ряд Тейлора в окрестности точки θ_0, λ_0 по степеням $\theta - \theta_0 = u$, $\lambda - \lambda_0 = \delta$:

$$F(\theta_0 + u, \lambda_0 + \delta) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,l!} F_{\theta^k \lambda^l}(\theta_0, \lambda_0) u^k \delta^l \tag{3.11}$$

Выпишем несколько первых членов этого разложения

$$F(\theta_0 + u, \lambda_0 + \delta) = A_0 u + F_{0\lambda}\delta + \frac{1}{2}F_0'' u^2 + \delta F_{0\lambda}' u + \frac{\delta^2}{2} F_{0\lambda\lambda} + \frac{1}{6} F_0''' u^3 + \frac{\delta}{2} F_{0\lambda}''' u^2 + \ldots \tag{3.12}$$

Штрих соответствует дифференцированию по θ, а индекс нуль означает, что производная вычислена в точке θ_0, λ_0.

Далее удобно действовать в следующем порядке. Обращаясь к степенному разложению F по α, β, μ, δ, последовательно рассматриваем члены первой, второй и т.д. степеней. Если коэффициент f_{klmn} в ходе рекуррентной процедуры уже определен, находим v_{klmn}, решая уравнение $Tv_{klmn} = \Pi' f_{klmn}$. Затем определяем вклады этого слагаемого в уравнения разветвления (3.9), которые запишем в виде

$$\sum_0^{\infty} g_{klmn} \alpha^k \beta^l \mu^m \delta^n = 0, \quad \sum_0^{\infty} h_{klmn} \alpha^k \beta^l \mu^m \delta^n = 0 \tag{3.13}$$

Коэффициенты υ_{klmn}, g_{klmn}, h_{klmn} определяются равенствами

$$\upsilon_{klmn} = T_1^{-1}\Pi' f_{klmn}, \quad g_{klmn} = \left\langle (f_{klmn}, \Phi) e^{-i\tau} \right\rangle$$

$$h_{klmn} = \left(\left\langle f_{klmn} \right\rangle, L\theta_0 \right) \tag{3.14}$$

Среди членов первой степени в разложении f отличен от нуля лишь $f_{0001} = F_{0\lambda}$. В системе (3.13) разложения начинаются со второй степени, так как $F_{0\lambda}$ содержит лишь ненулевые гармоники, а дифференцирование равенства (1.2) дает соотношения

$$(F_{0\lambda}, L\theta_0) = (F_{0\lambda\lambda}, L\theta_0) = \cdots = (F_{0\lambda^k}, L\theta_0) = \cdots = 0 \tag{3.15}$$

Разложение для υ имеет вид

$$\upsilon = \delta\upsilon_{0001} + \alpha^2\upsilon_{2000} + \alpha\beta\upsilon_{1100} + \alpha\delta\upsilon_{1001} + \beta^2\upsilon_{0200} + \beta\delta\upsilon_{0101} + \delta^2\upsilon_{0002} + \alpha^3\upsilon_{3000} + \ldots \tag{3.16}$$

Коэффициенты даются формулами

$$\upsilon_{0001} = T_1^{-1} f_{0001} = -A_0'^{-1} F_{0\lambda}, \quad \upsilon_{2000} = \frac{1}{2} T_1^{-1}\Pi' F_0''\psi^2$$

$$\upsilon_{1100} = T_1^{-1}\Pi' F_0''(\psi, \gamma_0), \quad \upsilon_{1001} = T_1^{-1}\Pi'\left[F_0''(\psi, \upsilon_{0001}) + F_{0\lambda}'\psi\right] \tag{3.17}$$

$$\upsilon_{0200} = \frac{1}{2} T_1^{-1}\Pi' F_0''\gamma_0^2, \quad \upsilon_{0101} = T_1^{-1}\Pi'\left[F_0''(\gamma_0, \upsilon_{0001}) + F_{0\lambda}'\gamma_0\right]$$

$$\upsilon_{0002} = T_1^{-1}\Pi'\left(\frac{1}{2} F_0''\upsilon_{0001}^2 + F_{0\lambda}'\upsilon_{0001} + \frac{1}{2} F_{0\lambda\lambda}\right)$$

$$\upsilon_{3000} = T_1^{-1}\Pi'\left[\frac{1}{6} F_0'''\psi^3 + F_0''(\psi, \upsilon_{2000})\right]$$

