УДК 532.526

© 1998 г. С.С. Григорян, Э.Ф. Хайретдинов

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ РАСТЕКАНИЕ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ИСКРИВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассматривается неустановившееся растекание тонкого слоя несжимаемой вязкой жидкости по непроницаемой искривленной поверхности, происходящее под действием силы тяжести. Решение возникающей краевой задачи сведено к решению задачи Коши для уравнений с меньшим числом независимых переменных.

1. Движение жидкости целесообразно рассматривать в специальной криволинейной ортогональной системе координат. Поверхность, по которой растекается жидкость, выберем в качестве начальной координатной поверхности. От нее по нормали к ней будем отсчитывать координату y. На начальной координатной поверхности, где $y = 0$, введем криволинейные координаты x, z таким образом, чтобы кривые $x = \text{const}$ и $z = \text{const}$ образовывали ортогональную сетку. В точке с координатами x_0, z_0 этой поверхности будут определены радиусы кривизны $R_x(x_0, z_0)$ и $R_z(x_0, z_0)$ координатных линий $z = z_0$ и $x = x_0$ соответственно [1]. Центры нормальной кривизны указанных координатных линий лежат на нормали к поверхности склона, поэтому R_x и R_z – значения координаты y для соответствующего центра кривизны.

Заметим, что для того, чтобы такую систему координат можно было использовать, необходимо дополнительно предполагать, что любой из центров нормальной кривизны находится вне рассматриваемого слоя. Таким образом, уже при введении системы координат принимается, что толщина слоя невелика.

Обозначим через l_x, l_y и l_z коэффициенты Ламе для координатных линий $y = \text{const}$, $z = \text{const}$; $x = \text{const}$, $z = \text{const}$; $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ соответственно. В рассматриваемом случае они будут представляться формулами

$$l_x = 1 + \frac{y}{R_x(x,z)}, \quad l_y = 1, \quad l_z = 1 + \frac{y}{R_z(x,z)} \tag{1.1}$$

Обозначим через $\mathbf{o}_x$, $\mathbf{o}_y$, $\mathbf{o}_z$ орты координатного триэдра в рассматриваемой точке для выбранной системы координат, через u, v, w – компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$, через t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{xy}, t_{yz}, t_{xz} – компоненты тензора напряжений, через γ_x, γ_y, γ_z – компоненты орта вектора ускорения силы тяжести. Заметим, что параметры γ_x, γ_y, γ_z должны рассматриваться как известные функции координат x, y, z. Для выбранной системы координат положение координатного триэдра не изменяется вдоль координатной линии $x = \text{const}$, $z = \text{const}$ (т.е. вдоль нормали к поверхности склона), поэтому параметры γ_x, γ_y, γ_z не зависят от координаты y; кроме того, $\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = 1$.

С использованием известных формул и равенств для ортогональных криволинейных координат уравнения движения несжимаемой жидкости в выбранной системе координат запишем в следующем виде:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(l_y l_z u)+\frac{\partial}{\partial y}(l_z l_x v)+\frac{\partial}{\partial z}(l_x l_y w)=0 \qquad (1.2)$$

уравнения изменения количества движения в проекциях на направления ортов $\mathbf{o}_x$, $\mathbf{o}_y$, $\mathbf{o}_z$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{l_x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v}{l_y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{w}{l_z}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{uv}{l_x l_y}\frac{\partial l_x}{\partial y}+\frac{uw}{l_x l_z}\frac{\partial l_x}{\partial z}-\frac{v^2}{l_x l_y}\frac{\partial l_y}{\partial x}-\frac{w^2}{l_x l_z}\frac{\partial l_z}{\partial x}\right)= \qquad (1.3)$$

$$=g\rho\gamma_x+\frac{1}{l_x l_y l_z}\left(\frac{\partial}{\partial x}(l_y l_z t_{xx})+\frac{\partial}{\partial y}(l_x l_z t_{xy})+\frac{\partial}{\partial z}(l_y l_x l_{xz})+\right.$$

$$\left.+l_z\frac{\partial l_x}{\partial y}t_{xy}+l_y\frac{\partial l_x}{\partial z}t_{xz}-l_z\frac{\partial l_y}{\partial x}t_{yy}-l_y\frac{\partial l_z}{\partial x}t_{zz}\right) \quad (xyz,uvw)$$

(выписываем только первое из них, остальные два получаются круговой перестановкой обозначений x, y, z и u, v, w). Здесь t – время, ρ – плотность жидкости.

