

3. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Совр. проб. математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
4. Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 3–9.
5. Козлов В.В., Федоров Ю.Н. Интегрируемые системы на сфере с потенциалами упругого взаимодействия // Мат. заметки. 1994. Т. 56. Вып. 3. С. 74–79.
6. Kozlov V., Harin A. Kepler's problem in constant curvature spaces // Celest. Mech. and Dynam. Astronom. 1992. V. 54. N 4. P. 393–399.
7. Козлов В.В. Конструктивный метод обоснования теории систем с неударяющими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
8. Панов А.А. Эллиптический бильярд с ньютоновским потенциалом // Мат. заметки. 1994. Т. 55. Вып. 3. С. 139–140.
9. Grammaticos B., Papageorgiou V. Integrable bouncing-ball models // Phys. Rev. A., 1988. V. 37. N 12. P. 5000–5001.
10. Веселов А.П., Веселова Л.Е. Поток на группах Ли с неголомомной связью и интегрируемые негамильтоновы системы // Функциональный анализ и его приложения. 1986. Т. 20. Вып. 4. С. 65–66.
11. Богоявленский О.И. Интегрируемые случаи динамики твердого тела и интегрируемые системы на сферах S^n // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 899–915.

Югославия

Поступила в редакцию
23.V.1996

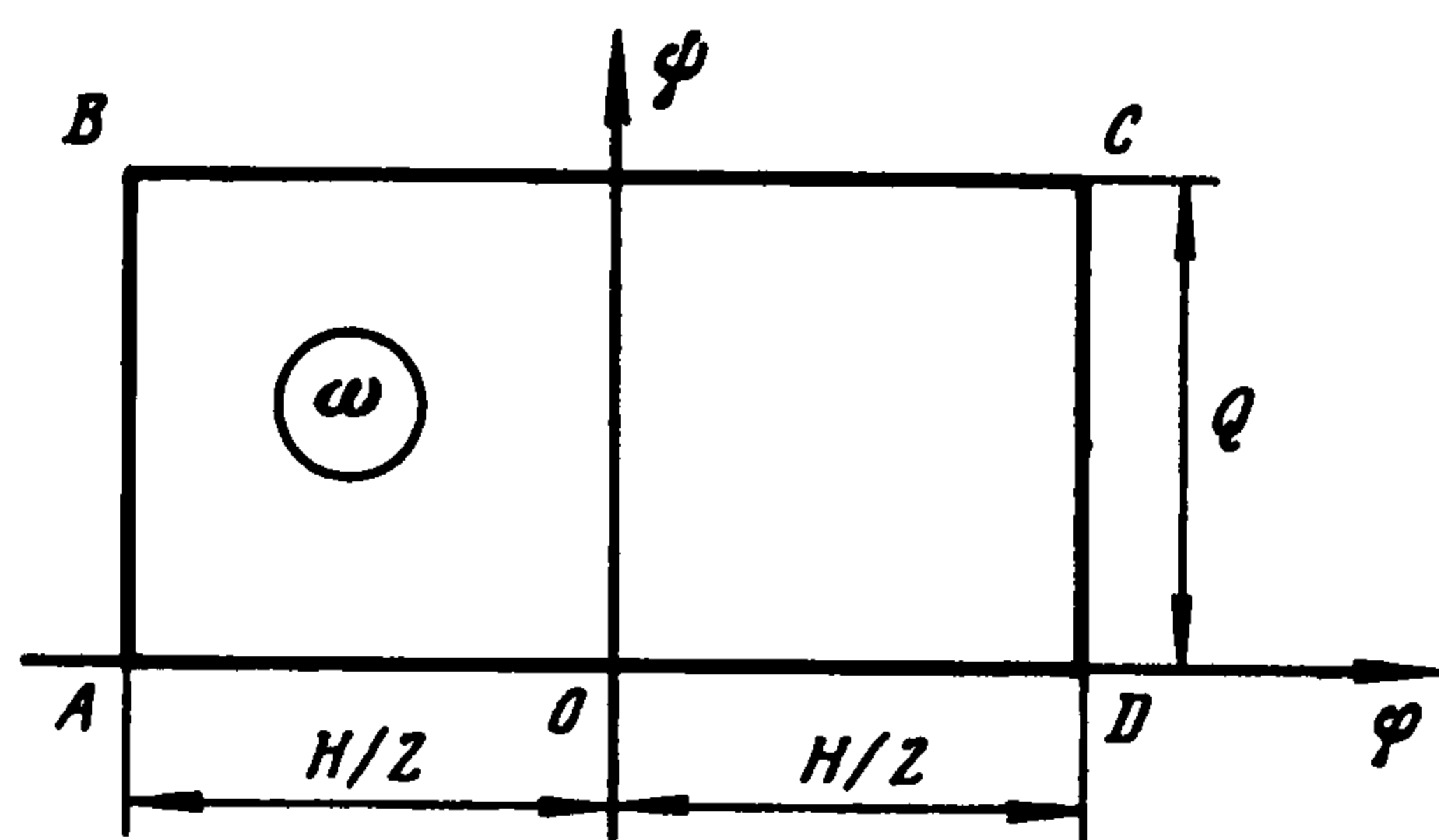
УДК 532.546

© 1998 г. Э.Н. Береславский

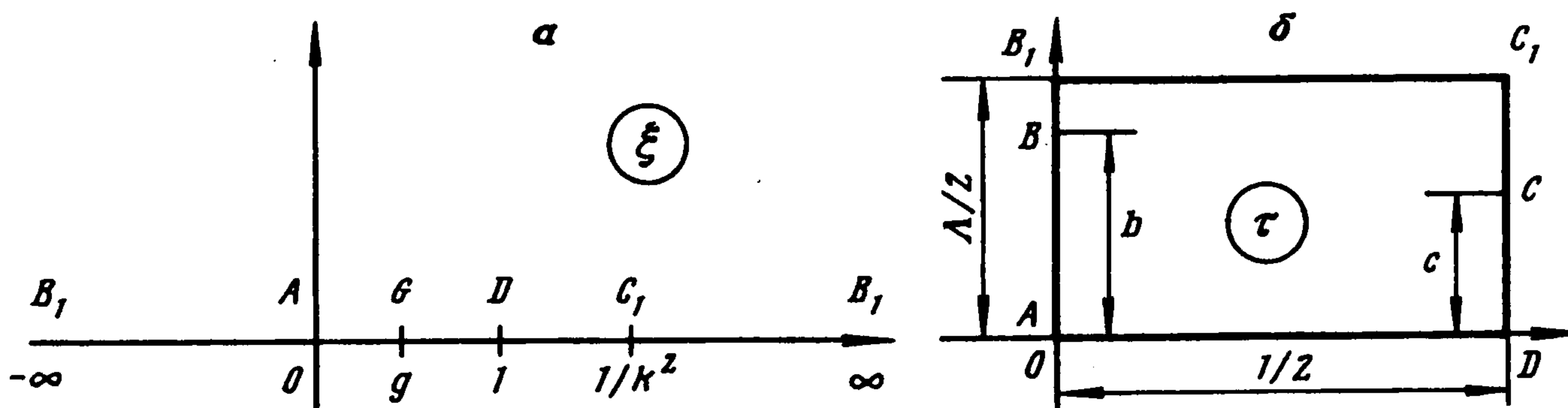
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДЗЕМНОГО КОНТУРА ЗАГЛУБЛЕННОГО ФЛЮТБЕТА С УЧАСТКОМ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СОЛЕННЫХ ПОДПОРНЫХ ВОД

В рамках теории двумерной фильтрации строится подземный контур заглубленного флютбета с участком постоянной скорости в случае, когда при движении воды под флютбетом имеется слой покоящейся соленой воды. Решение соответствующей краевой задачи осуществляется методом П.Я. Полубариновой-Кочиной [1] с использованием результатов автора [2]. Приводятся результаты численных расчетов и дается анализ влияния основных определяющих параметров модели на форму и размеры подземного контура флютбета. Отмечаются частные и предельные случаи: схема с водоупором [3], случай незаглубленного флютбета [2] и обтекание шпунта [4, 5].

