УДК 531.36

© 1998 г. Мэй Фунсян

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА И ТЕОРИЯ ПУАССОНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Показано, что теория Пуассона для голономных консервативных систем частично распространяется на неголономные системы.

Известные приемы интегрирования уравнений неголономной динамики опираются на законы сохранения [1], понижение порядка уравнений [2], теорему Нётер [3, 4], обобщение метода Гамильтона – Якоби [5], метод поля [6, 7], метод инвариантной меры [8] и др.

Теория Пуассона для голономных консервативных систем основана на том, что гамильтоновы уравнения обладают алгебраической структурой, откуда следует, в частности, что скобка Пуассона двух первых интегралов будет третьим первым интегралом. В противоположность этому уравнению движения неголономных систем алгебраической структуры не имеют.

Ниже доказывается, что при выполнении некоторых условий можно ввести обобщенную скобку Пуассона для неголономных систем и частично распространить на них теорию Пуассона.

1. Пусть положение механической системы определено обобщенными координатами $q_s (s = 1, \ldots , n)$ и система стеснена идеальными неголономными связями (по Четаеву)

$$f_\beta(q_s, \dot q_s, t) = 0, \quad \beta = 1, \ldots, g \tag{1.1}$$

Уравнения движения системы [9] запишем в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \Lambda_s, \quad \Lambda_s = \Lambda_s(q, \dot q, t) = \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s} \tag{1.2}$$

Пусть

$$\tilde Q_s = Q_s + \Lambda_s = Q_s' + Q_s'', \quad Q_s' = \frac{\partial U}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q_s}$$

Тогда уравнения (1.2) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s'', \quad L = T + U \tag{1.3}$$

Они могут служить для описания голономной системы с n степенями свободы, с обобщенными силами Q_s'' и функцией Лагранжа L. Если начальные условия удовлетворяют уравнениям (1.1), то решение уравнения (1.3) дает движение неголономной системы (1.1), (1.2) [9].

2. Рассмотрим алгебраическую структуру уравнений (1.3). Пусть

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot q_s}, \quad H = \sum_{s=1}^{n} p_s \dot q_s - L \tag{2.1}$$

$$Q_s'' = -\sum_{k=1}^{n} \Omega_{sk} \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \Omega_{sk} = \mathrm{diag}(\Omega_{11}, \ldots, \Omega_{nn}) \tag{2.2}$$

Уравнения (1.3) принимают вид

$$\dot{a}^{\mu} - S^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} = 0, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, 2n \tag{2.3}$$

$$a^{\mu} = \begin{cases} q_{\mu}, & \mu = 1, \ldots, n \\ p_{\mu-n}, & \mu = n+1, \ldots, 2n \end{cases}, \quad S^{\mu\nu} = \omega^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}$$

$$\omega^{\mu\nu} = \begin{Vmatrix} O_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & O_{n\times n} \end{Vmatrix}, \quad T^{\mu\nu} = \begin{Vmatrix} O_{n\times n} & O_{n\times n} \\ O_{n\times n} & (-\Omega_{kk})_{n\times n} \end{Vmatrix}$$

Всюду по повторяющимся индексам производится суммирование.

Производную по времени некоторой функции $A(a^{\mu})$ представим в виде алгебраического произведения

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}} S^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} \triangleq A \circ H \tag{2.4}$$

Это произведение обладает следующими свойствами:

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C, \quad (A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C$$

$$(\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B) = \alpha (A \circ B)$$

Следовательно, оно обладает встроенной алгебраической структурой. Однако в общем случае оно не задает алгебру Ли.

Определяем новое произведение

$$[A, B] \triangleq A \circ B - B \circ A \tag{2.5}$$

которое кососимметрично и удовлетворяет тождеству Якоби

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

Следовательно, уравнения движения (1.3) обладают структурой, допускающей алгебру Ли. В частном случае, когда $T^{\mu\nu} = 0$, уравнения движения (1.3) обладают алгебраической структурой алгебры Ли, т.е. они гамильтоновы.

3. Перейдем к интегрированию уравнений движения (1.3), используя их алгебраическую структуру и теорию Пуассона. Предположим, что $I(a^{\mu}, t) = \mathrm{const}$ – первый интеграл уравнений (2.3). Тогда, используя определение (2.4), имеем тождество

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^{\mu}} S^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} = \frac{\partial I}{\partial t} + I \circ H = 0 \tag{3.1}$$

представляющие собой обобщенное условие Пуассона для первого интеграла уравнений (2.3).

Подстановкой $I = H$ в (3.1) получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} + H \circ H = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial a^{\mu}} T^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} = \frac{\partial H}{\partial t} + \lambda_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s \tag{3.2}$$

Если

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} = \dot{q}_s k_{\beta} f_{\beta} \tag{3.3}$$

то правая часть равенства (3.2) обращается в нуль. Следовательно, справедлива следующая теорема [10].

Теорема 1. Если функция Гамильтона H не зависит от времени и уравнения неголономных связей (1.1) однородны относительно обобщенных скоростей, то функция Гамильтона будет первым интегралом системы (2.3).

Взяв частную производную по t от обеих частей равенства (3.1), в случае, когда $S^{\mu\nu}$ и H не зависят от t, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)+\frac{\partial I}{\partial t}\circ H=0$$

Аналогичное равенство справедливо для $\partial^2 I/\partial t^2, \partial^3 I/\partial t^3$, ... Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Если система (2.3) имеет первый интеграл, зависящий от времени, а H и $S^{\mu\nu}$ от времени не зависят, то $\partial I/\partial t, \partial^2 I/\partial t^2, \partial^3 t/\partial t^3 ...$, – первые интегралы системы (2.3).