Соответственно первое уравнение (3.13) принимает вид

$$-i\alpha\mu(\varphi, \Phi) + \alpha\beta g_{1100} + \alpha\delta g_{1001} + \alpha^3 g_{3000} + \cdots = 0 \tag{3.18}$$

где выписаны все члены разложения вплоть до второй степени, а из кубических оставлен только тот, который существенен для дальнейшего. Для коэффициентов имеем формулы

$$g_{1100} = (F_0''(\varphi, \gamma_0), \Phi), \quad g_{1001} = (F_0''(\varphi, \upsilon_{0001}) + F_{0\lambda}'\varphi, \Phi) \tag{3.19}$$

$$g_{3000} = \left\langle \left(F_0''(\varphi, \upsilon_{2000}), \Phi\right) e^{-i\tau} \right\rangle + \frac{1}{6}\left\langle \left(F_0'''\psi^3, \Phi\right) e^{-i\tau} \right\rangle$$

Разложение левой части второго уравнения (3.13) представляется в виде

$$\alpha^2 h_{2000} + \alpha^2\beta h_{2100} + \alpha^2\delta h_{2001} + \alpha^4 h_{4000} + \cdots = 0 \tag{3.20}$$

$$h_{2000} = \frac{1}{2}\left(\left\langle F_0''\psi^2 \right\rangle, L\theta_0\right) = \left(F_0''(\varphi, \varphi^*), L\theta_0\right), \quad h_{3000} = 0$$

$$h_{2100} = \left(\left\langle F_0''(\psi, \upsilon_{1100}) \right\rangle, L\theta_0\right) + \left(F_0''(\gamma_0, \langle \upsilon_{2000} \rangle), L\theta_0\right) + \frac{1}{2}\left(\left\langle F_0'''(\psi, \psi, \gamma_0) \right\rangle, L\theta_0\right)$$

$$h_{2001} = \Big(\left\langle F_0''(\psi, \upsilon_{1001}) \right\rangle + \left\langle F_0''(\upsilon_{0001}, \upsilon_{2000}) \right\rangle + \left\langle F_{0\lambda}'\upsilon_{2000} \right\rangle +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\langle F_0'''(\upsilon_{0001}, \psi, \psi) \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle F_{0\lambda}''\psi^2 \right\rangle, L\theta_0\Big)$$

$$h_{4000} = \left(\left\langle F_0''(\psi, \upsilon_{3000}) \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle F_0''\upsilon_{2000}^2 \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle F_0'''(\psi, \psi, \upsilon_{2000}) \right\rangle + \frac{1}{24}\left\langle F_0^{IV}\psi^4 \right\rangle, L\theta_0\right)$$

Здесь было учтено, что $\langle\psi\rangle = 0$, а потому и $\langle v_{1001}\rangle = 0$. В разложении (3.20) исчезают также слагаемые с мономами $\beta^m\,\delta^n$, и вообще все члены, не содержащие α. Это следует из равенства

$$h(0, \beta,\mu, \delta) = 0 \tag{3.21}$$

Для доказательства рассмотрим уравнение (3.7) при $\alpha = 0$ в случае равновесий. Условия теоремы о неявной функции в H'_p по-прежнему выполнены. Ввиду единственности, в этом случае v зависит лишь от β, δ, но не от μ. Второе уравнение разветвления (3.13) в задаче о равновесиях выполняется тождественно. В самом деле, уравнение равновесий $F(\theta, \lambda) = 0$ в окрестности точки θ_0, λ_0 эквивалентно уравнению

$$F(\theta,\lambda)-(F(\theta,\lambda),L\theta_0)\gamma_0=0 \tag{3.22}$$

Это уравнение, очевидно, выполняется для равновесий. Если же выполнено уравнение (3.22), то умножая его скалярно на $L\theta$, при учете равенств (1.2) и (1.6), заключаем, что второе слагаемое в (3.22) исчезает. При этом учитываем, что $(\gamma_0, L\theta) \neq 0$, когда θ близко к θ_0 – при $\theta = \theta_0$ эта величина, согласно (1.6), равна единице. Итак, доказано, что второе уравнение разветвления, которое можно записать в виде $(F(\theta, \lambda), L\theta_0) = 0$, для равновесий выполняется тождественно, что и доказывает равенство (3.21). Заодно установлено, что семейство равновесий $c(s)$, существующее при $\lambda = \lambda_0$, допускает продолжение по параметру λ, что вытекает также из общих результатов [8, 9]. Отметим еще, что из предыдущего рассуждения следует отсутствие в разложении (3.10) для υ мономов $\beta^l\mu^m\delta^n$ при $m > 0$.