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское установившееся течение пресных вод плотности ρ_1 под водонепроницаемым подземным контуром заглубленного флютбета, когда на некоторой глубине имеется слой соленой воды плотности ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$), находящейся над непроницаемой толщей соли. Предполагается, что грунт однороден и движение подчиняется закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации $\kappa = \text{const}$. Пусть контур основания флютбета BC состоит из двух вертикальных отрезков BB_1 и CC_1 и криволинейного участка B_1C_1 с постоянной величиной скорости обтекания $|v| = v_0$ (фиг. 1). Действующий на сооружение напор H , длины вертикальных отрезков d_1 и d_2 , а также ширина флютбета $l = l_1 + l_2$, левый конец которого фиксируется в точке B , считаются заданными, границы верхнего и нижнего бьефов AB и CD горизонтальны.



Фиг. 2



Фиг. 3

применением формулы Кристоффеля–Шварца, ниже предлагается воспользоваться теорией построения отображающих функций на основе решений уравнений класса Фукса [1,7–12]. Конформное отображение реализуется при этом элементарными средствами непосредственно в замкнутой форме (через специальные, а в ряде случаев – элементарные функции) простой и удобной для практических целей; все необходимые постоянные отображения попутно определяются в ходе построения решения.

В рассматриваемом случае для осуществления конформного отображения верхней полуплоскости ξ на круговой пятиугольник плоскости w (фиг. 4) требуется построить два линейно независимых интеграла следующего линейного дифференциального уравнения второго порядка класса Фукса с пятью особыми точками [1, 6, 10]:

$$y'' + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi-1} + \frac{1}{\xi-k^{-2}} \right) - \frac{1}{\xi-g} \right] y' + \frac{\lambda_1 \xi + \lambda_0}{4\xi(\xi-1)(\xi-k^{-2})(\xi-g)} y = 0 \quad (2.2)$$

Постоянная k , прообраз $\xi = g$ вершины разреза G , а также дополнительные параметры λ_0 и λ_1 при постановке задачи остаются неопределенными.

Замена переменных

$$\xi = \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) \quad (2.3)$$

где sn – эллиптический синус Якоби при модуле k [14], переводит верхнюю полуплоскость ξ в прямоугольник $0 < \operatorname{Re}\tau < 1/2$, $0 < \operatorname{Im}\tau < \Lambda/2$ плоскости τ (фиг. 3, б), где $\Lambda = K'/K$, $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1-k^2}$, $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Используя разработанную автором [12, 13] методику интегрирования уравнений рассматриваемого типа, получим

$$y_1 = \vartheta_4(\tau - \alpha) / \vartheta_4(\tau), \quad y_2 = \vartheta_4(\tau + \alpha) / \vartheta_4(\tau) \quad (2.4)$$

где α – некоторая подходящая постоянная, ϑ_4 – тета-функция.

Функция, совершающая конформное отображение прямоугольника плоскости τ на заданный круговой пятиугольник плоскости w , должна выражаться через отношение

линейных комбинаций решений y_1 и y_2 . Если составить такие комбинации и воспользоваться соответствием точек A, D, B_1 и C_1 на плоскостях τ и w , то найдем при $v_0 < \rho$

$$w(\tau) = v_0 \frac{\vartheta_4(\tau + \alpha) - \vartheta_4(\tau - \alpha)}{e^{-i\pi\beta} \vartheta_4(\tau + \alpha) + e^{i\pi\beta} \vartheta_4(\tau - \alpha)} \quad (2.5)$$

$$\alpha = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \sqrt{(\rho + v_0)/(\rho - v_0)}, \quad \beta = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \left(v_0 / \sqrt{\rho^2 - v_0^2} \right)$$