Компоненты тензора скоростей деформации в криволинейной ортогональной системе координат представляются формулами

$$e_{xx}=2\left(\frac{1}{l_x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v}{l_x l_y}\frac{\partial l_x}{\partial y}+\frac{w}{l_x l_z}\frac{\partial l_x}{\partial z}\right)$$

$$e_{xy}=\frac{l_x}{l_y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{l_x}+\frac{l_y}{l_x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{v}{l_y} \quad (xyz,uvw) \qquad (1.4)$$

(невыписанные уравнения получаются круговой перестановкой).

Будем рассматривать случай, когда тензоры напряжений и скоростей деформации связаны линейной зависимостью

$$t_{ik}+p\delta_{ik}=\mu e_{ik} \quad (i,k=x,y,z) \qquad (1.5)$$

Здесь

$$p=-\frac{1}{3}(t_{xx}+t_{yy}+t_{zz}),\quad \delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}$$

μ – постоянный коэффициент вязкости жидкости.

Уравнения (1.2), (1.3), (1.5) при учете равенств (1.4) образуют замкнутую систему нелинейных уравнений в частных производных. Ее решение должно удовлетворять граничным условиям на обтекаемой поверхности и на свободной поверхности жидкости. Приведем их в ортогональных криволинейных координатах.

На обтекаемой поверхности должно выполняться очевидное условие

$$y=0:\ v=0 \qquad (1.6)$$

В некоторых случаях можно принять (следуя Стоксу) условие прилипания

$$y=0:\ u=0,\ w=0 \qquad (1.7)$$

Но могут быть случаи, когда на обтекаемой поверхности надо задавать условие скольжения. Обозначим через $\mathbf{t}_s$ вектор касательного напряжения на обтекаемой поверхности, через p_n величину нормального давления: $p_n=-t_{yy}$, $t_s=\sqrt{t_{xy}^2+t_{zy}^2}$. Одним из возможных является сделанное еще Ньютоном предположение, что касательное напряжение на обтекаемой поверхности пропорционально скорости скольжения жидкости на ней:

$$y = 0\colon \mathbf{t}_s = \rho c_* \mathbf{v} \tag{1.8}$$

Здесь c_* – материальная константа, характеризующая скольжение среды по обтекаемой поверхности. Условие (1.8) равносильно двум скалярным условиям

$$y = 0\colon\ \rho c_* u = t_{xy},\ \ \rho c_* w = t_{yz} \tag{1.9}$$

В некоторых других случаях характер взаимодействия движущейся среды с обтекаемой поверхностью требует считать касательное напряжение на ней постоянным [2]

$$y = 0\colon\ t_{xy}^2 + t_{zy}^2 = \tau_*^2 \tag{1.10}$$

Здесь τ_* – задаваемая физическая постоянная. В случае пространственного движения естественно при этом предположить, что

$$y = 0\colon\ t_{xy} = \tau_* \frac{u}{q},\ \ t_{zy} = \tau_* \frac{w}{q},\qquad q = \sqrt{u^2 + w^2} \tag{1.11}$$

На свободной поверхности жидкости $y = h(x, z, t)$ задается кинематическое условие

$$y = h(x,z,t)\colon\ \frac{\partial h}{\partial t} = v - \frac{u}{l_x}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{w}{l_z}\frac{\partial h}{\partial z} \tag{1.12}$$

Это уравнение вместе с начальным условием

$$t = 0\colon h(x, z, 0) = h^{(0)}(x, z) \tag{1.13}$$

и служит для определения свободной поверхности.

В дальнейшем для обозначения компонент вектора скорости частиц, находящихся на свободной поверхности, будут использоваться обозначения u_1, v_1, w_1.

Граничные условия на свободной поверхности сводятся к следующим: касательные напряжения на ней обращаются в нуль, а нормальное напряжение равно атмосферному давлению p_a с обратным знаком:

$$y = h(x,z,t)\colon\ t_{sx} = t_{sy} = t_{sz} = 0,\ \ t_n = -p_a$$

Здесь t_n – величина вектора $\mathbf{t}_n$ нормального напряжения на свободной поверхности, t_{sx}, t_{sy}, t_{sz} – компоненты вектора $\mathbf{t}_s$ касательных напряжений на свободной поверхности.

Обозначим через $\mathbf{t}$ полный вектор напряжения на свободной поверхности с компонентами t_x, t_y, t_z, через $\mathbf{n}$ – орт нормали к свободной поверхности с компонентами n_x, n_y, n_z. Имеем

$$t_{sx} = t_x - t_n n_x,\ \ t_{sy} = t_y - t_n n_y,\ \ t_{sz} = t_z - t_n n_z$$

Граничные условия для напряжений на свободной поверхности представляются в виде

$$y = h(x,z,t)\colon\ (t_{xx} + p_a)n_x + t_{xy}n_y + t_{xz}n_z = 0 \quad (xyz) \tag{1.14}$$

(еще два условия получаются циклической перестановкой индексов).