Осталось заметить, что в уравнении (3.20) присутствуют лишь мономы $\alpha^k\beta^l\mu^m\delta^n$ с четным k, потому что сдвиг времени $\tau \mapsto \tau+\pi$ оставляет это уравнение неизменным, ввиду инвариантности среднего по времени относительно сдвигов, а с другой стороны, этот сдвиг эквивалентен замене $\alpha \mapsto -\alpha$.

4. Бифуркация ответвления цикла. *Теорема* 1. Пусть для уравнения (1.1) с правой частью F, аналитической в окрестности точки θ_0, λ_0, где θ_0 – равновесие: $F(\theta_0, \lambda_0) = 0$, и с аналитической косимметрией, не зависящей от параметра λ, выполнены следующие условия:

1) равновесие θ_0 некосимметрично: $L\theta_0 \neq 0$;

2) спектр производной $A_0 = F'_\theta(\theta_0,\lambda_0)$ состоит из пары спектральных множеств σ_-, σ_+ внутри левой и правой полуплоскостей, а также спектрального множества σ_0 на мнимой оси, которое содержит тройку простых собственных значений $0, \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ и не содержит точек $in\omega_0$, $n = \pm 2, \ldots$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) при малых $\delta = \lambda - \lambda_0$ существует множество равновесий $c(s, \delta)$, аналитически зависящее от $(s, \delta) \in (-s_0, s_0)\times(-\delta_0, \delta_0)$, $s_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, так что $F(c(s, \delta), \lambda_0 + \delta) = 0$;

2) если выполняется неравенство

$$h_{2000} = (F_0''(\varphi,\varphi^*),L\theta_0) \neq 0 \tag{4.1}$$

то при малых δ в окрестности θ_0 нет малых предельных циклов.

Доказательство. Ранее уже было установлено, что в задаче о равновесиях β и δ остаются произвольными, а v однозначно определяется из уравнения (3.7). В результате для любых малых δ, β находим равновесия

$$\theta = c(\beta,\delta) = \theta_0 + \beta\gamma_0 + \delta v_{0001} + \beta^2 v_{0200} + \beta\delta v_{0101} + \delta^2 v_{0002} + \ldots \tag{4.2}$$

Коэффициенты определяются формулами (3.17).

Второе утверждение сразу следует из уравнения (3.20). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть в дополнение к общим условиям теоремы 1 выполняется равенство $h_{2000} = 0$. Пусть, кроме того, справедливы неравенства

$$\Delta = \begin{vmatrix} g^r_{3000} & g^r_{1100} \\ h_{4000} & h_{2100} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} g^r_{1100} & g^r_{1001} \\ h_{2100} & h_{2001} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.3}$$

где верхний индекс r соответствует действительной части. Тогда малый предельный цикл, стягивающийся при $\lambda \to \lambda_0$ к равновесию θ_0, существует, единствен, аналитически зависит от параметра $\sqrt{\delta} = \sqrt{\lambda - \lambda_0}$ и может быть определен по формуле

$$\theta(t) = \theta_0 + \alpha_1 \varepsilon \psi(\omega_0 t) + \left[\operatorname{sign}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)(\beta_1 \gamma_0 + v_{0001}) + \alpha_1^2 v_{2000} \right] \varepsilon^2 + \ldots \tag{4.4}$$

где опущены члены порядка ε^3 и выше. Малый параметр ε и амплитудные коэффициенты α_1, β_1 задаются равенствами

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\operatorname{sign}\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)\delta}, \quad \alpha_1 = \sqrt{\left|\frac{\Delta_1}{\Delta}\right|}, \quad \beta_1 = \frac{\delta_1}{\Delta}, \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} g^r_{1001} & g^r_{3000} \\ h_{2001} & h_{4000} \end{vmatrix} \tag{4.5}$$