Определяя показатели функций (2.1) около особых точек [1, 10] и учитывая соотношения (2.3) и (2.5), приходим к зависимостям

$$\frac{d\omega}{d\tau} = f(\tau), \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{f(\tau)}{w(\tau)}, \quad f(\tau) = \frac{2HK(k) \operatorname{dn}(2K\tau, k)}{K(\lambda) \sqrt{\Delta_B \Delta_C}} \quad (2.6)$$

$$\Delta_B = (1 - B^2) \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) + B^2, \quad \Delta_C = 1 - (1 - k'^2 C^2) \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)$$

$$B = \operatorname{sn}(2Kb, k'), \quad C = \operatorname{sn}(2Kc, k')$$

$$\lambda = \sqrt{1 - (k'BC)^2}$$

Фильтрационный расход при этом определяется по формуле

$$Q = \pi K(\lambda') / K(\lambda) \quad (2.7)$$

Можно проверить, что функции (2.1), определенные на основании соотношений (2.6) и (2.3), удовлетворяют граничным условиям (1, 2), записанным в терминах упомянутых функций, и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

3. Частные и предельные случаи, критический режим.

1°. *Случай $\rho = \infty$ (схема с водоупором).* Остановимся прежде всего на предельном случае $\rho = \infty$ ($\rho_2 = \infty$), который в рамках исследуемой фильтрационной модели можно трактовать как "затвердевание" соленых вод. Линия раздела превращается в горизонтальный водоупор, в чем можно убедиться, исходя из равенства (2.5), используя выражение для β и учитывая, что при $\rho = \infty$ на AD

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{f(\tau)}{v_0} \frac{\vartheta_4(\tau + 1/4) + \vartheta_4(\tau - 1/4)}{\vartheta_4(\tau + 1/4) - \vartheta_4(\tau - 1/4)} \quad (3.1)$$

и, следовательно, $(\partial y / \partial \varphi)_{AD} = 0$, $y_{AD} = \text{const}$.

Переходя в (3.1) от тета-функций к эллиптическим [14], после некоторых преобразований и при помощи подстановки

$$\xi = \frac{2\lambda_1 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) - (1 + \lambda_1)}{\lambda_1 [1 + \lambda_1 - 2\operatorname{sn}^2(2K\tau, k)]}, \quad \lambda_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}$$

выражение (3.1) приведем к виду, совпадающему с уравнением (7.8) книги [1] (с. 189), если в последнем положить $\alpha = 0$.

2°. *Случай $d_1 = d_2 = 0$ (незаглубленный флютбет).* Для этого достаточно в (2.6) положить $B = C = 1$, тогда $\Delta_B = 1$, $\Delta_C = \operatorname{dn}(2K\tau, k)$, $\lambda = k$, $f(\tau) = 2H$ и приходим к результатам работы [2].

3°. *Случай $v_0 = \rho$.* Совершая предельный переход $v_0 \rightarrow \rho$ в выражении для $dz/d\tau$ в (2.6) с учетом формул для α и β и раскрывая возникающую неопределенность, найдем

