

УДК 531.36:62-50

© 1998 г. Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ И СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Рассматривается линейная задача оптимального управления системами, входные сигналы которых содержат запаздывание по времени. Предлагается метод реализации оптимального управления типа обратной связи. В основу метода положена специальная процедура коррекции текущих оптимальных программных управлений, которую осуществляет оптимальный регулятор, используя двойственный метод линейного программирования. Результаты применяются для построения двух типов стабилизаторов систем с запаздыванием в управлении.

Ранее [1-3] был изложен новый подход к решению проблемы синтеза оптимальных систем для случая, когда оптимизируемые системы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Цель работы – показать, что описанные ранее основные конструкции [1-3] можно перенести на системы управления, в математических моделях которых имеется запаздывание. Полученные результаты по синтезу оптимальных систем используются для создания ограниченных стабилизирующих обратных связей. В отличие от другого подхода к задачам стабилизации систем с запаздыванием в канале обратной связи [4] для реализации ограниченной стабилизирующей обратной связи используется двойственный метод линейного программирования.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему управления, поведение которой на промежутке времени $T = [0, t^*]$ описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + b_1u(t - h) \quad (1.1)$$

где $x(t)$ – n -вектор состояния системы в момент t , $u(t)$ – значение скалярного управляющего воздействия, $h > 0$ – запаздывание. Будем считать, что система (1.1) относительно управляема [5].

Класс доступных управлений состоит из кусочно-постоянных функций с периодом квантования $\nu = t^*/N = h/M$, N, M – натуральные числа, $u(t) = u_k, t \in [k\nu, (k + 1)\nu]$ ($k = 0, 1, \dots, N - 1$), стесненных ограничением

$$|u(t)| \leq L, \quad t \in T \quad (1.2)$$

Зададим терминальное ограничение

$$Hx(t^*) = g \quad (H \in R^{m \times n}, \text{rank } H = m < n) \quad (1.3)$$

Доступное управление $u(t), t \in T$, назовем допустимым, если соответствующая ему траектория $x(t), t \in T$, системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x_0, u(t) = u_0(t), t \in [-h, 0]$, удовлетворяет терминальному ограничению (1.3).

На множестве допустимых управлений определим критерий качества

$$J(x) = c'x(t^*) \quad (1.4)$$

и оптимальное программное управление (ОПУ) $u^0(t), t \in T: J(u^0) = \max J(u)$.

Погрузим задачу (1.1)–(1.4) в семейство задач

$$\begin{aligned} c'x(t^*) &\rightarrow \max, \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + b_1u(t-h) \\ x(\tau) &= z, \quad u(t) = v(t), \quad t \in [\tau-h, \tau[\\ Hx(t^*) &= g, \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in T_\tau = [\tau, t^*] \\ \tau &= kv, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad z \in R^n \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $v(t)$, $t \in [\tau-h, \tau[$, – кусочно-непрерывная функция, $|v(t)| \leq L$, $t \in [\tau-h, \tau[$.

ОПУ задачи (1.5) обозначим через $u^0(t | \tau, z, v_\tau(\cdot))$, $t \in T_\tau$, ($v_\tau(\cdot) = (v(t), t \in [\tau-h, \tau[)$). Пусть Ω_τ – совокупность всех пар $(z, v_\tau(\cdot))$, для которых существует решение задачи (1.5).

Функционал

$$u^0(\tau, z, v_\tau(\cdot)) = u^0(\tau | \tau, z, v_\tau(\cdot)), \quad (z, v_\tau(\cdot)) \in \Omega_\tau \quad (1.6)$$

$$\tau \in T^\nu = \{0, \nu, \dots, (N-1)\nu\}$$

будем называть оптимальным управлением типа обратной связи (позиционным решением задачи (1.5)).

Построение функционала (1.6) в явном (формульном) виде, что подразумевается в классической постановке проблемы оптимального синтеза, представляет трудную задачу, не решенную до сих пор и для обыкновенных систем (1.1), $h = 0$. Были отмечены [2] трудности, которые встречаются при решении этой проблемы как в теории принципа максимума, так и в динамическом программировании. Поскольку эти трудности носят принципиальный характер и нет оснований для их преодоления в обозримом будущем, то на данном этапе разумно изменить саму постановку проблемы синтеза оптимальных систем.

Новая постановка проблемы оптимального синтеза состоит в следующем [1]. Предположим, что оптимальная обратная связь (ООС) (1.6) построена. Замкнем ею систему (1.1) и рассмотрим поведение замкнутой системы в условиях постоянно действующих возмущений. Введение возмущений не является случайным. Особенность классической ООС [6] состоит именно в том, что она определяется по детерминированной системе, но предназначена для работы этой системы в условиях неизвестных возмущений. Если бы при введении обратной связи возмущения не предполагались, тогда не имела бы смысла и ООС, ибо в идеальных условиях вполне удовлетворительно работает и ОПУ.

Итак, рассмотрим поведение системы

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu^0(t, x(t), u_t(\cdot)) + b_1u_0(t-h) + w(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, h[\\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu^0(t, x(t), u_t(\cdot)) + b_1u^0(t-h, x(t-h), u_{t-h}(\cdot)) + w(t), \quad t \in [h, t^*] \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $u_t(\cdot) = (u(s), s \in [t-h, t[)$, $u(s) = u^0(s, x(s), u_s(\cdot))$ – управление, которое было использовано в прошедший момент s , $u(s) = u_0(s)$, $s \in [-h, 0[$, $w(t)$, $0 \leq t \leq t^0$, $w(t) \equiv 0$, $t > t^0$, – неизвестная кусочно-непрерывная n -вектор-функция возмущений, $t^0 = N_1\nu$, $N_1 < N - M$, – момент прекращения действия возмущений.

Обозначим через $w^*(t)$, $t \in T^0 = [0, t^0]$, возмущение, реализовавшееся в некотором фиксированном процессе управления. Согласно (1.7), ему будет соответствовать траектория $x^*(t)$, $t \in T$, оптимизируемой системы (для простоты будем предполагать, что уравнение (1.7) имеет решение). Из (1.7) видно, что в рассматриваемом процессе управления на вход системы будет подаваться управление $u^*(t) = u^0(t, x^*(t), u_t^*(\cdot))$, $t \in T$, т.е. ООС в каждом конкретном процессе управления используется не полностью, нужны лишь ее значения вдоль изолированной кривой $(x^*(t), u_t^*(\cdot))$, $t \in T$. Более того, зна-

чение $u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau), u_\tau^*(\cdot))$ не нужно знать до момента τ , достаточно уметь его вычислять, когда система оказалась в текущей позиции $(\tau, x^*(\tau), u_\tau^*(\cdot))$. Понятно, что последняя проблема несравненно проще исходной проблемы построения функционала (1.6). Цель последующего изложения – показать, как можно решить эту проблему средствами современной вычислительной техники.

Предварительно введем новое понятие. Любое устройство, способное в каждом конкретном процессе в режиме реального времени вычислять реализацию $u^*(t), t \in T$, ООС (1.6), назовем оптимальным регулятором. Таким образом, задача реализации ООС свелась к описанию алгоритма работы оптимального регулятора.