Это решение вещественно при $\delta > 0$, если $\Delta_1/\Delta > 0$, и соответственно, при малых $\delta < 0$, если $\Delta_1/\Delta < 0$. Частота ω периодического движения аналитически зависит от δ и имеет вид

$$\omega = \omega_0 + \mu_1 \delta + \ldots, \quad \mu_1 = g^i_{1001} + \left(g^i_{1100}\delta_1 + g^i_{3000}\Delta_1\right) / \Delta \tag{4.6}$$

Доказательство. При $h_{2000} = 0$, сокращая уравнения разветвления (3.18) и (3.20) на α и α^2 соответственно, приведем их к виду (индекс i соответствует мнимой части)

$$\begin{gathered} -\mu(\varphi, \Phi) + \alpha^2 g^i_{3000} + \beta g^i_{1100} + \delta g^i_{1001} + \ldots = 0 \\ \alpha^2 g^r_{3000} + \beta g^r_{1100} + \delta g^r_{1001} + \ldots = 0 \\ \alpha^2 h_{4000} + \beta h_{2100} + \delta h_{2001} + \ldots = 0 \end{gathered} \tag{4.7}$$

Левые части этих уравнений аналитичны относительно α^2, β, δ, μ; в них опущены члены второй и более высоких степеней относительно этих величин. Теперь перечисленные выше результаты выводятся непосредственным применением теоремы о неявной функции.

Для коэффициента h_{2000} можно получить более простое выражение

$$h_{2000} = -2\operatorname{Re}(F_0'\varphi, L_0'\varphi) = 2\omega_0 \operatorname{Im}(\varphi, L_0'\varphi) \tag{4.8}$$

Для этого достаточно использовать равенство

$$\left[F_0''(u,v), L\theta_0\right] + \left[F_0'u, L_0'v\right] + \left[F_0'v, L_0'u\right] = 0 \tag{4.9}$$

которое справедливо для любых комплексных векторов u, v; [,] означает билинейное произведение, так что $[u, v] = (u, v^*)$. Чтобы вывести (4.9), достаточно продифференцировать дважды по θ равенство (1.2), перейти к его комплексификации и положить $\theta = \theta_0$, $\lambda = \lambda_0$.

К условию существования малых предельных циклов $h_{2000} = 0$ можно также прийти, заметив, что из (1.1) и (1.2) следует равенство

$$(\dot{\theta}, L\theta) = 0 \tag{4.10}$$

После подстановки $\theta = \theta_0 + \alpha\psi + \beta\gamma_0 + v$ (см.(3.6)) и осреднения по времени, в главном порядке получим равенство $\langle(\dot\psi, L_0'\psi)\rangle = 0$, что совпадает с условием $h_{2000} = 0$, ввиду (4.8).

Голономные косимметрии и венчики. Косимметрия L: $H \to H$ оператора F: $H \to H$ называется голономной, если она потенциальна, так что $L\theta = \mathrm{grad}\ \varphi(\theta)$. В этом случае функционал φ (потенциал) является интегралом дифференциального уравнения $\dot\theta = F\theta$. Косимметрию L назовем квазиголономной, если она превращается в голономную после умножения на некоторый нигде не обращающийся в нуль функционал h, т.е. $h(\theta)L\theta = \mathrm{grad}\ \varphi(\theta)$.

Назовем косимметрию L существенно неголономной, если она не голономна и даже не квазиголономна. Косимметрию можно трактовать как дифференциальную 1-форму, а существенно неголономная косимметрия есть не что иное, как контактная форма [12, 13]. Среди линейных операторов голономными являются лишь самосопряженные, а кососимметрические – напротив, "наиболее неголономны".

В рассматриваемой здесь задаче случай голономной (квазиголономной) косимметрии является исключительным и легко анализируется.