Уравнение (1.12) может быть преобразовано к виду, в котором оно практически используется при численном решении задачи о движении среды. Для этого проинтегрируем уравнение неразрывности (1.2) по y от 0 до $h(x, z, t)$ и получим

$$v_1 = -\frac{1}{l_x l_z}\int_0^h \left(\frac{\partial (l_z u)}{\partial x} + \frac{\partial (l_x w)}{\partial z}\right) dy$$

Так как

$$\int_0^h \frac{\partial (l_z u)}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h l_z u dy - l_z u_1 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (xz, uw)$$

представим уравнение (1.12) в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{l_x l_z}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) \tag{1.15}$$

$$\left(U(x,z,t) = \int_0^h l_z u dy, \;\; W(x,z,t) = \int_0^h l_x w dy\right)$$

Решение задачи должно также удовлетворять начальным условиям, которые представляются в виде

$$t = 0{:}\;\; h = h^{(0)}(x,z), \;\; u = u^{(0)}(x,z), \;\; w = w^{(0)}(x,z) \tag{1.16}$$

где $h^{(0)}(x, z)$, $u^{(0)}(x, z)$, $w^{(0)}(x, z)$ – заданные функции.

2. В общем виде система уравнений (1.2)–(1.5) чрезмерно трудна для решения. Но когда толщина растекающегося слоя мала по сравнению с его протяженностью на обтекаемой поверхности, кривизна которой не имеет частых резких изменений (функции $h(x, z, t)$, $R_x(x, z)$ и $R_z(x, z)$ должны быть непрерывными и кусочно-гладкими), уравнения движения жидкости могут быть значительно упрощены, и это позволяет существенно продвинуться при решении задачи. Здесь возникает некоторая аналогия с теорией пограничного слоя при обтекании поверхности высокоскоростным потоком вязкой жидкости, но в рассматриваемом случае толщина слоя конечна и вполне точно определяется при решении задачи.

Для выявления возможности упомянутых упрощений перейдем в уравнениях (1.2)–(1.5) и граничных условиях (1.6)–(1.14) к безразмерным переменным по формулам

$$x = L_*\xi, \;\; z = L_*\zeta, \;\; y = h_*\eta, \;\; u = u_*\bar{u}, \;\; v = v_*\bar{v}, \;\; w = u_*\bar{w}$$

$$t = \frac{L_*}{u_*}\tau, \;\; R_x = L_*\rho_1(\xi,\zeta), \;\; R_z = L_*\rho_3(\xi,\zeta)$$

$$l_x = l_1 = 1 + \frac{h_*}{L_*}\frac{\eta}{\rho_1}, \;\; l_y = l_1 = 1, \;\; l_z = l_3 = 1 + \frac{h_*}{L_*}\frac{\eta}{\rho_3}$$

$$h_0(x,z) = h_*\bar{h}_0(\xi,\zeta), \;\; h(x,z,t) = h_*\bar{h}(\xi,\zeta,\tau) \tag{2.1}$$

$$p = \rho g h_*\psi, \;\; p_a = \rho g h_*\bar{p}_a, \;\; t_{xx} = \rho g h_*\tau_{11}, \;\; t_{yy} = \rho g h_*\tau_{22}, \;\; t_{zz} = \rho g h_*\tau_{33}$$

$$t_{xy} = \rho g h_*\tau_{12}, \;\; t_{xz} = \rho g h_*\tau_{13}, \;\; t_{yz} = \rho g h_*\tau_{23}, \;\; s = \rho g h_*\sigma$$

$$\sigma = \left(\frac{1}{2}(\psi + \tau_{11})^2 + (\psi + \tau_{22})^2 + (\psi + \tau_{33})^2 + 2(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)\right)^{1/2}$$

Здесь L_* – характерный масштаб протяженности слоя вдоль обтекаемой поверхности, h_* – его характерная толщина, u_*, v_* – характерные значения для касательной и нормальной к поверхности компонент скорости для рассматриваемого течения соответственно.

Значения L_*, h_*, μ известные величины из постановки задачи, а значения u_* и v_* заранее неизвестны, в их выборе существует некоторый произвол. Будем рассматривать такие течения, для которых параметр $\varepsilon = h_*/L_*$ можно считать малой величиной по сравнению с единицей.