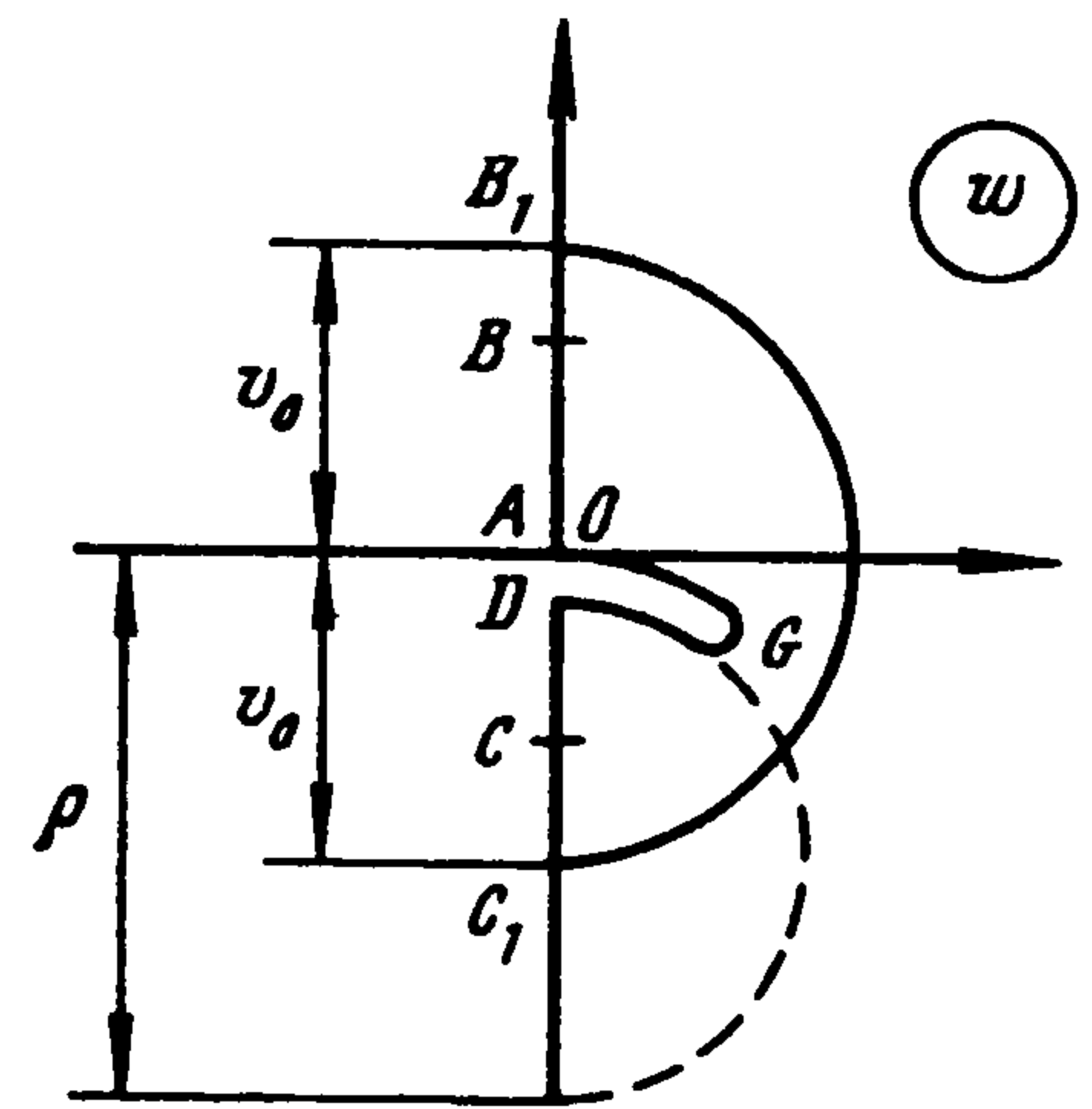
$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{f(\tau)}{v_0} \left(i - \frac{\pi}{K(k)Z[K(2\tau - 1)]} \right) \quad (3.2)$$

где Z – дзета-функция [14].

4°. Случай $\nu_0 > \rho$. Преобразуя выражение для $dz/d\tau$ в (2.6) применительно к соотношению $\nu_0 > \rho$, получим

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{if(\tau) e^{-\pi\beta} \vartheta_3(\tau + \alpha i) - e^{\pi\beta} \vartheta_3(\tau - \alpha i)}{\nu_0 \vartheta_3(\tau + \alpha i) - \vartheta_3(\tau - \alpha i)} \quad (3.3)$$

$$\alpha = \pi^{-1} \operatorname{arth} \sqrt{(\nu_0 - \rho) / (\nu_0 + \rho)}, \quad \beta = \pi^{-1} \operatorname{arth} \left(\sqrt{\nu_0^2 - \rho^2} / \nu_0 \right)$$



Фиг. 4

5°. Случай $\nu_0 = \infty$ (обтекание шпунта). Если в плоскости w точки B_1 и C_1 сливаются на бесконечности (фиг. 4), то прямоугольник плоскости τ вырождается полуполосой $0 < \operatorname{Re}\tau < 1/2, 0 < \operatorname{Im}\tau < \infty$ (фиг. 3, б). Переходя в (3.3) к пределу при $k \rightarrow 0$, найдем

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{2H}{\rho \sqrt{\Delta_B \Delta_C}} \frac{A + e^{2\pi i}}{\sin 2\pi\tau} \quad (3.4)$$

где на этот раз $\Delta_B = (1 - B^2) \sin^2 \pi\tau + B^2, \Delta_C = 1 - (1 - C^2) \sin^2 \pi\tau, B = \sin \pi b, C = \sin \pi c, A$ — некоторая постоянная, регламентирующая положение вершины разреза G в плоскости w .