Пусть выполняются общие условия теоремы 1, а косимметрия L голономна. Тогда фазовое пространство H расслаивается на инвариантные множества уровня потенциала φ, которые пересекаются трансверсально с семейством равновесий вблизи θ_0 при λ, близких к λ_0. Это следует из условия простоты нулевого собственного значения производной $A_0 = F'(\theta_0, \lambda_0)$, которое помимо одномерности ядра требует, чтобы выполнялось неравенство $(\gamma_0, L\theta_0) \neq 0$. При естественных условиях отсутствия дальнейших вырождений на каждом из множеств уровня вблизи θ_0 происходит локальная бифуркация ответвления цикла от равновесия. При переходе параметра λ через критические значения $\lambda_*(s)$ (при этом $\lambda_*(0) = \lambda_0$) от равновесия $c(s, \lambda_*(s) - \lambda_0)$ ответвляется предельный цикл. В результате возникает *венчик* – инвариантная поверхность, образованная ответвившимися предельными циклами. При выполнении условий невырожденности в точке θ_0 при $\lambda = \lambda_0$, которые локально сохраняются, либо все эти циклы сверхкритические и устойчивые, либо докритические и неустойчивые.

5. Устойчивость равновесий и предельного цикла. Если оператор $A_0 = F_\theta'(\theta_0, \lambda_0)$ имеет хотя бы одно собственное значение в правой полуплоскости, то равновесия семейства $c(s, \delta)$ и ответвляющийся предельный цикл неустойчивы. Поэтому будем полагать, что спектр $\sigma(A_0)$ содержит лишь спектральное множество σ_- и тройку простых собственных значений $0, \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. Тогда анализ устойчивости сводится к исследованию собственных значений, порождаемых возмущениями этой тройки; заметим, что следующие ниже формулы для возмущенных собственных значений сохраняют силу в общем случае.

Для исследования устойчивости равновесия $c(s, \delta)$ рассмотрим спектр оператора

$$A(s,\delta) = F'(c(s,\delta), \lambda_0 + \delta) = A_0 + sA_{10} + \delta A_{01} + \ldots \tag{5.1}$$

который аналитически зависит от s и δ в окрестности точки (0, 0) на плоскости (s, δ). Семейство $c(s, \delta)$ имеет разложение

$$c(s,\delta) = \theta_0 + c_{10}s + c_{01}\delta + c_{20}s^2 + c_{11}s\delta + c_{02}\delta^2 + \ldots \tag{5.2}$$

коэффициенты которого находим из уравнения равновесия

$$F(c(s,\delta), \lambda_0 + \delta) = 0 \tag{5.3}$$

Подстановка (5.2) в (5.3) дает цепочку уравнений

$$A_0c_{10} = 0, \qquad A_0c_{01} = -F_{0\lambda}$$

$$A_0c_{20} = -\frac{1}{2}F_0''c_{10}^2, \quad A_0c_{11} = -F_0''(c_{10}, c_{01}) - F_{0\lambda}'c_{10}$$

$$A_0c_{02} = -\frac{1}{2}F_0''c_{01}^2 - F_{0\lambda}'c_{01} - \frac{1}{2}F_{0\lambda\lambda}$$

При этом $c_{10} = c_s'(0,0) = \gamma_0$ – касательный вектор к семейству в точке θ_0 при $\lambda = \lambda_0$. Остальные уравнения имеют стандартную форму $A_0u = f$ и различаются лишь правыми частями f. Условие разрешимости $(f, L\theta_0) = 0$ автоматически выполнено ввиду косимметрического свойства. Единственность решения этого уравнения обеспечивается требованием $(u, L\theta_0) = 0$.

Операторы $A_{10}, A_{01}, \ldots$ в (5.1) определяются формулами

$$A_{10}u = F_0''(c_{10}, u), \quad A_{01}u = F_0''(c_{01}, u) + F_{0\lambda}'u, \quad u \in H$$

Собственное число нуль сохраняется в спектре оператора $A(s, \delta)$ и остается простым. Его собственный вектор $c_s'(s,\delta)$ касателен к семейству. Собственное число $i\omega_0$ оператора A_0, будучи простым, порождает простое собственное значение

$$\sigma = i\omega_0 + s\sigma_{10} + \delta\sigma_{01} + s^2\sigma_{20} + s\delta\sigma_{11} + \delta^2\sigma_{02} + \ldots$$