2. Алгоритм работы оптимального регулятора. Предположим, что регулятор создан и проработал в моменты $0, \nu, \dots, (k-1)\nu$, и система (1.7) в момент $\tau = k\nu$ оказалась в состоянии $x^*(k\nu)$. В момент $\tau = k\nu$ для выработки управления $u^*(t), t \in [k\nu, (k+1)\nu[$, он использует ОПУ задачи

$$\begin{aligned} c'x(t^*) &\rightarrow \max, \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + b_1u(t-h) \\ x(k\nu) &= x^*(k\nu), \quad u(t) = u^*(t), \quad t \in [k\nu - h, k\nu[\\ Hx(t^*) &= g, \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in T_{k\nu} \end{aligned} \quad (2.1)$$

В функциональной форме задача (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} c' \int_{\tau}^{t^*} F(t^* - t)(bu(t) + b_1u(t-h)) dt &\rightarrow \max \\ HF(t^* - \tau)x^*(\tau) + H \int_{\tau}^{t^*} F(t^* - t)(bu(t) + b_1u(t-h)) dt &= g \\ u(t) = u^*(t), \quad t \in [\tau - h, \tau[; \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in T_{\tau} \end{aligned}$$

где $F(t), t \geq 0$, – фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{x} = Ax$.

Эта задача эквивалентна следующей задаче линейного программирования (ЛП):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{K-M} c' \int_{(k+i-1)\nu}^{(k+i)\nu} (F(t^* - t)b + F(t^* - t - h)b_1) dt \xi_i + \sum_{K-M+1}^K c' \int_{(k+i-1)\nu}^{(k+i)\nu} F(t^* - t)b dt \xi_i &\rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^{K-M} H \int_{(k+i-1)\nu}^{(k+i)\nu} (F(t^* - t)b + F(t^* - t - h)b_1) dt \xi_i + \sum_{K-M+1}^K H \int_{(k+i-1)\nu}^{(k+i)\nu} F(t^* - t)b dt \xi_i &= \\ = g - HF(t^* - k\nu)x^*(\tau) - H \int_{k\nu}^{(k+1)\nu} F(t^* - t)b_1u^*(t-h) dt \\ |\xi_i| \leq L, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad K = N - k \end{aligned} \quad (2.2)$$

Задача (2.2) содержит m основных ограничений и K переменных. Обозначим через $\xi^0(\tau) = (\xi_i^0(\tau), i = 1, 2, \dots, K)$ оптимальный план задачи (2.2), через $K^0(\tau)$ – оптимальную опору задачи (2.2) [7]. Тогда оптимальным программным управлением в задаче (2.1) будет $u^0(t) = u_{k+i-1}^0 = \xi_i^0(\tau), t \in [(k+i-1)\nu, (k+i)\nu[, i = 1, 2, \dots, K$.

В момент $\tau = (k+1)\nu$ регулятор должен решить задачу (2.2) для $K := K - 1$ и нового состояния $x^*(\tau)$, т.е. в задаче (2.2) на единицу уменьшится число переменных и изменится вектор правых частей, причем изменение будет тем меньше, чем меньше ν . Учитывая эти особенности, в момент $(k+1)\nu$ нет необходимости полностью решать задачу ЛП. Если оптимальную опору $K^0(k\nu)$ использовать в качестве начального

приближения для момента $(k + 1)v$, то можно построить решение задачи (2.2) для момента $(k + 1)v$ двойственным методом ЛП [7] намного быстрее, чем при отсутствии информации об опоре $K^0(kv)$. Таким образом, построив до начала процесса ОПУ для момента $\tau = 0$, регулятор в каждый момент kv ($k = 1, 2, \dots, N_1$) осуществляет коррекцию имеющегося оптимального управления для момента $(k - 1)v$ и на промежутке $[kv, (k + 1)v[$ подает на вход системы (1.7) значение $u^*(t) = \xi_1^0(kv)$, $t \in [kv, (k + 1)v[$.

Если для вычисления управления $u^*(t)$, $t \in [\tau, \tau + v[$, затрачивается время, не превосходящее v , то можно говорить, что регулятор вычисляет реализацию ООС в режиме реального времени.

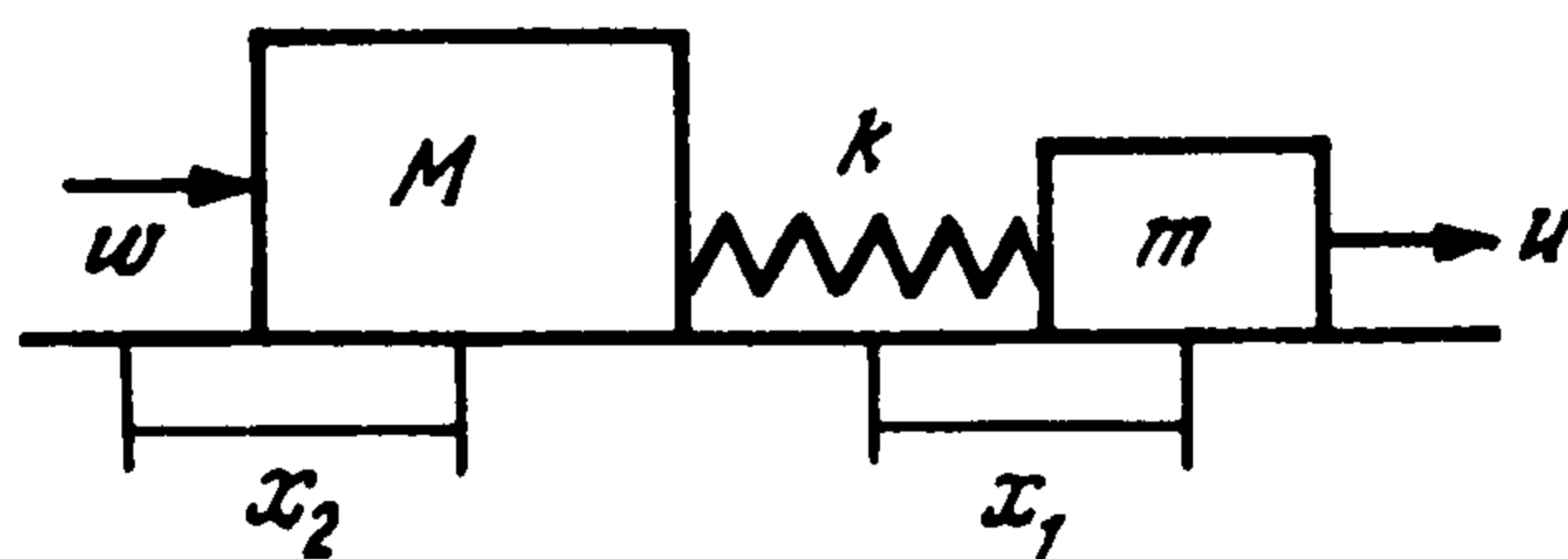
После прекращения действия возмущений регулятор использует ОПУ для момента N_1v и подает на вход системы (1.7) значения $u^*(t) = \xi_i^0(N_1v)$, $t \in [(N_1 + i - 1)v, (N_1 + i)v[$ ($i = 1, 2, \dots, N - N_1$).

Пример. Рассмотрим задачу перемещения системы двух материальных точек, соединенных упругой связью (фиг. 1). Уравнения движения системы имеют вид

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{k}{m}(x_1(t) - x_2(t)) + u(t - h), \quad \dot{x}_4(t) = \frac{k}{M}(x_1(t) - x_2(t))$$

где x_1, x_2 – отклонения от состояния покоя первого и второго объектов, x_3, x_4 – их скорости, m, M – массы объектов, k – коэффициент упругости пружины.