Суть упрощений, связанных с тонкостью растекающегося слоя, состоит в том, что в уравнениях, представленных в безразмерной форме, будут отброшены члены, исчезающие при $\varepsilon \to 0$.

Параметры Ламе представляются в виде

$$l_x = l_1 = 1 + \varepsilon \frac{\eta}{\rho_1}, \quad l_z = l_3 = 1 + \varepsilon \frac{\eta}{\rho_3}, \quad l_y = l_2 = 1$$

С точностью до величин $O(\varepsilon^2)$ имеют место равенства

$$l_1 l_3 = 1 + \varepsilon \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_3} \right), \quad \frac{1}{l_1} = \left(1 + \varepsilon \frac{\eta}{\rho_1} \right)^{-1} = 1 - \varepsilon \frac{\eta}{\rho_1}$$

и так далее.

Поскольку $v = 0$ при $y = 0$, то из рассмотрения уравнения неразрывности (1.2) заключаем, что следует принять $v_* = \varepsilon u_*$. Само уравнение неразрывности в безразмерной форме, если пренебречь членами $O(\varepsilon)$, приведется к виду

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} = 0 \tag{2.2}$$

Компоненты тензора скоростей деформации с точностью до $O(\varepsilon^2)$ приводятся к виду

$$e_{xx} = 2\varepsilon \frac{u_*}{h_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \quad e_{yy} = 2\varepsilon \frac{u_*}{h_*} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}, \quad e_{zz} = 2\varepsilon \frac{u_*}{h_*} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta}$$

$$e_{xy} = \frac{u_*}{h_*} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} - \varepsilon \frac{\bar{u}}{\rho_1} \right), \quad e_{zy} = \frac{u_*}{h_*} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} - \varepsilon \frac{\bar{w}}{\rho_3} \right), \quad e_{xz} = \varepsilon \frac{u_*}{h_*} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} \right)$$

Представляя формулы (1.5) в безразмерных переменных, получим

$$\begin{gathered}
\tau_{11} = -\psi + \Lambda \varepsilon \hat{\tau}_{11}, \quad \tau_{22} = -\psi + \Lambda \varepsilon \hat{\tau}_{22}, \quad \tau_{33} = -\psi + \Lambda \varepsilon \hat{\tau}_{33} \\
\tau_{12} = \Lambda \hat{\tau}_{12}, \quad \tau_{23} = \Lambda \hat{\tau}_{23}, \quad \tau_{13} = \varepsilon \Lambda \hat{\tau}_{13} \\
\hat{\tau}_{12} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} - \varepsilon \frac{\bar{u}}{\rho_1}, \quad \hat{\tau}_{23} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} - \varepsilon \frac{\bar{w}}{\rho_3}, \quad \hat{\tau}_{13} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \\
\hat{\tau}_{11} = 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \quad \hat{\tau}_{22} = 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}, \quad \hat{\tau}_{33} = 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} \quad \left(\Lambda = \frac{\mu u_*}{\rho g h_*^2} \right)
\end{gathered} \tag{2.3}$$

С использованием формул (2.3) с точностью до величин $O(\varepsilon)$ система уравнений (1.3) представляется в виде

$$\begin{gathered}
F \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} \right) - \gamma_1(\xi, \zeta) - \Lambda \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} = 0 \\
F \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} \right) - \gamma_3(\xi, \zeta) - \Lambda \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} = 0 \\
F \left(\frac{\bar{u}^2}{\rho_1} + \frac{\bar{w}^2}{\rho_3} \right) + \gamma_2(\xi, \zeta) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} = 0 \quad \left(F = \frac{u_*^2}{g L_*} = \varepsilon \frac{u_*^2}{g h_*} \right)
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Для тонкого слоя с точностью до величин $O(\varepsilon)$ имеем $\sigma = \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2}$.