Собственный вектор ψ также аналитичен по s, δ:

$$\psi = \varphi + s\psi_{10} + \delta\psi_{01} + \ldots$$

Коэффициенты находим из уравнения $A(s, \delta)\psi = \sigma\psi$; при этом φ – невозмущенный собственный вектор: $A_0\varphi = i\omega_0\varphi$. Для определения $\psi_{01}, \psi_{10}, \ldots$, а также $\sigma_{10}, \sigma_{01}, \ldots$ имеем уравнения

$$T_0\psi_{10} = (\sigma_{10}I - A_{10})\varphi, \quad T_0\psi_{01} = (\sigma_{01}I - A_{01})\varphi$$

$$T_0\psi_{20} = (\sigma_{10}I - A_{10})\psi_{10} + (\sigma_{20}I - A_{20})\varphi, \ldots, \quad T_0 = A_0 - i\omega_0 I$$

Условия их разрешимости дают равенства

$$\sigma_{10} = (A_{10}\varphi, \Phi), \qquad \sigma_{01} = (A_{01}\varphi, \Phi)$$

$$\sigma_{20} = ((A_{10} - \sigma_{10}I)\psi_{10}, \Phi) + (A_{20}\varphi, \Phi)$$

где Φ – собственный вектор оператора A_0^*: $A_0^*\Phi = -i\omega_0\Phi$.

Вопрос об устойчивости равновесия $c(s, \delta)$ решается исследованием знака величины

$$\operatorname{Re}\sigma = s\operatorname{Re}\sigma_{10} + \delta\operatorname{Re}\sigma_{01} + \ldots$$

В общем случае $\operatorname{Re}\sigma_{10} \neq 0$ и тогда равновесие θ_0 при $\delta = 0$ является общей границей устойчивой и неустойчивой дуг равновесного семейства. По теореме о неявной функции, примененной к уравнению $\operatorname{Re}\sigma = 0$, для малых δ семейство по-прежнему разделяется на устойчивую и неустойчивую дуги равновесием $c(s_0(\delta),\delta)$, величина $s_0(\delta)$ определена условием $\operatorname{Re}\sigma = 0$.

Интересен случай, когда λ_0 – первое критическое значение колебательной неустойчивости равновесий. Это означает, что $\operatorname{Re}\sigma < 0$ при $\delta = 0$ и малых $s \neq 0$. В таком случае $\operatorname{Re}\sigma_{10} = 0$. В условиях общего положения $\operatorname{Re}\sigma_{20} < 0$, $\operatorname{Re}\sigma_{01} \neq 0$, и главная часть разложения $\operatorname{Re}\sigma$ имеет вид $\operatorname{Re}\sigma = s^2\operatorname{Re}\sigma_{20} + \delta\operatorname{Re}\sigma_{01} + \ldots$ Для малых δ, таких, что $\delta\operatorname{Re}\sigma_{01} < 0$, локальное семейство устойчиво. Если же $\delta\operatorname{Re}\sigma_{01} > 0$, то существует малая неустойчивая дуга, концы которой $s_\pm = s_\pm(\delta)$ находятся из уравнения $\operatorname{Re}\sigma = 0$, так что

$$s_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{-\operatorname{Re}\sigma_{01}}{\operatorname{Re}\sigma_{20}}\,\delta} + O(\delta), \quad \delta \to 0 \tag{5.4}$$

Неустойчивая дуга (s_-, s_+) окружена устойчивыми дугами. Видно, что зародившаяся неустойчивая дуга поначалу быстро растет.

Подытожим полученные результаты.

Предложение 1. Пусть θ_0 – некосимметричное равновесие при $\lambda = \lambda_0$, так что $F(\theta_0, \lambda_0) = 0$, $L\theta_0 \neq 0$. Предположим, что спектр оператора A_0 удовлетворяет условиям, поставленным в начале этого раздела. Тогда справедливы следующие утверждения.

1°. Для малых s и $\delta = \lambda - \lambda_0$ определено семейство равновесий $c(s, \delta)$, аналитически зависящее от s, δ вблизи точки (0, 0).

2°. Чисто мнимое собственное значение $i\omega_0$ порождает в спектре устойчивости равновесия $c(s, \delta)$ собственное значение $\sigma = \sigma(s, \delta)$, аналитически зависящее от s, δ, причем $\sigma(0, 0) = i\omega_0$.