Фиг. 1

Требуется за фиксированное время t^* , используя управляющие воздействия минимальной интенсивности, перевести эту систему в новое положение и остановить там. Выбрав фиксированные начальные данные, получим следующую задачу ОУ:

$$\rho \rightarrow \min$$

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -(x_1(t) - x_2(t)) + u(t - h), \quad \dot{x}_4(t) = 2(x_1(t) - x_2(t)) \quad (2.3)$$

$$x_1(0) = 0,5, \quad x_2(0) = 0,4, \quad x_3(0) = 0,2, \quad x_4(0) = -0,1$$

$$x_1(8) = 1, \quad x_2(8) = 1, \quad x_3(8) = 0, \quad x_4(8) = 0$$

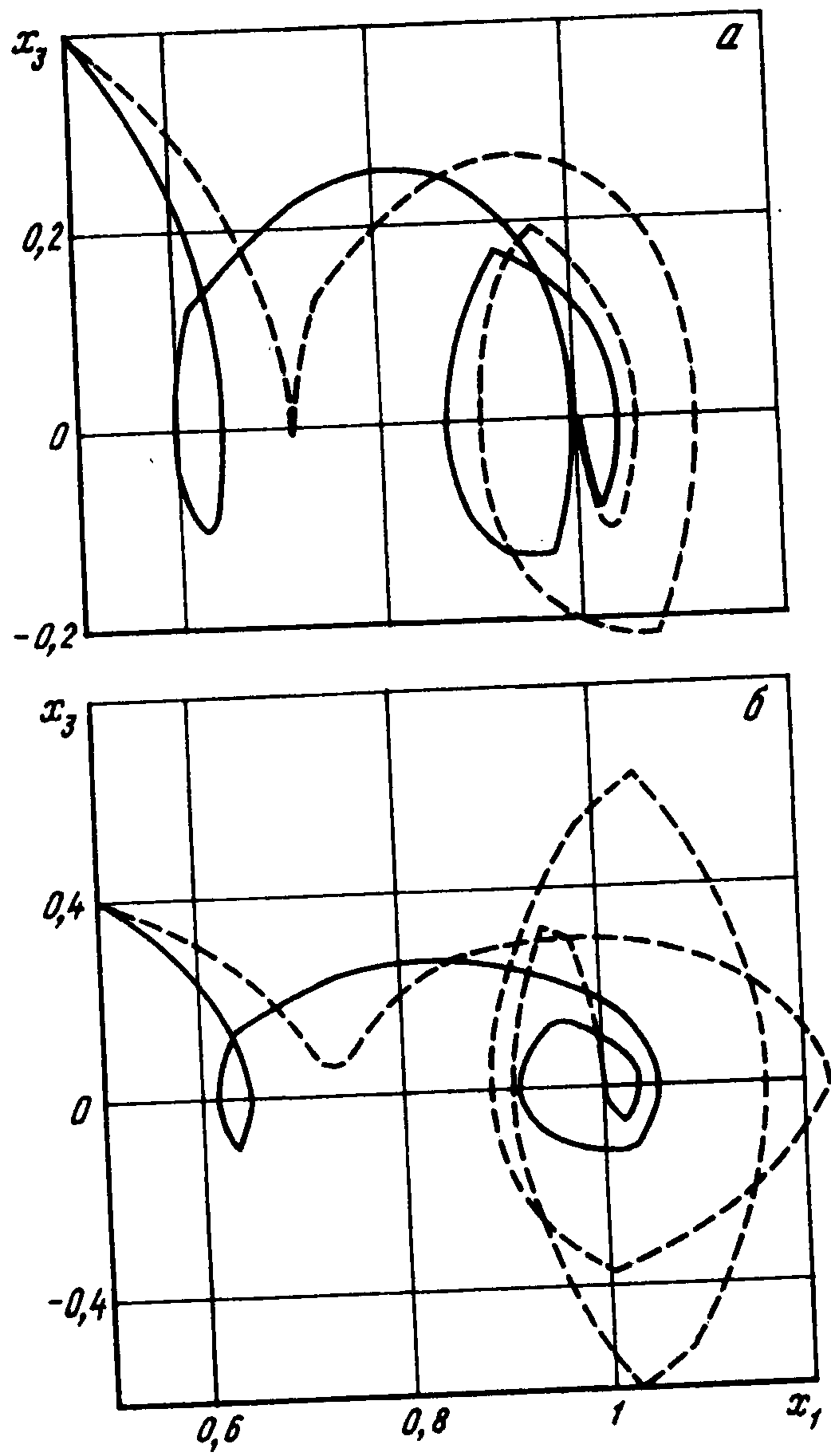
$$u(t) \equiv 0, \quad t \in [-h, 0[, \quad |u(t)| \leq \rho, \quad t \in [0, 8 - h]$$

Результаты программного решения задачи (2.3) при различных запаздываниях h представлены на фиг. 2, а и 3, а, где изображены фазовые траектории объектов, и на фиг. 4, а, где представлены соответствующие программные управления, сплошными линиями при $h = 0$, штриховыми линиями при $h = 2$.

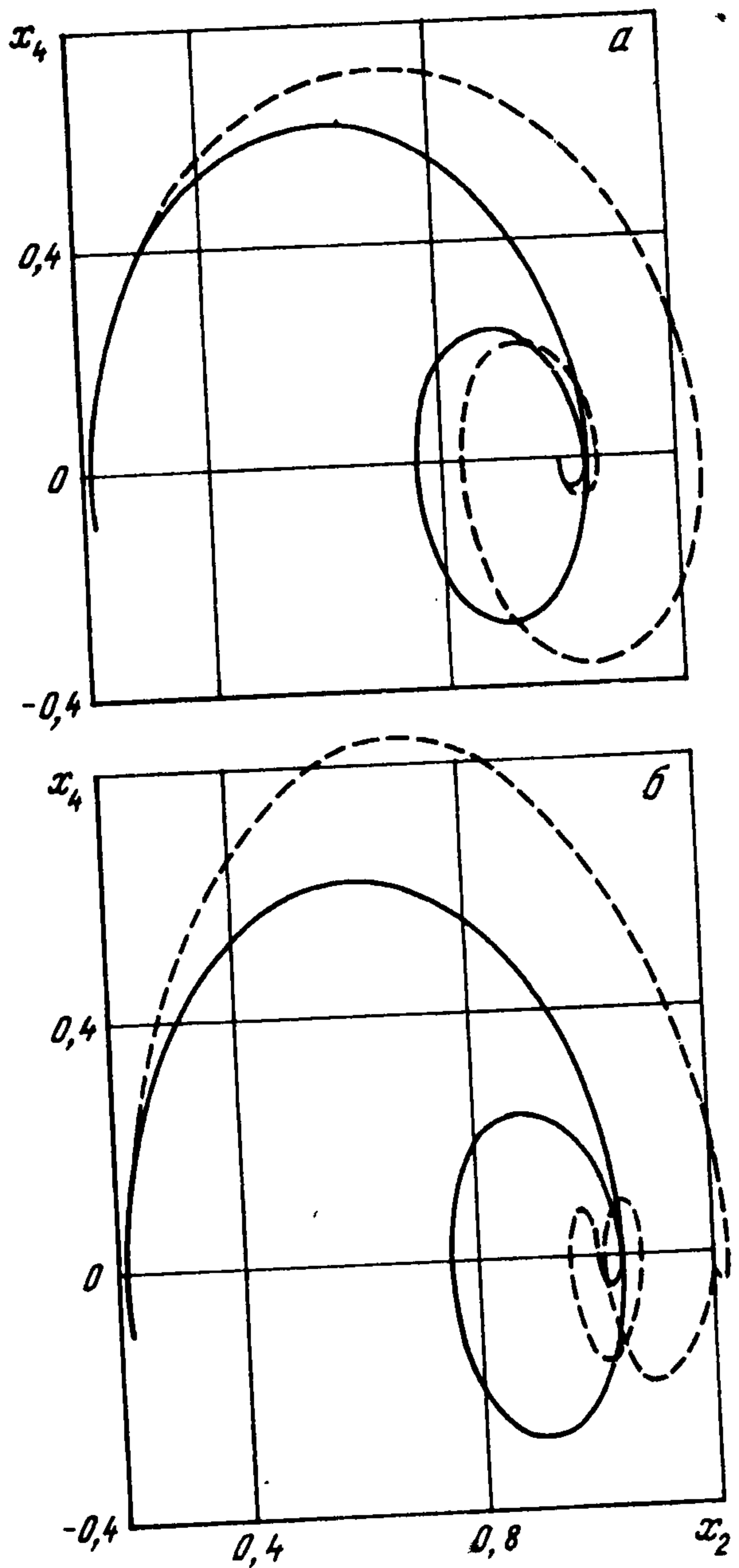
Пусть в процессе управления на второй объект действует неизвестное регулятору возмущение $w(t)$, $t \in [0, 6]$, (фиг. 1) и поведение системы описывается уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_4(t)$$

