УДК 531.36

© 1998 г. В.И. Драгович

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ БИЛЛИАРДА БИРКГОФА ВНУТРИ ЭЛЛИПСА

Рассматриваются интегрируемые возмущения, зависящие только от координат биллиарда Биркгофа внутри эллипса. Полностью описывается класс интегрируемых потенциалов, являющихся многочленами по x, y, x^{-1} и y^{-1}.

1. Постановка задачи. Обычно биллиард Биркгофа описывает частицу, которая движется свободно внутри некоторой области на плоскости. При столкновении с границей этой области, которая является выпуклой, происходит абсолютно упругий удар с равными углами между траекторией и границей до и после удара. Такое поведение на границе будем называть *биллиардным законом.*

Существует ряд интегрируемых биллиардных задач (см. [1, 2] и цитируемую там литературу). Самая известная из них – задача внутри эллипса. Исследованием интегрируемых возмущений этой и ей родственных интегрируемых задач (задача о геодезических на эллипсоиде, задача Неймана, задача Кеплера) занимались еще классики [3]. В последнее время возобновился интерес к таким проблемам [4–9].

Будем заниматься вопросом интегрируемости задач о движении частицы внутри эллипса под действием потенциальной силы, с поведением на границе в соответствии с биллиардным законом. В.В. Козлов [4] привел семейство интегрируемых потенциалов

$$V=k(x^2+y^2)+\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\beta}{y^2}+\frac{\gamma_1}{r_1}+\frac{\gamma_2}{r_2},\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma_i\in R$$

где r_i – расстояния до фокусов эллипса. Ниже предлагается метод, который позволяет, используя идеи В.В. Козлова, значительно расширить этот класс потенциалов. Получаем два семейства потенциалов: 1) в виде полиномов, 2) в виде лорановых полиномов. Полиномиальные потенциалы встречались в сходных задачах и раньше [10, 11], однако потенциалы в виде лорановых полиномов являются существенно новыми и имеют нетривиальную динамику. Предлагаемый подход позволяет найти в явном виде все интегрируемые потенциалы определенного типа, а также доказать, что других потенциалов в этом классе не существует.

2. Однопараметрические решения. Задача о свободном движении частицы внутри эллипса с полуосями a и b и биллиардным законом на границе имеет хорошо известный дополнительный интеграл

$$F_0=\frac{\dot{x}^2}{a}+\frac{\dot{y}^2}{b}-\frac{(\dot{x}y-x\dot{y})^2}{ab}$$

Метод В.В. Козлова заключался в нахождении потенциалов V, для которых существует дополнительный интеграл вида $F=F_0+f$, где f – функция, зависящая только от координат. Выбор возмущения, которое зависит только от координат, гарантирует сохранение F при ударе о границу. Требование, чтобы величина F сохранялась также и внутри эллипса (где уравнения движения $\ddot{x}=-V_x$, $\ddot{y}=-V_y$), приводит к условию совместности для V, которое описывается следующим уравнением:

$$\lambda V_{xy}+3(yV_x-xV_y)+(y^2-x^2)V_{xy}+xy(V_{xx}-V_{yy})=0,\quad \lambda=a-b \tag{2.1}$$

Будем искать решения уравнения (2.1) в виде лорановых полиномов по x, y, т.е.

$$V(x,\ y,\ \lambda)=\sum_{s\ge m,n\ge k}a_{m,n}(\lambda)x^m y^n,\quad k,\ s\in Z \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем систему разностных уравнений

$$\lambda mna_{n,m}=(n+m)(ma_{n-2,m}-na_{n,m-2}) \tag{2.3}$$

В дальнейшем будем полагать, что $\lambda \neq 0$. Под степенью элемента $a_{m,\,n}$ будем понимать сумму $m + n$. Из (2.3) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Если a_{m_0,n_0} – элемент минимальной степени, отличный от нуля, то $n_0 = 0$ или $m_0 = 0$.

Обозначим через m_0 минимальную степень элементов, отличных от нуля. Тогда все элементы, кроме a_{0,m_0} и $a_{m_0,0}$, равны нулю и хотя бы один из элементов a_{0,m_0}, $a_{m_0,0}$ отличен от нуля.

Лемма 2. Элементы a_{2k,m_0} выражаются через a_{0,m_0} по формуле

$$a_{2k,m_0} = \frac{(2+m_0)(3+m_0)\ldots(2k+m_0)}{(2\lambda)^k k!} a_{0,m_0}, \quad k \in N$$

Предположим, что $m_0 < 0$. Из леммы 1 и 2 вытекает следующее предложение.

Предложение 1. а) если среди элементов $a_{m,\,n}$, $mn \neq 0$ есть хотя бы один отличный от нуля, то $m_0 = -2k$, для некоторого $k \in N$;

б) $a_{2k+1,0} = a_{0,2k+1} = 0$ для любого $k \in Z$.