Взяв частную производную по a^p от обеих частей равенства (3.1), аналогично предыдущему устанавливает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. Если система (2.3) имеет первый интеграл, содержащий a^p, а H и $S^{\mu\nu}$ не содержат a^p, то $\partial I/\partial a^p, \partial^2 I/\partial a^{p^2}, \partial^3 I/\partial a^{p^3}$ – первые интегралы системы (2.3).

В общем случае произведение (2.4) не образует скобку Пуассона или обобщенную скобку Пуассона и теорема Пуассона в общем случае к системе (2.3) неприменима.

4. *Примеры применения теорем* 1–3. В примере Аппеля функция Лагранжа и уравнение связи имеют вид

$$L=\tfrac{1}{2}m(\dot q_1^2+\dot q_2^2+\dot q_3^3)-mgq_3, \quad C^2\dot q_3^2=\dot q_1^2+\dot q_2^2$$

Уравнения (1.3) имеют вид

$$m\ddot q_1=-\xi C^2\dot q_3\dot q_1, \quad m\ddot q_2=-\xi C^2\dot q_3\dot q_2, \quad m\ddot q_3=-mg+\xi C^4\dot q_3^2$$

$$\xi=mg/(\dot q_1^2+\dot q_2^2+C^2\dot q_3^2)$$

Имеем

$$p_s=\partial L/\partial\dot q_s, \quad s=1,2,3$$

$$H=\sum_{s=1}^{3}p_s\dot q_s-L=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+mgq_3$$

Отсюда при помощи тождества (2.2) получим

$$\Omega_{11}=\eta C^2p_3, \quad \Omega_{22}=\eta C^2p_3, \quad \Omega_{33}=-\eta C^4p_3$$

$$\eta=m^2g/(p_1^2+p_2^2+C^4p_3^2)$$

В уравнениях (2.3) полагаем $n=3$. Из теоремы 1 следует, что функция Гамильтона H будет первым интегралом:

$$H=\frac{1}{2m}\{(a^4)^2+(a^5)^2+(a^6)^2\}+mga^3=h=\text{const}$$

Отметим, что рассматриваемая система имеет первый интеграл

$$I_1=\{a^1-(a^4/a^5)a^2\}^2=\text{const}$$

а H и $S^{\mu\nu}$ не содержит a^1, a^2. Согласно теореме 3 получим три первых интеграла

$$I_2=\partial I_1/\partial a^1=\{a^1-(a^4/a^5)a^2\}=\text{const}$$

$$I_3=\partial I_1/\partial a^2=2\{a^1-(a^4/a^5)a^2\}(-a^4/a^5)=\text{const}$$

$$I_4=\partial^2 I_1/\partial a^1\partial a^2=-2a^4/a^5=\text{const}$$

Отметим, что рассматриваемая система имеет первый интеграл

$$I_5=(a^6+\zeta t)^2=\text{const}, \quad \zeta=g/(C^2+1)$$

а H и $S^{\mu\nu}$ не зависят от t. Используя теорему 2, получим первый интеграл

$$I_6=\partial I_5/\partial t=2(a^6+\zeta t)\zeta=\text{const}$$

В примере В.С. Новоселова [9] функция Лагранжа и уравнение неголономной связи имеют вид

$$L = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad f = \dot{q}_1 + bt\dot{q}_2 - bq_2 + t = 0$$

Уравнения движения (1.3) дают

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_s} - \frac{\partial L'}{\partial q_s} = 0, \quad s = 1,2$$

$$L' = L + \frac{1}{b}\dot{q}_1 \operatorname{arctg} bt + \frac{1}{2b}\dot{q}_2 \ln(1 + b^2t^2)$$

В уравнениях (2.3) полагаем $n = 2$, причем

$$a^1 = q_1, \quad a^2 = q_2, \quad a^3 = p_1 = \dot{q}_1 + \frac{1}{b}\operatorname{arctg} bt$$

$$a^4 = p_2 = \dot{q}_2 + \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2t^2)$$

$$H = \frac{1}{2}\left[p_1 - \frac{1}{b}\operatorname{arctg} bt\right]^2 + \frac{1}{2}\left[p_2 - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2t^2)\right]^2$$

Очевидно, что к этой системе применима теория Пуассона.

Работа выполнена при финансовой поддержке Китайского фонда естественных наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В., Колесников Н.Н.* О теоремах динамики // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 28–33.
2. *Mei Fengxiang*. Extension of Whittaker equations to nonholonomic mechanical systems // Appl. Math. Mech. 1984. V. 5. N 1. P. 61–66.
3. *Li Ziping*. Transformation propety of constrained system // Acta Physica Sinica. 1981. V. 30. N 12. P. 1659–1671.
4. *Liu Duan*. Noether's theorem and its inverse of nonholonomic nonconservative dynamical system // Science in China. Ser. A. 1991. V. 34. N 4. P. 419–429.
5. *Rumyantsev V.V., Sumbatov A.S.* On the problem of a generalization of the Hamilton–Jacobi method for nonholonomic systems // ZAMM. 1978. V. 58. N 11. P. 477–481.
6. *Mei Fengxiang*. A field method for solving the equations of motion of nonholonomic systems // Acta Mechanica Sinica. 1989. V. 5. N 3. P. 260–268.
7. *Мэй Фунсян*. Об одном методе интегрирования уравнений движения неголономных систем со связями высшего порядка // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 691–695.
8. *Козлов В.В.* О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 538–545.
9. *Новоселов В.С.* Вариационные методы в механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. 72 с.
10. *Румянцев В.В.* К динамике лагранжевых реономных систем со связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 540–550.

Китай

Поступила в редакцию
5.VI.1996