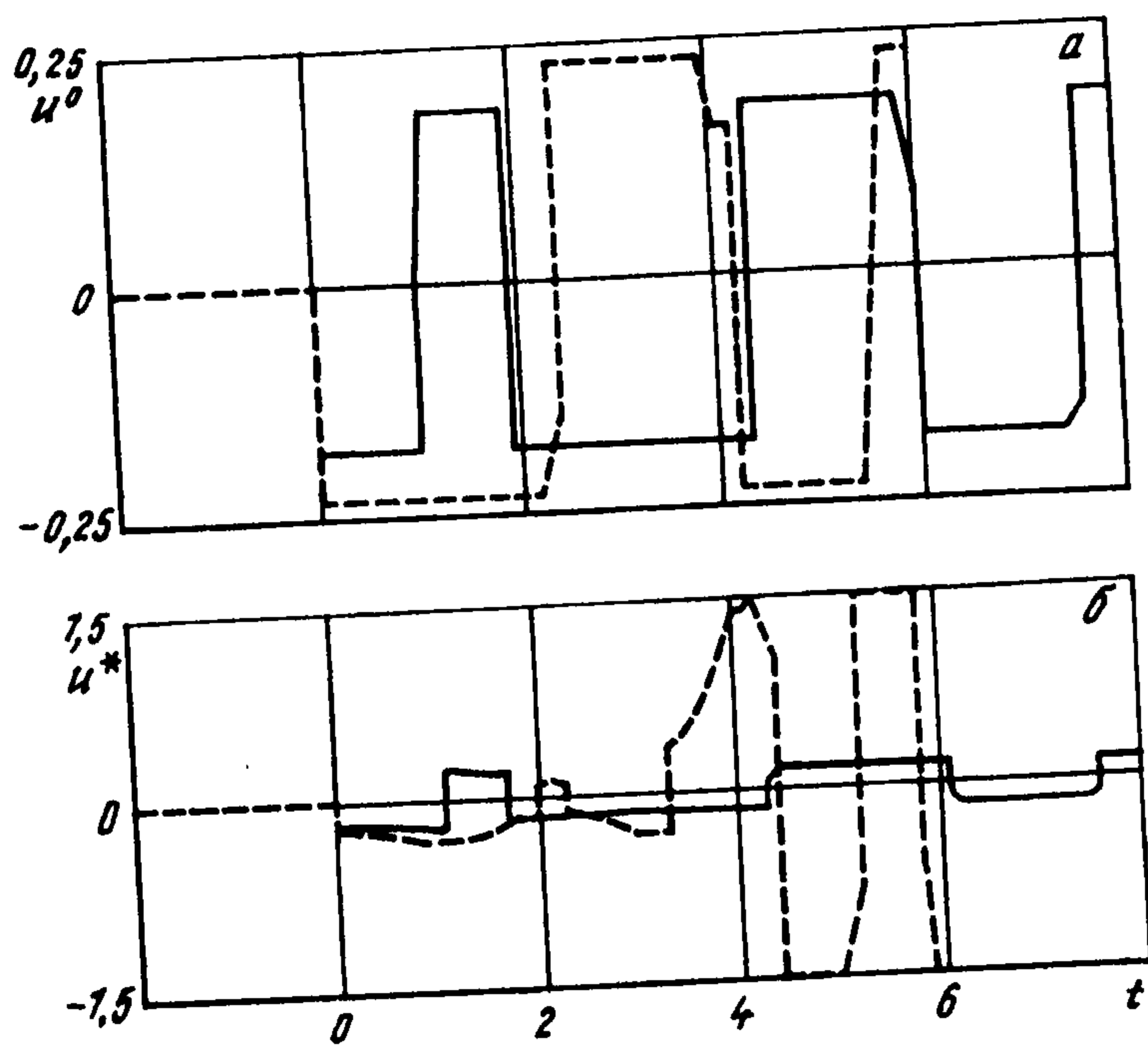
$$\dot{x}_3(t) = -(x_1(t) - x_2(t)) + u(t - h), \quad \dot{x}_4(t) = 2(x_1(t) - x_2(t)) + w(t)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Результаты работы регулятора для $w(t) = 0,4 \sin 3t$, $t \in [0, 6]$, представлены на фиг. 2, б и 3, б (фазовые траектории объектов) и на фиг. 4, б (выработанные регулятором управления $u^*(t)$, $t \in [0, 8[$). Обозначения кривых – те же, что на фиг. 2, а, 3, а, 4, а.

3. Приложение оптимальной обратной связи к стабилизации динамических систем с запаздыванием по управлению. Рассмотрим динамическую систему, поведение которой вместе с прилагаемым к ней управлением описывается при $t \geq 0$ уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + b_1u(t-h), \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

$$u(t) = u_0(t), \quad t \in [-h, 0[$$

Считая собственную динамику системы (при $u(t) \equiv 0, t \geq 0$) неустойчивой, поставим задачу ее стабилизации ограниченными управлениями.

Пусть G – некоторая окрестность состояния равновесия $x = 0$ системы (3.1). Функционал $u(x, v(\cdot))$, $x \in G, v(\cdot) \in V = \{v(\cdot) = (v(t), t \in [-h, 0[), |v(t)| \leq L, t \in [-h, 0[),$ назовем ограниченной стабилизирующей обратной связью (ОСОС), если 1) $u(0, 0) = 0$, 2) $|u(x, v(\cdot))| \leq L, x \in G, v(\cdot) \in V$, 3) замкнутая система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(x(t), v_t(\cdot)) + b_1u_0(t-h)$$

$$x(0) = x_0, \quad t \in [0, h[\quad (3.2)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(x(t), v_t(\cdot)) + b_1u(x(t-h), v_{t-h}(\cdot)), \quad t \geq h$$

где $u^*(t), t \geq 0$, – управление, приложенное к системе в момент $t, u^*(t) = u^0(t), t \in [-h, 0[, v_t(\cdot) = (v(s) = u^*(t+s), s \in [-h, 0[),$ при всех $x_0 \in G, u^0(\cdot) \in V$ имеет единственное непрерывное решение $x(t), t \geq 0$, 4) нулевое решение $x(t) \equiv 0, t \geq 0$, системы (3.2) асимптотически устойчиво в $G \times V$.

В отличие от задач оптимального управления (ЗОУ), исследованных в предыдущих разделах, задача стабилизации (построения ОСОС) определена на всей оси времени $t \geq 0$. Однако, как было показано [3] для обыкновенных динамических систем, ее можно решить с помощью ЗОУ с конечным горизонтом, используя принцип "скользящего" управления.