Пусть

$$V_k(x,\ y,\ \lambda,\ \alpha) = \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i \sum_{s=1}^{k-i-1} U_{kis}(x,\ y,\ \lambda,\ \alpha) + \alpha y^{-2k}$$

$$W_k(x,\ y,\ \lambda,\ \alpha) = \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{s=1}^{k-i-1} (-1)^s U_{kis}(y,\ x,\ \lambda,\ \alpha) + \alpha x^{-2k}$$

$$U_{kis}(x,\ y,\ \lambda,\ \alpha) = \binom{s+i-1}{i} \frac{[1-(k-i)][2-(k-i)]\ldots[s-(k-i)]}{\lambda^{s+i} s!} \alpha x^{2s} y^{-2k+2i}$$

Теорема 1. Для любого α функции $V_k(x, y, \lambda, \alpha)$ и $W_k(x, y, \lambda, \alpha)$ являются решениями уравнения (2.1) вида (2.2) с ненулевым элементом минимальной степени $a_{0,m_0} = \alpha$ и $a_{m_0,0} = \alpha$ соответственно.

При доказательстве теоремы 1 использована следующая лемма.

Лемма 3. Если $a(1, n) = 1 = a(k, 1)$ и $a(n, m) = a(n-1, m) + a(n, m-1)$, то

$$a(n,\ m) = \binom{n+m-2}{n-1}$$

Отметим, что $V_k(x, y, \lambda, \alpha) = W_k(y, x, -\lambda, \alpha)$ согласно общему свойству уравнений (2.1): если $\varphi(x, y)$ – решение уравнения (2.1) с параметром λ, то $\varphi(y, x)$ – решение уравнения (2.1) с параметром $-\lambda$. Под потенциалом V_1 и W_1 следует понимать потенциалы В.В. Козлова α/x^2 и β/y^2.

Пример 1. При $V_2(x, y, \lambda) = (\lambda - x^2)/(\lambda y^4)$ дополнительный интеграл задается формулой

$$F = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} - \frac{(\dot{x}y - \dot{y}x)^2}{ab} + \frac{2x^4 + (2b-4a)x^2 + 2y^2x^2}{\lambda aby^4}$$

Потенциалы, описанные в теореме 1, зависят от одного параметра – первого ненулевого элемента $a_{-2k,\,0}$ или $a_{0,\,-2k}$. Будем их называть однопараметрическими потенциалами. В дальнейшем займемся исследованием более сложных потенциалов.

3. Многопараметрические потенциалы. *Лемма* 4. Если потенциал V имеет среди элементов вида $a_{0,\,k}$ и $a_{l,\,0}$ отличный от нуля элемент, а именно $a_{0,\,-2k_1} = \alpha_1, \ldots,$ $a_{0,\,-2k_s} = \alpha_s$, то

$$V = \sum_{i=1}^{s} V_{k_i}(x,\ y,\ \alpha_i)$$

Потенциалы, о которых идет речь в лемме 4, будем называть s-параметрическими.

Пример 2. Приводим пример двухпараметрического потенциала

$$W_3^2 = \alpha x^{-6} + \frac{2\alpha}{\lambda} y^2 x^{-6} + \beta x^{-4} + \frac{\alpha}{\lambda^2} y^4 x^{-6} + \frac{\beta\lambda + \alpha}{\lambda^2} y^2 x^{-4}$$

Обозначим через $A_k = \{V_k(x, y, \alpha) | \alpha \in R\}$ и $B_k = \{W_k(x, y, \alpha) | \alpha \in R\}$ пространства потенциалов, в которых $m_0 < 0$. Существуют и потенциалы, для которых $m_0 > 0$. Пусть C_l – пространство решений уравнения (2.1), которые являются многочленами по x, y степени не больше $2l$. Их общий член задается формулой

$$a_{2n,\ 2m} = \sum_{t=1}^{m} \frac{(-1)^{m-t}\binom{n+m-t-1}{n-1}(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}{n!\lambda^{n+m-t}} a_{0,2t} +$$

$$+\sum_{t=1}^{n} \frac{(-1)^{m}\binom{n+m-t-1}{m-1}(1+n)(2+n)\ldots(m+n)}{m!\lambda^{n+m-t}} a_{2t,0}, \quad n+m \le l$$

а начальные условия $a_{0,\,2t}$, $a_{2t,\,0}$, где $1 \le t \le l$, определяются из системы линейных уравнений

$$2ma_{2(l-m),\ 2m} = (2(l-m)+2)a_{2(l-m)+2,2m+2}, \quad 0 \le m \le l-1$$

Пример 3. При $l = 2$ получаем

$$V = \beta x^2 + \alpha y^2 + \frac{2}{\lambda}(\alpha-\beta)x^2y^2 + \frac{(\alpha-\beta)}{\lambda}(x^4+y^4)$$

Пример 4. Пусть $l = 3$, $a_{0,\,2} = \alpha$, $a_{2,\,0} = \beta$, $a_{4,\,0} = \gamma$. Тогда

$$a_{2,2} = \frac{2}{\lambda}(\alpha-\beta), \quad a_{0,4} = \frac{2}{\lambda}(\alpha-\beta) - \gamma$$

$$a_{0,6} = a_{6,0} = \frac{1}{\lambda^2}(\alpha-\beta) - \frac{\gamma}{\lambda}, \quad a_{4,2} = a_{2,4} = 3a_{0,6}$$