Преобразуем граничные условия. Учитывая, что направляющие косинусы нормали к свободной поверхности с точностью до величин $O(\varepsilon^2)$ представляются в виде

$$\nu_x = -\varepsilon \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi}, \quad \nu_y = 1, \quad \nu_z = -\varepsilon \frac{\partial \bar{h}}{\partial \zeta}$$

и принимая во внимание равенства (2.3), граничные условия (1.14) на свободной поверхности в безразмерных переменных с той же точностью запишем в виде

$$\eta = \bar{h}(\xi,\zeta,\tau): \ \bar{p}_a = \Psi - \Lambda\varepsilon\left(\tau_{22} + \tau_{12}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi} + \tau_{23}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \zeta}\right)$$

$$\tau_{12} - \varepsilon(\bar{p}_a - \psi)\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi} = 0, \quad \tau_{23} - \varepsilon(\bar{p}_a - \psi)\frac{\partial \bar{h}}{\partial \zeta} = 0$$

Из этих равенств следует, что с точностью до величин $O(\varepsilon)$

$$\eta = \bar{h}(\xi,\zeta,\tau): \ \tau_{12} = \tau_{23} = 0, \ \psi = \bar{p}_a \tag{2.5}$$

Запишем условие (1.12) в безразмерной форме с точностью до величин $O(\varepsilon)$

$$\eta = \bar{h}(\xi,\zeta,\tau): \ \bar{v} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau} + \bar{u}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi} + \bar{w}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \zeta} \tag{2.6}$$

Уравнение (1.15) в безразмерных переменных с той же точностью представится в виде

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \zeta} = 0, \quad \bar{U} = \int_0^{\bar{h}} \bar{u}\,d\eta, \quad \bar{W} = \int_0^{\bar{h}} \bar{w}\,d\eta \tag{2.7}$$

Запись граничных условий (1.6)–(1.10) на обтекаемой поверхности в безразмерной форме не вызывает трудностей.

Равенства, возникающие в результате предельного перехода при $\varepsilon \to 0$, образуют систему уравнений "тонкого" слоя, которая и служит объектом дальнейшего рассмотрения. Безразмерные параметры F и Λ, в зависимости от особенностей рассматриваемой задачи, могут иметь различные значения.

Случай, когда $\Lambda \simeq 1$, а $F \ll 1$, соответствует медленным ("ползущим") течениям и достаточно хорошо изучен. Возникающие при этом уравнения использовались, например, для построения теории смазочного слоя [3, 4], для описания движения изотермических ледников [5] и оползней.

Случай, когда $F \simeq 1$, является наиболее общим, при этом малость параметра Λ, если даже она имеет место, не приводит к дальнейшим упрощениям полученных уравнений, так как он служит в этих уравнениях коэффициентом при старших производных от неизвестных функций.

Вернемся к первоначальным обозначениям переменных и постоянных параметров задачи. Система упрощенных уравнений представится при этом в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - g\gamma_x(x,z) - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\,\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}-g\gamma_z(x,z)-\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \qquad (2.8)$$

$$\frac{u^2}{R_1}+\frac{w^2}{R_3}+g\gamma_y(x,z)-\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

Здесь $\nu=\mu/\rho$ кинематический коэффициент вязкости.

Граничные условия на свободной поверхности запишутся в виде

$$y=h(x,z,t)\colon\ t_{xy}=t_{yz}=0,\ v=\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+w\frac{\partial h}{\partial z},\ \ p=p_a \qquad (2.9)$$

Уравнение (1.15) представится в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial z}=0,\ \ U=\int_0^h u dy,\ \ W=\int_0^h w dy \qquad (2.10)$$

Запись граничных условий (1.6)–(1.10) на обтекаемой поверхности и начальных условий (1.16) не претерпевает изменений. Удобнее граничные условия на обтекаемой поверхности по концепции Ньютона представить в виде

$$y=0\colon\ v=0,\ \ u=l\frac{\partial u}{\partial y},\ \ w=l\frac{\partial w}{\partial y}\qquad \left(l=\frac{\nu}{c_*}\right)$$

Заметим, что полученная система из четырех уравнений (2.8) и граничных условий (2.9) и (1.6)–(1.10) расщепляется на замкнутую систему *из первых трех уравнений* (2.8) *с граничными условиями* (2.9), *исключая последнее, условия* (1.16) *и одного из условий* (1.7), (1.9) или (1.11), и последнее из уравнений (2.8) с последним из граничных условий (2.9), решение которого может быть построено после того, как найдено решение системы, выделенной курсивом.

В дальнейшем для полученных уравнений будет рассматриваться случай, соответствующий плоской задаче, когда зависимые переменные не зависят от координаты z и число их уменьшается за счет тождественного обращения в нуль величин w и t_{yz}. Впрочем, данное ограничение несущественно, так как основные результаты, полученные для плоской задачи, без особых затруднений могут быть распространены на трехмерный случай.

3. Для плоской задачи уравнения растекания представляются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}=g\alpha(x)+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (3.1)$$

Здесь $\alpha(x)$ – заданная функция, которая определяется углом между обтекаемой поверхностью и горизонтальной плоскостью.