Покажем, что этот подход приводит к успеху и в случае системы (3.1) с запаздывающим управлением. Для этого проанализируем использование ОСОС в конкретном процессе стабилизации. Через $x^*(t), t \geq 0$, обозначим траекторию стабилизируемой системы, через $v_t^*(\cdot)$ – совокупность значений управления $u^*(t+s), s \in [-h, 0[$, поданных на вход системы (3.2) на промежутке $[t-h, t[$. Из приведенного выше определения ОСОС видно, что в конкретном процессе стабилизации значения функционала $u(x, v(\cdot)), x \in G, v(\cdot) \in V$, нужны лишь для конкретных реализаций $x^*(t), u^*(t), t \geq 0$. Более того, значение $u^*(\tau) = u^0(x^*(\tau), v_\tau^*(\cdot))$ не нужно знать заранее, достаточно уметь вычислять его к моменту τ . Функцию $u^*(t) = u^*(kv), t \in [kv, (k+1)v[(k = 0, 1, \dots)$ назовем дискретной реализацией ОСОС, а устройство, которое в каждом конкретном процессе способно для выбранного v вычислять в режиме реального времени значения $u^*(kv) (k = 0, 1, \dots)$ назовем (дискретным) стабилизатором.

Таким образом, проблема стабилизации динамических систем с запаздыванием по управлению свелась к построению алгоритма работы стабилизатора. В основу алгоритма работы стабилизатора положим алгоритм работы оптимального регулятора для специальной ЗОУ. Рассмотрим два типа стабилизаторов, определяемых критерием качества вспомогательной ЗОУ.

Стабилизатор первого типа. Выберем параметр метода $\Theta = Nv$ и введем вспомогательную (сопровождающую) ЗОУ [8]

$$\rho(z, v(\cdot)) = \min \rho$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + b_1u(t-h), \quad x(0) = z$$

$$u(t) = v(t), \quad t \in [-h, 0[, \quad x(\Theta) = 0 \quad (3.3)$$

$$|u(t)| \leq \rho, \quad t \in [0, \Theta-h[, \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [\Theta-h, \Theta[$$

Функционал $u^0(t | z, v(\cdot)), t \in [0, \Theta - h[$, назовем ОПУ задачи (3.3), если порожденная им траектория $x^0(t | z, v(\cdot)), t \in [0, \Theta]$, удовлетворяет ограничению $x^0(\Theta | z, v(\cdot)) = 0$ и критерий качества достигает минимального значения.

Функционал $u^0(x(t), v_t(\cdot)) = u^0(0 | x(t), v_t(\cdot)), x(t) \in R^n, v_t(\cdot) \in V, t \geq 0$, является ОСОС.

Действительно, из условия вспомогательной задачи следует, что: 1) $u^0(0, 0) = 0$; 2) для каждого ограниченного множества $G \subset R^n$ найдется такое число $L > 0$, что $\rho(x, v(\cdot)) \leq L$ для всех $x \in G, v(\cdot) \in V$, а значит и $|u^0(x, v(\cdot))| \leq L$. Замкнутая система (3.2) ($u(x(t), v_t(\cdot)) = u^0(x(t), v(\cdot))$) асимптотически устойчива. Чтобы это показать, рассмотрим произвольный текущий момент $\tau = l\nu$, состояние $x^*(\tau) = x^*(\tau | x_0, u_0(\cdot))$ и выработанное управление $u_\tau^*(\cdot) = (u^*(t), t \in [\tau - h, \tau])$, соответствующие произвольному начальному состоянию $x(0) = x_0 \in G$ и $u_0(\cdot) \in V$. Для позиции $x^*(\tau), u_\tau^*(\cdot)$ критерий качества задачи (3.3) принимает значение $\rho(x^*(\tau), u_\tau^*(\cdot))$. Оно вычисляется путем решения задачи (3.3) с $z = x^*(\tau), v(t) = u^*(\tau + t), t \in [-h, 0[$. Ясно, что при $x^*(\tau) = 0, u^*(\tau + t) = 0, t \in [-h, 0[$, выполняется равенство $\rho(x^*(\tau), u_\tau^*(\cdot)) = 0$. Если же $x^*(\tau) \neq 0, u^*(\tau + t) \neq 0, t \in [-h, 0[$, то $\rho(x^*(\tau), u_\tau^*(\cdot)) > 0$.

В функциональной форме задача (3.3) имеет вид

$$\rho \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} & F(N\nu)x^*(\tau) + \int_0^{M\nu} F(N\nu - t)b_1 u^*(\tau - h + t) dt + \\ & + \sum_{i=0}^{K-1} \int_{i\nu}^{(i+1)\nu} (F(N\nu - t)b + F(N\nu - t - h)b_1) dt u_i = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$|u_i| \leq \rho, \quad i = 0, 1, \dots, K-1, \quad K = N - M$$

Введя новые переменные $\xi_0 = 1/\rho, \xi_i = u_{i-1}/\rho$ ($i = 1, 2, \dots, K$) получим эквивалентную задачу ЛП с $K + 1$ переменными и n основными ограничениями

$$\xi_0 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} & (F(N\nu)x^*(\tau) + \int_0^{M\nu} F(N\nu - t)b_1 u^*(\tau - h + t) dt)\xi_0 + \\ & + \sum_{i=1}^K \int_{(i-1)\nu}^{i\nu} (F(N\nu - t)b + F(N\nu - t - h)b_1) dt \xi_i = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\xi_0 \geq 0, \quad |\xi_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, K$$

Обозначим через $\xi^0(\tau) = (\xi_i^0(\tau), i = 0, 1, \dots, K)$ оптимальный план задачи (3.5), через $K^0(\tau)$ – оптимальную опору задачи (3.5). Тогда оптимальным управлением в задаче (3.4) будет $u^0(\tau) = (u_i^0(\tau) = \xi_{i+1}^0(\tau) \xi_0^0(\tau), i = 0, 1, \dots, K-1)$.

В момент $\tau + \nu$ замкнутая система (3.2) окажется в состоянии

$$x^*(\tau + \nu) = F(\nu)x^*(\tau) + \int_0^\nu F(\nu - t)b dt u_1^0(\tau) + \int_0^\nu F(\nu - t)b_1 dt u^*(\tau - h)$$

Покажем, что значение критерия качества задачи (3.3) для новой позиции $z = x^*(\tau + \nu), u(t) = u^*(\tau + \nu + t), t \in [-h, 0[$, удовлетворяет неравенству $\rho(x^*(\tau + \nu), u_{\tau+\nu}^*(\cdot)) \leq \rho(x^*(\tau), u_\tau^*(\cdot))$. Действительно, под действием управления $u_i(\tau + \nu) = u_{i+1}^0(\tau)$ ($i = 0, 1, \dots, K-2$), $u_i(\tau + \nu) = 0$ ($i = K-1, K, \dots, N-1$) система (3.2) переходит из начальной позиции $x^*(\tau + \nu), u_{\tau+\nu}^*(\cdot)$ в начало координат и удерживается там, и для управления $u_i(\tau + \nu)$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$) справедливо неравенство $|u_i(\tau + \nu)| \leq \rho(x^*(\tau), u_\tau^*(\cdot))$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$). Следовательно, на оптимальном управлении $u_i^0(\tau + \nu)$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$) также будет выполняться неравенство $\rho(x^*(\tau + \nu),$

$u_{\tau+v}^*(\cdot) \leq \rho(x^*(\tau), u_{\tau}^*(\cdot))$. Осталось показать, что равенство $\rho(x^*(\tau+v), u_{\tau}^*(\cdot)) = \rho(x^*(\tau), u_{\tau}^*(\cdot))$ может выполняться не более чем в течение K шагов.