3°. Если $\operatorname{Re}\sigma_{10} \neq 0$, то при малых δ локальное семейство $c(s, \delta)$ содержит единственное нейтрально устойчивое равновесие $\theta_0(\delta) = c(s_0(\delta),\delta)$, которое аналитически зависит от δ и разделяет семейство на две дуги – устойчивую и неустойчивую.

4°. Если $\operatorname{Re}\sigma_{10} = 0$, $\operatorname{Re}\sigma_{20} \neq 0$ и $\operatorname{Re}\sigma_{01} \neq 0$, то при переходе δ через нулевое значение на устойчивой дуге при $\delta = 0$ возникает нейтрально устойчивое равновесие θ_0, которое дает начало быстро растущей (по корневому закону (5.4)) неустойчивой дуге.

Осталось исследовать устойчивость ответвляющегося предельного цикла. Он порождается $(2\pi/\omega)$-периодическим по t решением θ_c, которое записывается в виде

$$\theta_c = \theta_c(\tau) = \theta_0 + \varepsilon\theta_1(\tau) + \varepsilon^2\theta_2(\tau) + \ldots \tag{5.5}$$

$$\omega = \omega_0 + \mu = \omega_0 + \omega_1\delta + \omega_2\delta^2 + \ldots$$

После того как существование решения и сходимость рядов (5.5) доказаны (см. разд. 3), коэффициенты θ_j, ω_j проще всего найти прямой подстановкой в уравнение (1.1).

Устойчивость решения (5.5) можно исследовать методом линеаризации. Разыскивая решения Флоке вида $\exp(\sigma t)u(t)$ с $(2\pi/\omega)$-периодической по t вектор-функцией u, придем к спектральной задаче для 2π-периодических по τ вектор-функций:

$$\omega\frac{du}{d\tau} + \sigma u = A(\tau)u \tag{5.6}$$

$$A(\tau) = F'(\theta_c(\tau), \lambda_0 + \varepsilon^2) = A_0 + \varepsilon A_1(\tau) + \varepsilon^2 A_2(\tau) + \ldots$$

К этой спектральной задаче можно применить методы аналитической теории возмущений, как это сделано в [6]. При этом достаточно изучить возмущение собственных чисел (показателей Флоке) 0, $\pm i\omega_0$. Однако можно быстрее прийти к ответу, по крайней мере в случае общего положения, если заметить, во-первых, что неустойчивость возможна лишь на нейтральном многообразии равновесия θ_0 (в расширенной системе, где параметр ε добавлен в качестве новой неизвестной), и во-вторых, что метод Ляпунова–Шмидта как раз и дает уравнение на нейтральном многообразии. Поэтому анализ трехмерного уравнения на нейтральном многообразии дает те же формулы, что и метод возмущений.

Для вычисления ведущей части уравнения на нейтральном многообразии можно также применить метод осреднения, который дает для решения задачи Коши (и периодического решения) асимптотику (см. [4, 5])

$$\theta_c(t) = \theta_0 + \varepsilon\alpha_c(t')e^{i\omega_0 t}\varphi + \varepsilon\alpha_c^*(t')e^{-i\omega_0 t}\varphi^* + \varepsilon^2\beta(t')\gamma_0 + \ldots$$

где $t' = \varepsilon^2 t$ – медленное время. Уравнения для неизвестных амплитуд α_c, β получаются осреднением по быстрому времени t (либо методом Ляпунова – Шмидта) сразу в нормальной форме

$$\dot\alpha_c = \alpha_c\left(g_{3000}|\alpha_c|^2 + g_{1100}\beta + g_{1001}\delta\right)$$

$$\dot\beta = |\alpha_c|^2\left(h_{4000}|\alpha_c|^2 + h_{2100}\beta + h_{2001}\delta\right)$$

Переходя на плоскости переменной α_c к полярным координатам $\alpha = |\alpha_c|$ и $\arg\alpha_c$, отделим систему для α, β, которую запишем в виде

$$\dot\alpha = \alpha(a\alpha^2 + b\beta - p\delta),\quad \dot\beta = \alpha^2(c\alpha^2 + d\beta - q\delta)$$