Для решения системы (3.1) должны выполняться физические и кинематические граничные условия на свободной и на обтекаемой поверхностях – границах потока. Условимся в дальнейшем выделять значения параметров потока в точках его границ с помощью нижних индексов: единицы – на свободной поверхности, нуля – на обтекаемой поверхности. При этом граничные условия на свободной поверхности запишутся в виде

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1=0,\ v_1=\frac{\partial h}{\partial t}+u_1\frac{\partial h}{\partial x} \qquad (3.2)$$

Граничные условия на обтекаемой поверхности с использованием гипотезы Ньютона представляются в виде

$$v_0 = 0,\ \ u_0 = l\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \quad \left(l = \frac{\mu}{\rho c_*}\right) \tag{3.3}$$

(l – физическая константа с размерностью длины).

При использовании условия прилипания граничные условия имеют вид

$$v_0 = 0,\ u_0 = 0 \tag{3.4}$$

В предположении постоянства касательного напряжения на обтекаемой поверхности граничные условия имеют вид

$$v_0 = 0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \omega_* \quad \left(\omega_* = \frac{\tau_*}{\mu}\right) \tag{3.5}$$

Ниже дается подробное изложение метода построения решений рассматриваемых уравнений, основные положения которого были сообщены ранее [6], а также доложены на конференции "Современные проблемы математики и механики", посвященной 175-летию П.Л. Чебышева (МГУ, 14–19 мая 1996 г.); содержание доклада опубликовано в [7].

Интегрируя уравнения (3.1) по толщине слоя, получим интегральные условия, которым должно удовлетворять искомое решение

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0,\ \ \frac{\partial U}{\partial t} = hg\alpha(x) - \frac{\partial U_1}{\partial x} - \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \tag{3.6}$$

$$\left(U = \int_0^h u dy,\ \ U_1 = \int_0^h u^2 dy\right)$$

Умножая первое уравнение (3.1) на u и интегрируя по координате y в пределах $[0, h]$, получим другое интегральное условие

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = 2g\alpha(x)U - \frac{\partial U_2}{\partial x} - 2\nu\Omega - 2\nu u_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \tag{3.7}$$

$$\left(U_2 = \int_0^h u^3 dy,\ \ \Omega = \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy\right)$$

Будем искать решение системы (3.1), представляя продольную скорость $u(t, x, y)$ в виде суммы

$$u = b_\gamma(t,x)g_\gamma(\eta) + a_\gamma(t,x)f_\gamma(\eta) \tag{3.8}$$

(по индексу γ производится суммирование, $\gamma = 0, 1,\ldots, N$; $N > 2$). Здесь

$$\eta = \frac{y}{h},\ \ a_0 = u_0,\ \ a_1 = h\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0,\ \ a_2 = h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0,\ldots, a_N = h^N\left(\frac{\partial^N u}{\partial y^N}\right)_0$$

$$b_0 = u_1,\ \ b_1 = h\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1,\ \ b_2 = h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_1,\ldots, b_N = h^N\left(\frac{\partial^N u}{\partial y^N}\right)_1$$

$g_i(\eta)$ и $f_i(\eta)$ ($i = 0, 1, 2,\ldots, N$) – заданные функции единственной переменной η, удовлетворяющие на краях области $0 < y < h(t, x)$ условиям

$$f_{i,i} = g_{i,i} = 1;\ \ f_{i,k} = g_{i,k} = 0\ \ (k \neq i),\ \ \varphi_{i,k} = \gamma_{i,k} = 0 \quad (0 \leqslant i,k \leqslant N) \tag{3.9}$$

Здесь использованы обозначения

$$f_{i,k}=f_i^{(k)}(0),\ \ \varphi_{i,k}=f_i^{(k)}(1)\ \ (f_{i,0}=f_i(0),\ \ \varphi_{i,0}=f_i(1))$$

$$g_{i,k}=g_i^{(k)}(1),\ \ \gamma_{1,k}=g_1^{(k)}(0)\ \ (g_{1,0}=g_1(1),\ \ \gamma_{1,0}=g_1(0))$$

(заметим, что $(\partial u/\partial y)_1=0$, $(\partial^3 u/\partial y^3)_1=0$, поэтому можно принять $g_1(\eta)\equiv 0$, $g_3(\eta)\equiv 0$).