Если в процессе стабилизации выполняются равенства

$$\rho(x^*(\tau), u_{\tau}^*(\cdot)) = \rho(x^*(\tau+q\nu), u_{\tau+q\nu}^*(\cdot)), \quad q=1, 2, \dots, K-1 \quad (3.6)$$

то управление $u_i(\tau+q\nu) = u_{i+q}^0(\tau)$ ($i=0, 1, \dots, K-q-1$), $u_i(\tau+q\nu) = 0$ ($i=K-q, K-q+1, \dots, N-1$) будет ОПУ в задаче (3.5) для позиции $z = x^*(\tau+q\nu)$, $v(t) = u^*(\tau+q\nu+t)$, $t \in [-h, 0[$ ($q=1, 2, \dots, K-1$). Если равенство (3.6) не нарушится при $q=K$, то ОПУ для позиции $z = x^*(\tau+K\nu)$, $v(t) = u^*(\tau+K\nu+t)$, $t \in [-h, 0[$, будет $u_i(\tau+K\nu) = 0$ ($i=0, 1, \dots, N-1$), что обеспечит равенство $\rho(x^*(\tau+K\nu), u_{\tau+K\nu}^*(\cdot)) = 0$. Таким образом, гарантируется неравенство

$$\rho(x^*(\tau), u_{\tau}^*(\cdot)) > \rho(x^*(\tau+K\nu), u_{\tau+K\nu}^*(\cdot)) \quad (3.7)$$

Используя неравенство (3.7), рассуждениями, типичными для метода функций Ляпунова [9–12], можно показать, что $\rho(x^*(k\nu), u_{k\nu}^*(\cdot)) \rightarrow 0$, $\|x^*(k\nu)\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что и $\|x^*(t)\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Перейдем к описанию алгоритма работы стабилизатора.

Предположим, что стабилизатор проработал в моменты $0, \nu, \dots, l\nu$. В момент $\tau = l\nu$ для выработки управления $u^*(\tau)$ он использует значения ОПУ $u^0(0 | x^*(\tau), v_{\tau}(\cdot))$ задачи (3.3) для $z = x^*(\tau)$, $v(t) = u^*(\tau+t)$, $t \in [-h, 0[$. Эта задача эквивалентна задаче ЛП (3.5). Для выработки управления $u^*(\tau+\nu)$, стабилизатору нужно знать решение задачи (3.3) для начальной позиции $z = x^*(\tau+\nu)$, $v(t) = u^*(\tau+\nu+t)$, $t \in [-h, 0[$. Эта задача эквивалентна следующей задаче ЛП:

$$\begin{aligned} \xi_0 \rightarrow \max \\ (F(N\nu)x^*(\tau+\nu) + \int_0^{M\nu} F(N\nu-t)b_1 u^*(\tau+\nu-h+t) dt) \xi_0 + \\ + \sum_{i=1}^K \int_{(i-1)\nu}^{i\nu} (F(N\nu-t)b + F(N\nu-t-h)b_1) dt \xi_i = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\xi_0 \geq 0, \quad |\xi_i| \leq 1, \quad i=1, 2, \dots, K$$

Новая задача отличается от задачи (3.5) лишь вектором условий при переменной ξ_0 , и это отличие тем меньше, чем меньше ν . Как и при вычислении реализации оптимальной обратной связи, задача (3.8) решается двойственным методом ЛП с использованием оптимальной опоры задачи (3.5) $K^0(\tau)$. При небольших ν решение новой задачи строится за небольшое число итераций. В случае больших ν для уменьшения количества итераций двойственного метода можно отрезок $[\tau, \tau+\nu]$ разбить на достаточное число малых интервалов так, чтобы, решая двойственным методом задачи типа (3.5) на этих интервалах, в момент $\tau+\nu$ на вычисление оптимального управления $u^0(t | x^*(\tau+\nu), v_{\tau+\nu}(\cdot))$, $t \in [0, \Theta-h[$, затратить небольшое число итераций.

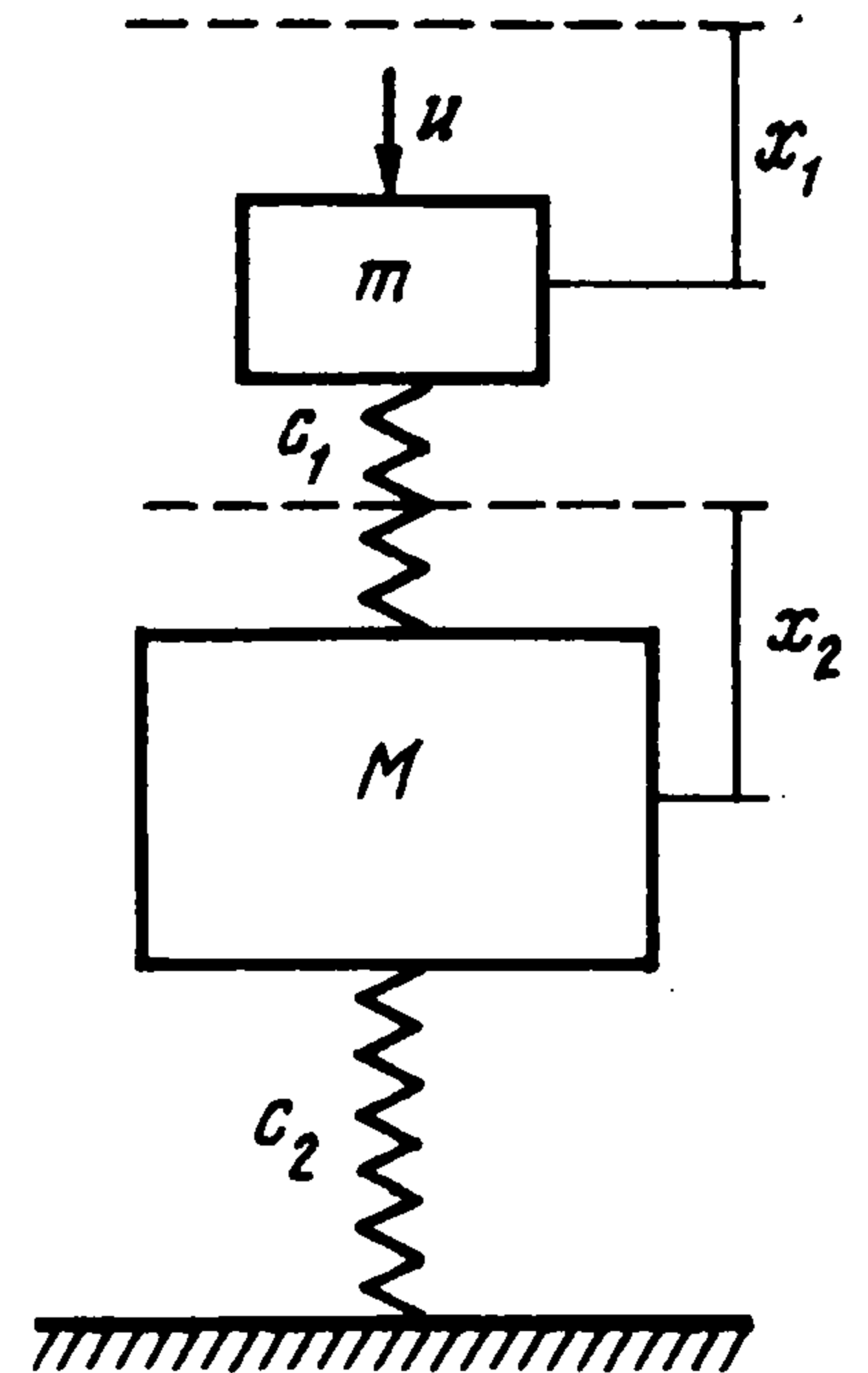
Изложенный метод проиллюстрируем на задаче успокоения двухмассовой колебательной системы (фиг. 5). Через m, M обозначены массы объектов, x_1, x_2 – их координаты, c_1, c_2 – коэффициенты упругости пружин, u – успокаивающее воздействие. Математическая модель системы имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_4(t), \quad \dot{x}_3(t) = (-c_1 x_1(t) + c_1 x_2(t) + u(t-h)) / m \\ \dot{x}_4(t) = (c_1 x_1(t) - (c_1 + c_2) x_2(t)) / M \end{aligned} \quad (3.9)$$