Уравнение (3.4) совпадает (с точностью до обозначений) с уравнением (2.3) работы [4], если в последнем положить $t = -\cos 2\pi\tau, C = A/\rho, n = 1/A$. Если, кроме того, точки B и C сливаются, что соответствует случаю точечного шпунта, то из (3.4) получим зависимость, которая совпадает с уравнением (2.5) работы [5], если в последнем положить $\gamma = 0$.

6°. Критический режим. Если правый конец линии раздела упирается в границу нижнего бьефа, то часть рассола выходит на его поверхность. В плоскости w этому случаю соответствует исчезновение разреза и вырождение кругового пятиугольника в треугольник (при $\nu_0 \leq \rho$) или четырехугольник (при $\nu_0 > \rho$), ограниченный двумя аполлониевыми окружностями и ортогональными к ним отрезками прямых. Решение задачи получается предельным переходом при $k' \rightarrow 0$ из (2.6) (в первом случае) и из (3.3) при $\alpha = \Lambda/2$ — (во втором).

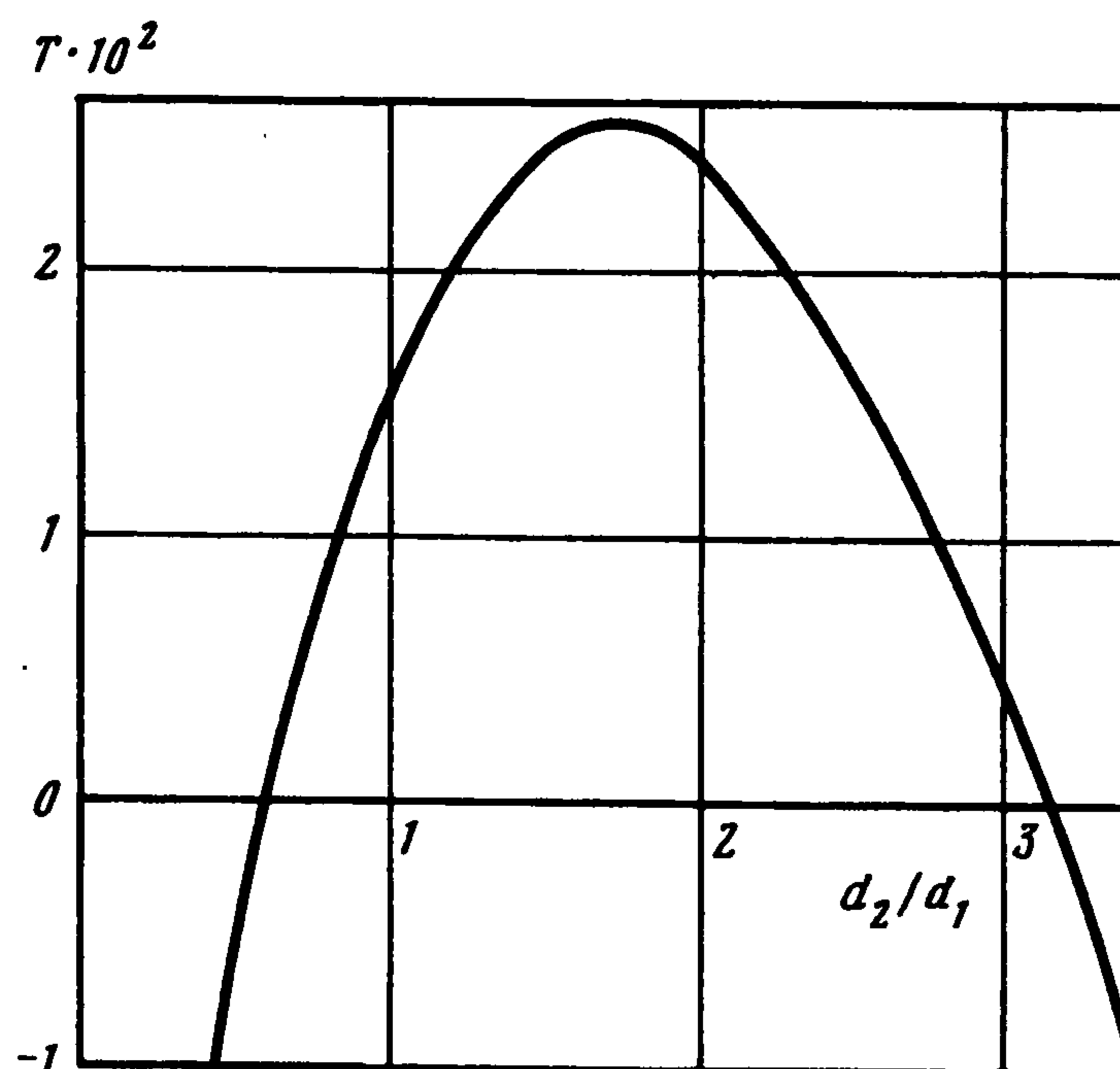
Таблица 1

$H \cdot 10^2$	$d \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^4$	$T \cdot 10^4$	ρ	$d \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^4$	$T \cdot 10^4$
15,0	427	480	-1038	0,1	518	708	-800
16,0	564	757	176	0,3	585	768	564
16,75	664	1283	914	∞	609	773	1035

4. Расчет схемы течения и анализ численных результатов. Основные представления (2.6), (3.1)–(3.4) содержат три неизвестные постоянные: модель k (или постоянную A в (3.4)) и два параметра отображения B и C , для определения которых служат ширина флютбета l и длины вертикальных отрезков d_1 и d_2 . Данные уравнения, интегрируемые для различных участков границы области τ , приводят к параметрическим уравнениям соответствующих участков схемы. Численным путем проверяется монотонность функций, входящих в эти уравнения, и таким образом устанавливается однозначная разрешимость системы относительно неизвестных постоянных.