Когда граничное условие на обтекаемой поверхности задано в вид (3.3) или (3.5) (первый случай), предполагаются выполненными условия

$$A_0=\int_0^1 f_0(\eta)d\eta=O\left(\frac{1}{2}\right),\ \ A_1=\int_0^1 g_0(\eta)d\eta=O\left(\frac{1}{2}\right)$$

для функций $f_0(\eta)$ и $g_0(\eta)$ (запись $A=O\left(\frac{1}{2}\right)$) означает, что для величины A, удовлетворяющей условиям $0<A<1$, неверно соотношение $A\ll 1$), а когда оно задано в виде (3.4) (*второй случай*), предполагаются выполненными условия

$$A_0=\int_0^h f_1(\eta)d\eta=O\left(\frac{1}{2}\right),\ \ A_1=\int_0^h g_0(\eta)d\eta=O\left(\frac{1}{2}\right)$$

для функций $f_1(\eta)$ и $g_0(\eta)$ (заметим, что $a_0\equiv 0$, поэтому можно положить $f_0\equiv 0$ в этом случае).

Потребуем также, чтобы для функций $f_i(\eta)$ и $g_i(\eta)$ $(i>1)$ выполнялись условия

$$\int_0^1 |f_i(\eta)|d\eta\ll 1,\ \ \int_0^1 |g_i(\eta)|d\eta\ll 1 \tag{3.10}$$

в *первом* из указанных случаев и условия

$$\int_0^1 |f_{i+1}(\eta)|d\eta\ll 1,\ \ \int_0^1 |g_i(\eta)|d\eta\ll 1 \tag{3.11}$$

во *втором* (в терминах [7], соответствующие функции $f_i(\eta)$ и $g_i(\eta)$ образуют при этом множество функций незначительного наполнения).

Можно утверждать, что для функций, удовлетворяющих условиям (3.9), условия (3.10) или (3.11) будут выполняться автоматически для достаточно больших значений параметра N.

Рассмотрим первый случай.

Функционалы $U\{t,x\}$, $U_1\{t,x\}$, $U_2\{t,x\}$ и $\Omega_1\{t,x\}$ с большой точностью (игнорируются интегралы от функций с незначительным наполнением) представятся в виде

$$U=h(A_0u_0+A_1u_1)$$

$$U_1=h(A_{00}u_0^2+2A_{01}u_0u_1+A_{11}u_1^2)$$

$$U_2=h(A_{000}u_0^3+3A_{001}u_0^2u_1+3A_{011}u_0u_1^2+A_{111}u_1^3) \tag{3.12}$$

$$\Omega=(B_{00}u_0^2+2B_{01}u_0u_1+B_{11}u_1^2)/h$$

Здесь

$$A_0=\int_0^h f_0(\eta)d\eta,\ \ A_1=\int_0^h g_0(\eta)d\eta$$

$$A_{00}=\int_0^1 f_0^2(\eta)d\eta,\ \ A_{01}=\int_0^1 f_0(\eta)g_0(\eta)d\eta,\ \ A_{11}=\int_0^1 g_0^2(\eta)d\eta$$

$$A_{000}=\int_0^1 f_0^3(\eta)d\eta,\ \ A_{001}=\int_0^1 f_0^2(\eta)g_0(\eta)d\eta$$

$$A_{011}=\int_0^1 f_0(\eta)g_0^2(\eta)d\eta,\quad A_{111}=\int_0^1 g_0^3(\eta)d\eta$$

$$B_{00}=\int_0^1 (f_0'(\eta))^2 d\eta,\quad B_{01}=\int_0^1 f_0'(\eta)g_1'(\eta)d\eta,\quad B_{11}=\int_0^1 (g_1'(\eta))^2 d\eta$$

С использованием формул (3.12) уравнения (3.6) и (3.7) представляются в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial U}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t}=\mathcal{C}_0\frac{\partial h}{\partial x}+\mathcal{A}_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+\mathcal{B}_0\frac{\partial u_1}{\partial x}+gh\alpha(x)-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial t}+\frac{\partial U_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t}=\mathcal{C}_1\frac{\partial h}{\partial x}+\mathcal{A}_1\frac{\partial u_0}{\partial x}+\mathcal{B}_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+2g\alpha(x)U-2\nu\Omega-2\frac{\nu}{l}u_0^2$$

Здесь

$$\mathcal{C}_0=\frac{\partial U}{\partial h}\frac{\partial U}{\partial h}-\frac{\partial U_1}{\partial h},\quad \mathcal{A}_0=\frac{\partial U}{\partial h}\frac{\partial U}{\partial u_0}-\frac{\partial U_1}{\partial u_0},\quad \mathcal{B}_0=\frac{\partial U}{\partial h}\frac{\partial U}{\partial u_1}-\frac{\partial U_1}{\partial u_1}$$

$$\mathcal{C}_1=\frac{\partial U_1}{\partial h}\frac{\partial U}{\partial h}-\frac{\partial U_2}{\partial h},\quad \mathcal{A}_1=\frac{\partial U_1}{\partial h}\frac{\partial U}{\partial u_0}-\frac{\partial U_2}{\partial u_0},\quad \mathcal{B}_1=\frac{\partial U_1}{\partial h}\frac{\partial U}{\partial u_1}-\frac{\partial U_2}{\partial u_1}$$