Зададим следующие значения параметров $m = 1, M = 10, c_1 = 1, c_2 = 9,2$. В качестве начального состояния выберем вектор $x_0 = (0,5; 0,4; 0,2; -0,1)$. Вспомогательная задача (3.3) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1(t) &= x_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_1(t) + x_2(t) + u(t-h), \quad \dot{x}_4(t) = 0,1x_1(t) - 1,02x_2(t) \\ x(0) &= z, \quad u(t) = 0, \quad t \in [-h, 0[, \quad x(\Theta) = 0 \\ |u(t)| &\leq \rho, \quad t \in [0, \Theta - h[\end{aligned}$$

Параметрам задачи присваивались значения $\Theta = 4, v = 0,1$. Успокоение системы проводилось при различных запаздываниях. На фиг. 6 представлены соответствующие каждому значению h реализовавшиеся состояния $x_1^*(\tau), \tau \geq 0$, реализовавшиеся управления $u^*(\tau), \tau \geq -h$, и поведение функции Ляпунова $\rho(x^*(\tau), u_\tau^*(\cdot))$ для каждого из процессов (сплошные линии при $h = 0$, штриховые линии при $h = 1$).



Фиг. 5

Стабилизатор второго типа. Алгоритм работы данного стабилизатора базируется на решении вспомогательной ЗОУ [8] типа

$$\begin{aligned} \mu(z, v(\cdot)) &= \min \int_0^{\Theta-h} |u(t)| dt \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) + b_1 u(t-h) \quad x(0) = z \\ u(t) &= v(t), \quad t \in [-h, 0[, \quad x(\Theta) = 0 \\ |u(t)| &\leq L, \quad t \in [0, \Theta - h[, \quad u(t) = 0, \quad t \in [\Theta - h, \Theta[\end{aligned} \quad (3.10)$$

Как и в случае стабилизатора первого типа, через $u^0(t | z, v(\cdot)), t \in [0, \Theta - h[$, обозначим ОПУ задачи (3.10). Пусть G – множество всех $z \in R^n$, для которых задача (3.10) имеет решение.

Функционал $u^0(x(t), v(\cdot)) = u^0(0 | x(t), v(\cdot)), x(t) \in G, v(\cdot) \in V, t \geq 0$, является ОСОС.

Для доказательства в качестве функции Ляпунова рассмотрим оптимальное значение критерия качества в задаче (3.10).

Ясно, что $\mu(0, 0) = 0, \mu(x, v(\cdot)) > 0, x \neq 0, v(\cdot) \neq 0$.

Пусть в момент $\tau = l v$ в задаче (3.10) при $z = x^*(\tau), v(t) = u^*(\tau + t), t \in [-h, 0[$, построено ОПУ $u^0(\tau) = (u_i^0(\tau), i = 0, 1, \dots, K - 1)$, на котором критерий качества имеет значение

$$\mu(x^*(\tau), u_\tau^*(\cdot)) = \sum_{i=0}^{K-1} |u_i^0(\tau)| > 0$$

В момент $\tau + v$ система окажется в состоянии

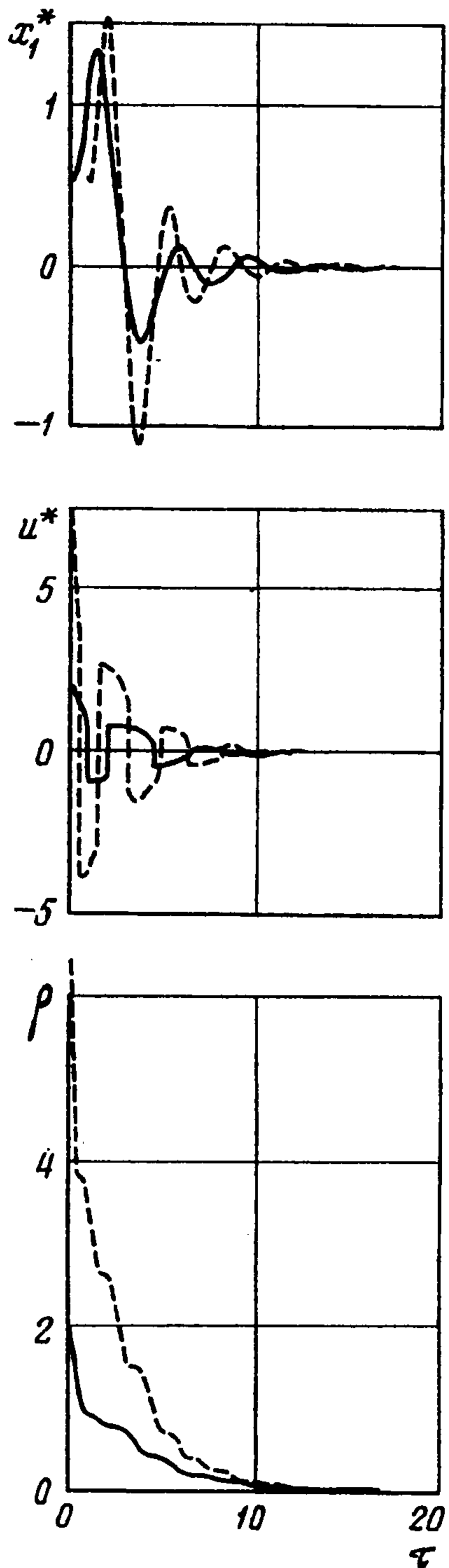
$$x^*(\tau + v) = F(v)x^*(\tau) + \int_0^v F(v-t) b dt u_1^0(\tau) + \int_0^v F(v-t) b_1 dt u^*(\tau - h)$$

В задаче (3.10) при $z = x^*(\tau + v), u(t) = u^*(\tau + v + t), t \in [-h, 0[$, управление