В качестве механической реализации этих примеров можно рассматривать биллиард как систему, в которой частица единичной массы движется внутри эллипса в гравитационном поле. Распределение масс внутри эллипса определяется плотностью ρ, которая задается, в соответствии с уравнением Пауссона в виде

$$\rho(x, y) = \Delta V(x, y)/(4\pi)$$

Окончательно заключаем, что справедлива следующая

Теорема 2. Пространство решений R уравнения (2.1) вида (2.2) описывается формулой

$$R = \oplus_{k=1}^{\infty} A_k + \oplus_{k=1}^{\infty} B_k + \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l$$

4. Заключительные замечания. 1°. Рассмотрим теперь случай $\lambda = 0$.

Тогда система (2.3) приводится к виду

$$(n+m)(ma_{n-2,m} - na_{n,m-2}) = 0$$

При $n = -m$ получаем решения вида $V_m(x, y) = \alpha x^{-m-2}y^m$ и $W_m(x, y) = \alpha x^m y^{-m-2}$.

Иначе говоря, если $a_{m_0,n_0} \ne 0$ – элемент минимальной степени, то $m_0 = 0$ (или $n_0 = 0$) и $n_0 = 2k$, $k \in N$ (или $m_0 = 2k$, $k \in N$). Приводим общую формулу для $a_{n,\,m}$ в этом случае

$$a_{2k-2s,\ 2s} = \frac{k(k-1)\ldots(k-s+1)}{s!} a_{2k,\ 0}, \quad s = 1, \ldots, k-1$$

2°. В случае задачи о геодезических на эллипсоиде и задачи о биллиардах внутри эллипсоида можно применить аналогичные методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
2. *Ramani A., Kalliterakis A., Grammaticos B., Dorizzi B.* Integrable curvilinear billiards // Phys. Lett. A. 1986. V. 115. N 1. 2. P. 25–28.

3. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Совр. проб. математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
4. *Козлов В.В.* Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 3–9.
5. *Козлов В.В., Федоров Ю.Н.* Интегрируемые системы на сфере с потенциалами упругого взаимодействия // Мат. заметки. 1994. Т. 56. Вып. 3. С. 74–79.
6. *Kozlov V., Harin A.* Kepler's problem in constant curvature spaces // Celest. Mech. and Dynam. Astronom. 1992. V. 54. N 4. P. 393–399.
7. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
8. *Панов А.А.* Эллиптический бильярд с ньютоновским потенциалом // Мат. заметки. 1994. Т. 55. Вып. 3. С. 139–140.
9. *Grammaticos B., Papageorgiou V.* Integrable bouncing-ball models // Phys. Rev. A., 1988. V. 37. N 12. P. 5000–5001.
10. *Веселов А.П., Веселова Л.Е.* Потоки на группах Ли с неголономной связью и интегрируемые негамильтоновые системы // Функциональный анализ и его приложения. 1986. Т. 20. Вып. 4. С. 65–66.
11. *Богоявленский О.И.* Интегрируемые случаи динамики твердого тела и интегрируемые системы на сферах S^n // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 899–915.

Югославия

Поступила в редакцию
23.V.1996

УДК 532.546

© 1998 г. **Э.Н. Береславский**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДЗЕМНОГО КОНТУРА ЗАГЛУБЛЕННОГО ФЛЮТБЕТА С УЧАСТКОМ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СОЛЕНЫХ ПОДПОРНЫХ ВОД

В рамках теории двумерной фильтрации строится подземный контур заглубленного флютбета с участком постоянной скорости в случае, когда при движении воды под флютбетом имеется слой покоящейся соленой воды. Решение соответствующей краевой задачи осуществляется методом П.Я. Полубариновой-Кочиной [1] с использованием результатов автора [2]. Приводятся результаты численных расчетов и дается анализ влияния основных определяющих параметров модели на форму и размеры подземного контура флютбета. Отмечаются частные и предельные случаи: схема с водоупором [3], случай незаглубленного флютбета [2] и обтекание шпунта [4, 5].

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское установившееся течение пресных вод плотности ρ_1 под водонепроницаемым подземным контуром заглубленного флютбета, когда на некоторой глубине имеется слой соленой воды плотности $\rho_2 (\rho_2 > \rho_1)$, находящейся над непроницаемой толщей соли. Предполагается, что грунт однороден и движение подчиняется закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации $\varkappa = \text{const}$. Пусть контур основания флютбета BC состоит из двух вертикальных отрезков BB_1 и CC_1 и криволинейного участка B_1C_1 с постоянной величиной скорости обтекания $|v| = v_0$ (фиг. 1). Действующий на сооружение напор H, длины вертикальных отрезков d_1 и d_2, а также ширина флютбета $l = l_1 + l_2$, левый конец которого фиксируется в точке B, считаются заданными, границы верхнего и нижнего бьефов AB и CD горизонтальны.