Таблица 2

$\nu_0 \cdot 10^4$	$d \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^4$	$T \cdot 10^4$	l	$d \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^4$	$T \cdot 10^4$
805	564	757	176	1,23	645	1559	1024
835	483	600	-556	1,32	538	688	-95
855	428	518	-1125	1,40	440	495	-1334



Фиг. 5

После нахождения искомым параметров определению подлежат расход Q , глубина флютбета d , разность T отметок верхнего и нижнего бьефов, а также рассчитываются координаты точек подземного контура флютбета B_1C_1 и линии раздела AD .

На фиг. 1 изображен подземный контур флютбета и линия раздела, рассчитанные при $h_0 = 1,0$; $H = 0,16$; $l = 1,3$; $\rho = 0,175$; $\nu_0 = 0,0805$; $d_1 = 0,1$ и $d_2 = 0,11$. В табл. 1–3 сведены результаты расчетов по выяснению влияния величин H , ρ , ν_0 , l , d_1 и d_2 на фильтрационные характеристики d , Q и T (отрицательные величины T означают, что граница нижнего бьефа

Таблица 3

d_1	$d \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^4$	$T \cdot 10^4$	d_2	$d \cdot 10^3$	$Q \cdot 10^4$	$T \cdot 10^4$
0,05	565	812	173	0,05	585	823	-34
0,2	577	649	329	0,2	524	659	219
0,4	669	502	1188	0,4	441	499	-253

поднимается выше оси абсцисс). В каждом разделе таблиц варьируется один из параметров, а остальные фиксируются при тех же значениях, что и на фиг. 1. Анализ зависимости искомым характеристик от указанных параметров сводится к следующему.