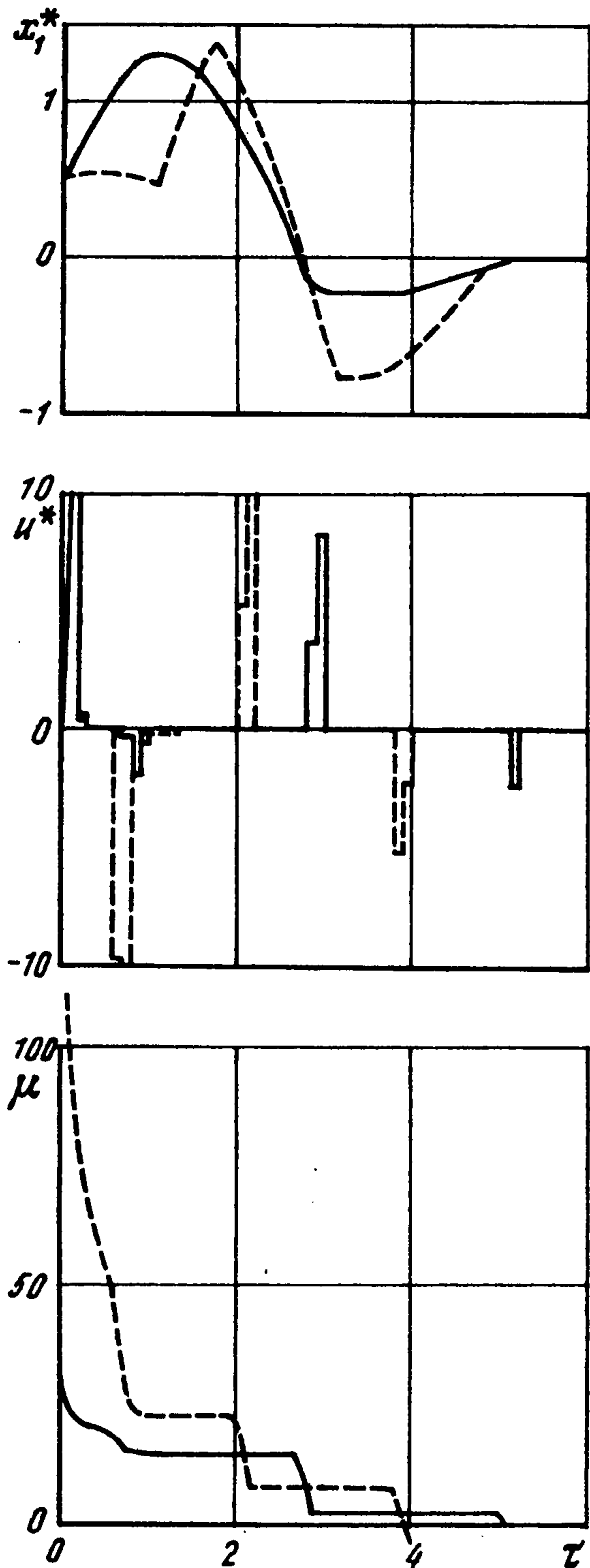
$$u_i(\tau + v) = u_{i+1}^0(\tau), \quad i = 0, 1, \dots, K - 1; \quad u_i(\tau + v) = 0, \quad i = K, K + 1, \dots, N \quad (3.11)$$

будет допустимым. При этом

$$\sum_{i=1}^K |u_i(\tau + v)| = \mu(x^*(\tau), u_\tau^*(\cdot)) - |u_0^0(\tau)|$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Ясно, что если $u_0^0(\tau) \neq 0$, то $\mu(x^*(\tau + v), u_{\tau+v}^*(\cdot)) < \mu(x^*(\tau), u_{\tau}^*(\cdot))$. Если $u_1^0(\tau) = 0$ и $\mu(x^*(\tau + v), u_{\tau+v}^*(\cdot)) = \mu(x^*(\tau), u_{\tau}^*(\cdot))$, то в задаче (3.10) при $z = x^*(\tau + v)$, $v(t) = u^*(\tau + v + t)$, $t \in [-h, 0[$, управление (3.11) является ОПУ. В силу неравенства $\mu(x^*(\tau), u_{\tau}^*(\cdot)) > 0$ найдется такое число $s < K$, что $u_s^0(\tau) \neq 0$, что обеспечивает выполнение неравенства $\mu(x^*(\tau + (s+1)v), u_{\tau+(s+1)v}^*(\cdot)) < \mu(x^*(\tau), u_{\tau}^*(\cdot))$.

Таким образом, функция Ляпунова $\mu(x^*(\tau), u_{\tau}^*(\cdot))$ монотонно убывает вдоль последовательности $x^*(kKv)$, $u_{kKv}^*(\cdot)$ ($k = 0, 1, \dots$). Рассуждениями, типичными для метода функций Ляпунова [10–13], показывается, что пределом может быть лишь нулевое значение: $\lim \mu(x^*(kKv), u_{kKv}^*(\cdot)) = 0, k \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $\|x^*(kKv)\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ и $\|x^*(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Поскольку $\mu(x^*(\tau + \nu), u_\tau^*(\cdot)) \leq \mu(x^*(\tau + \nu), u_\nu^*(\cdot)) - |u^*(\tau)|$, можно показать, что для реализации стабилизирующей обратной связи $u^*(k\nu)$ ($k = 0, 1, \dots$) справедливо следующее свойство

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u^*(k\nu)| \leq \sum_{k=0}^{K-1} |u^0(k\nu)|$$

где $u^0(k\nu)$ ($k = 0, 1, \dots, K - 1$) – ОПУ в задаче (3.10) для начальной позиции $z = x_0$, $u(t) = u_0(t)$, $t \in [-h, 0[$. Таким образом, еще до начала процесса стабилизации можно вычислить максимальное значение требуемых ресурсов управления.

Опишем алгоритм работы стабилизатора.

ЗОУ (3.10) эквивалентна задаче ЛП

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K (v_i + w_i) &\rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^K \int_{(i-1)\nu}^{i\nu} (F(N\nu - t)b + F(N\nu - t - h)b_1) dt (v_i - w_i) &= \\ &= -F(N\nu)z - \int_0^{M\nu} F(N\nu - t)b_1 \nu (\tau - h + t) dt \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$v_i + w_i \leq L, \quad v_i \geq 0, \quad w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, K$$

В каждый момент $\tau = k\nu$ стабилизатор строит двойственным методом решение $(v_i^0, w_i^0, i = 1, 2, \dots, K)$ задачи (3.12) для $z = x^*(\tau)$, $u(t) = u^*(\tau + t)$, $t \in [-h, 0[$, используя в качестве начальной опоры оптимальную опору задачи (3.12) для $z = x^*(\tau - \nu)$, $u(t) = u^*(\tau - \nu + t)$, $t \in [-h, 0[$. На вход системы на промежутке $[\tau, \tau + \nu[$ подается управление $u^*(t) = v_1^0 - w_1^0$.

В качестве иллюстрации рассмотрим успокоение системы (3.9) с помощью стабилизатора второго типа.

Вспомогательная задача в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\Theta-h} |u(t)| &\rightarrow \min, \quad \dot{x}_1(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_1(t) + x_2(t) + u(t-h), \quad \dot{x}_4(t) = 0,1x_1(t) - 1,02x_2(t) \\ x(0) &= z, \quad u(t) = 0, \quad t \in [-h, 0[, \quad x(\Theta) = 0 \\ |u(t)| &\leq 10, \quad t \in [0, \Theta - h[\end{aligned}$$

Параметрам задачи присваивались те же значения, что и при использовании стабилизатора первого типа.

На фиг. 7 представлены результаты успокоения при различных запаздываниях: реализовавшиеся состояния $x_1^*(\tau)$, $\tau \geq 0$, выработанные стабилизатором управления $u^*(\tau)$, $\tau \geq -h$, и значения функции Ляпунова $\mu(x^*(\tau), u_\tau^*(\cdot))$. Обозначения кривых те же, что на фиг. 6. Для каждого процесса подсчитывались значения сумм модулей реализовавшихся управлений

$$s = \sum_{k=0}^{89} |u^*(0,1k)|: 1) h = 0, s = 27,45; 2) h = 1, s = 64,69.$$

Работа частично поддержана Международной соросовской программой образования в области точных наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. N 6. С. 1294–1299.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. N 4. С. 3–19.
3. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Стабилизация динамических систем в условиях постоянно действующих возмущений // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 198–204.
4. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Стабилизация динамических систем при наличии запаздываний в канале обратной связи // Автоматика и телемеханика. 1996. N 6. С. 31–39.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 507 с.
6. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1963. 552 с.
7. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Минск: Изд-во "Университетское", 1984. 214 с.
8. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
9. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
10. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
11. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
12. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

Минск

Поступила в редакцию
19.XI.1996