Уравнения (3.13) образуют (при учете того, что в рассматриваемом случае либо $(\partial u/\partial y)_0=u_0/l$, либо $(\partial u/\partial y)_0=\omega_*$) замкнутую относительно неизвестных функций $h(t,x)$, $u_0(t,x)$, $u_1(t,x)$ систему. При этом последние два уравнения (3.13) всегда могут быть разрешены относительно производных $\partial u_0/\partial t$ и $\partial u_1/\partial t$. Система эта гиперболического типа, но направления t =const не являются для нее характеристическими (любопытно, что для исходной системы (3.1), относящейся к параболическому типу, направления t = const являются характеристическими), поэтому начальные условия

$$t=0:\ h=h^{(0)}(x),\ u_0=u^{(0)}(x),\ u_1=u^{(0)}(x) \tag{3.14}$$

где $h^{(0)}(x)$, $u^{(0)}(x)$ – заданные функции, образуют для указанной системы задачу Коши, способы решения которой хорошо разработаны.

Когда функции $h(t,x)$, $u_0(t,x)$, $u_1(t,x)$ найдены, уравнения (3.1) дают возможность, при учете граничных условий, определить значения $(\partial^i u/\partial y^i)_0$, $(\partial^i u/\partial y^i)_1$ для $i>1$, и тогда формула (3.8) дает искомое решение задачи.

Возникает вопрос: насколько решение системы (3.1), для которого продольная скорость $u(t,x,y)$ представляется суммой (3.5), является точным?

Заметим, что для представления (3.5) уравнения (3.1) с кратностью $N-1$ выполняются на свободной поверхности и на обтекаемой поверхности. Очевидно, что точность решения будет возрастать с увеличением значения параметра N. Разумеется, данное замечание не может служить удовлетворительным ответом на поставленный вопрос, но рассматриваемый метод содержит конструктивную возможность для его разрешения.

В случае, когда граничное условие на обтекаемой поверхности задается в виде (3.5), интегральные условия (3.6), (3.7) представляются в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial t}=hg\alpha(x)-\frac{\partial U_1}{\partial x}-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0,\quad \frac{\partial U_1}{\partial t}=2g\alpha(x)U-\frac{\partial U_2}{\partial x}-2\nu\Omega \tag{3.15}$$

а функционалы U, U_1, U_2, Ω – в виде (3.12), только надо заменить в представлениях (3.12) u_0 на a_1, и при вычислении коэффициентов A_0, A_{00}, A_{01}, A_{000}, A_{001}, A_{011}, B_{00}, B_{01} функцию $f_0(\eta)$ следует заменить на $f_1(\eta)$.

Для определения неизвестных функций $h(t, x)$, $a_1(t, x)$, $u_1(t, x)$ возникает система уравнений, отличающаяся от (3.13) глобальной заменой u_0 на a_1, заменой последнего слагаемого в правой части второго уравнения на $-\nu a_1/h$ и отсутствием в правой части третьего уравнения последнего слагаемого.

Начальные условия представляются в виде

$$t = 0:\;\; h = h^{(0)}(x),\;\; a_1 = h^{(0)}(x)\omega^{(0)}(x),\;\; u_1 = u_1^{(0)}(x)$$

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (M8M300) и частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01074).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 263 с.
2. *Григорян С.С.* Новый закон трения и механизм крупномасштабных горных обвалов и оползней // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244. № 4. С. 846–849.
3. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Гостехиздат, 1948. 612 с.
4. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
5. *Григорян С.С., Красс М.С., Шумский П.А.* Математические модели основных типов ледников // Механика ледников. М.: Изд-во МГУ, 1977. С. 3–37.
6. *Григорян С.С., Хайретдинов Э.Ф.* Математические модели течения оползней // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 1. С. 42–45.
7. *Григорян С.С., Хайретдинов Э.Ф.* Решение уравнений течения тонкого слоя тяжелой вязкой жидкости на криволинейной поверхности // Вестн. МГУ. Математика. механика. 1996. № 6. С. 32–36.

Москва

Поступила в редакцию
4.II.1997