1°. Обращает на себя внимание одинаковый характер зависимостей между фильтрационными характеристиками и параметрами H и ρ : по мере увеличения плотности ρ_2 соленых вод и действующего напора H граница нижнего бьефа опускается, при этом глубина флютбета и, следовательно, расход Q возрастают. Так, при увеличении H от 0,15 до 0,1675 величины d и Q изменяются в 1,5 и 2,7 раза соответственно. Кроме того, с уменьшением параметра ρ от 0,3 до 0,1 глубина h_2 уменьшается в 3,7 раза, так что отношение h_1/h_2 возрастает с 1,7 до 9,0. Таким образом, увеличению напора или уменьшению плотности соленых вод сопутствует большая степень отжима.

2°. Напротив, с уменьшением параметров ν_0 , l и d_2 флютбет сильно заглубляется, а расход увеличивается. Например, с уменьшением ширины l от 1,4 до 1,23 глубина d увеличивается в 1,3 раза, а расход – в 1,7 раза. Так что подтверждается один существенный вывод [3]: чем короче флютбет, тем он должен быть толще при одном и том же значении скорости ν_0 .

3°. Наиболее значительным изменениям подвергается величина T : при возрастании скорости ν_0 всего на 6,2% параметр T изменяется в 6,4 раза.

4°. Специальный интерес представляет влияние параметров d_1 и d_2 на картину течения. При изменении d_1 и d_2 от 0,05 до 0,4, расход, который, как следует из табл. 3, практически совпадает для одинаковых значений этих параметров, уменьшается на 38–39%. При этом глубина флютбета d в первом случае возрастает на 18%, а во втором – убывает на 24%. Что

касается величины T , то в большей степени на нее оказывает влияние параметр d_2 . Так, для значений $d_2 = 0,05; 0,2$ и $0,4$ имеем соответственно $T = -0,0034; 0,0219$ и $-0,0253$, т.е. изменения носят немонотонный характер. На фиг. 5 дан график зависимости T от d_2/d_1 .

Любопытно отметить, что рассматриваемая задача, как показывают расчеты, может приводить к весьма интересной схеме течения, связанной с тем, что вблизи вертикальной стенки C_1C при $x < l_2$, $u_{B_1C_1}(x) > 0$. Последнее можно трактовать как случай флютбета, низовая часть которого снабжена "обтекаемым" шпунтом или зубом, и, следовательно, возникает схема, подобная отмеченной ранее и изображенной на рис. 139, б книги [1].

Для таких случаев разность отметок верхнего и нижнего бьефов может оказаться весьма значительной. Так, при $l = 1,4$ получаем $T = -0,1334$ (см. второй раздел табл. 2), так что $|T/d_2| = 1,21$. С увеличением ширины флютбета l это отношение растет.

Автор благодарит П.Я. Кочину и Н.Н. Кочину за советы и постоянное внимание к работе и А.Р. Цицкишвили за обсуждение результатов и критические замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (N7A000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Береславский Э.Н. Построение контура постоянной скорости основания гидросооружения при фильтрации двух жидкостей разной плотности // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 342–346.
3. Кочина И.Н., Полубаринова-Кочина П.Я. О применении плавных контуров основания гидротехнических сооружений // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 57–66.
4. Павлов А.Т. Установившееся движение грунтовых вод при двух слоях жидкости различной плотности // ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 2/3. С. 221–228.
5. Брагинская В.А. Некоторые задачи фильтрации в анизотропном грунте // ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 2/3. С. 229–240.
6. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 406 с.
7. Полубаринова-Кочина П.Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1938. № 3. С. 371–395.
8. Полубаринова-Кочина П.Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (случай трех особых точек) // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 3. С. 329–350.
9. Полубаринова-Кочина П.Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (число особых точек больше трех) // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 5–6. С. 579–602.
10. Полубаринова-Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1942. 143 с.
11. Кочина П.Я., Береславский Э.Н., Кочина Н.Н. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч. 1: Препринт № 567. М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996.
12. Береславский Э.Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 3. С. 296–301.
13. Береславский Э.Н. О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник // Изв. вузов. Математика. 1980. № 5. С. 3–7.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. 299 с.