где использованы обозначения $g_{3000}^r = a$, $g_{1100}^r = b$, $h_{4000} = c$, $h_{2100} = d$, $g_{1001}^r = -p$, $h_{2001} = -q$. Эта система имеет семейство равновесий, для которых $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$ – произвольно. Для равновесий с ненулевым α имеем систему

$$a\alpha^2 + b\beta = p\delta,\quad c\alpha^2 + d\beta = q\delta$$

Ее решение α_δ, β_δ есть не что иное как главное приближение метода Ляпунова – Шмидта для амплитуды цикла:

$$\alpha_\delta = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}\delta},\quad \beta_\delta = \frac{\delta_1}{\Delta}\delta$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix},\quad \delta_1 = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$$

Исследование устойчивости равновесий семейства $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$ и равновесия α_δ, β_δ, отвечающего предельному циклу, методом линеаризации приводит к следующим результатам.

Предложение 2. В условиях теоремы 2 предельный цикл ответвляется в область $\delta > 0$ ($\delta < 0$), если $\Delta\Delta_1 > 0$ ($\Delta\Delta_1 < 0$). Он устойчив при одновременном выполнении двух неравенств: $2a + d < 0$, $\Delta > 0$, и неустойчив, если хотя бы одно из них нарушается грубо: $\max\{2a + d, -\Delta\} > 0$.

Пусть теперь λ_0 – критическое значение параметра λ, отвечающее первой потере устойчивости равновесий семейства, так что

$$b = \operatorname{Re}\sigma_{10} = 0,\quad \operatorname{Re}\sigma_{20} < 0,\quad \operatorname{Re}\sigma_{01} = -p \neq 0 \tag{5.7}$$

Примем для определенности, что $p < 0$, тогда малая неустойчивая дуга существует при $\delta > 0$.

Предложение 3. Пусть выполнены предложения теоремы 2 и условия (5.7). Тогда предельный цикл ответвляется в сверхкритическую область $\delta > 0$ и устойчив, если $a < 0$ и $d < 0$; он неустойчив при $a < 0$, $d > 0$. Докритический цикл ($\delta < 0$) существует при $a > 0$ и неустойчив.

Эти два предложения, вместе с теоремами 1 и 2, разъясняют эффект запаздывания бифуркации рождения цикла в косимметрических системах. В момент зарождения неустойчивой дуги равновесий условие рождения предельного цикла из теоремы 2 выполняется лишь в исключительных случаях. Критическое значение, отвечающее ответвлению предельного цикла от конца неустойчивой дуги, как раз и определяется требованием, чтобы это необходимое условие выполнялось.

Косимметрия и эффект запаздывания обнаруживаются уже в простейшей трехмерной модели фильтрационной конвекции с источниками тепла[1,4].

Автор благодарит Л.Г. Куракина, чьи замечания способствовали улучшению текста статьи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 96-01-01791) и Национального научного фонда США (DMS-9300752).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдович В.И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49. Вып. 5. С. 142–148.
2. *Yudovich V.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. V. 5. № 2. P. 402–411.
3. *Любимов Д.В.* О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.
4. *Marsden J.E., McCracken M.* The Hopf bifurcation and its applications. New York: Springer-Verlag, 1976. 408 p.; *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
5. *Iooss G.* Bifurcation of maps and applications. Amsterdam; New York: North-Holland, 1979. 232 p.
6. *Юдович В.И.* Возникновение автоколебаний в жидкости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 4. С. 638–655.
7. *Юдович В.И.* Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 3. С. 450–459.
8. *Юдович В.И.* Теорема о неявной функции для косимметрических уравнений // Мат. заметки. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 313–317.
9. *Yudovich V.* The cosymmetric version of implicit function theorem // Linear Topological Spaces and Complex Analysis. V. 2. Ankara: Middle East Technical Univ., 1995. P. 105–125.
10. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
11. *Юдович В.И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1984. 191 с. Перев. на англ. яз.: Yudovich V. The linearization method in hydrodynamical stability theory. Transl. Math. Monographs. № 74. Providence: Amer. Math. Soc., 1989. 170 p.
12. *Godbillon C.* Géométrie différentielle et mécanique analytique. Paris: Hermann, 1969; *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188 с.
13. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
15.V.1996