

УДК 62–50

© 1998 г. Л.Д. Акуленко, А.М. Шматков

**СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО
ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ
ПРИВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ
В ЗАДАННОЕ ПОЛОЖЕНИЕ С НУЛЕВОЙ СКОРОСТЬЮ**

Рассматривается задача оптимального по быстродействию управления движением материальной точки посредством ограниченной по модулю силы. Требуется перевести ее из произвольного состояния движения в начало координат с нулевой скоростью. Посредством введения автономных сопряженных переменных удалось свести решение двухточечной задачи к отысканию оптимального корня некоторой функции, задаваемой аналитически. Методами математического моделирования получено полное решение задачи управления в форме синтеза. Найдены коэффициенты обратной связи по ортам векторов положения и скорости, построен алгоритм управления и функция Беллмана. Приведен расчет примеров с конкретными начальными данными.

1. Постановка задачи. Исследуются управляемые движения материальной точки постоянной массы под действием ограниченной силы. Требуется привести ее из произвольной текущей позиции в начало координат некоторой инерциальной системы с нулевой конечной скоростью ("мягкая встреча").

Рассматриваемая управляемая система, терминальные условия, ограничения и функционал описываются соотношениями вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \quad \dot{v} = u; \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0 \\ x(t_f) &= 0, \quad v(t_f) = 0; \quad t_f \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь x, v, u – векторы произвольной размерности $n, n \geq 2$; x^0, v^0 – (начальные) данные, получаемые в результате измерений. К задаче вида (1.1) элементарными заменами приводится несколько более общий случай произвольных постоянных значений массы m , ограничения управляющей силы $|u| \leq u_0$. Случай произвольного конечного значения переменной x^f и начального значения времени t_0 рассматривается аналогично.

Заметим также, что система (1.1) обладает центральной (сферической) симметрией и общий случай размерности $n \geq 2$ геометрического пространства эквивалентен плоскости ($n = 2$, см. далее). При $x^0 \neq 0, v^0 \neq 0, |(x^0, v^0)| < |x^0| |v^0|$ плоскость задается этими векторами. В случае равенства, т.е. $x^0 = 0$ или $v^0 = 0$, или $|(x^0, v^0)| = |x^0| |v^0|$ задача вырождается и становится одномерной. Далее рассматривается ситуация общего положения.

Постановка задачи оптимального быстродействия (1.1) достаточно стандартна и проста. К ней применимы методы оптимального управления движением в форме принципа максимума [1], динамического программирования [1, 2], l -проблемы моментов [3], а также

прямые вариационные и численные методы [4, 5]. Однако до настоящего времени решение задачи отсутствует. Особый интерес представляет исследование проблемы синтеза: построение оптимальных управлений по обратной связи $u_s = u^*(x, v)$ и функции Беллмана $t_f = T(x, v)$ – минимального времени приведения точки в состояние $(0, 0)$ из позиции x, v в момент времени t (оставшегося до встречи). Имеются частные результаты: классическая задача для одномерной системы $n = 1$, см. [1]; случай, когда значение $v(t_f)$ не задано ("жесткая" встреча), см. [1, 6, 7] и др. Как известно, основную, принципиальную трудность представляет решение краевой задачи для произвольных начальных условий и исследование аналитических свойств функции Беллмана и оптимального управления [1, 2, 6, 7]. Обычно для указанных задач управления эти функции кусочно-гладкие по фазовым переменным x, v .

Применим сперва к задаче (1.1) необходимые условия оптимальности метода динамического программирования [1, 2, 5]. Для функции Беллмана $T = T(x, v)$ получим функционально-дифференциальное уравнение вида

$$(T'_x, v) + \min_u (T'_v, u) = -1, \quad |u| \leq 1 \quad (1.2)$$

Штрихами обозначены соответствующие производные, минимум скалярного произведения берется по вектору u , принимающему значения из единичного n -мерного шара. Кроме того, функция T должна быть строго положительной при $x, v \neq 0$ и обращаться в нуль при $x = v = 0$.

Выполняя операцию минимизации в (1.2), приходим к задаче Коши для нелинейного уравнения в частных производных (уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана [1, 2, 5, 8]) вида

$$(p, v) + |q| = 1, \quad p = -T'_x, \quad q = -T'_v; \quad u^* = q|q|^{-1} \quad (1.3)$$

$$T = T(x, v) > 0, \quad |x| + |v| > 0; \quad T(0, 0) = 0$$

Решение задачи (1.3) ищется в классе кусочно-гладких функций.

Отметим, что естественное условие $T > 0$ необходимо, поскольку при его игнорировании можно получить абсурдный результат. Действительно, линейная по v функция $T = (e, v)$, где e – постоянный единичный n -вектор ($|e| = 1$), удовлетворяет всем соотношениям (1.3) (кроме $T > 0$), но заведомо не является функцией Беллмана задачи.

Применение динамического программирования к искомому решению задачи синтеза сопряжено с существенными трудностями, связанными с негладкостью функции Беллмана T [1, 2]. Она претерпевает разрывы первого рода на некоторых многообразиях меньшей размерности, а ее производные будут обобщенными (сингулярными) функциями. Далее будем применять условия оптимальности в форме принципа максимума [1].

Введем переменные (импульсы) p, q , сопряженные фазовым переменным x, v соответственно. Решение задачи оптимального быстрогодействия приводится к построению решения двухточечной краевой задачи

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = u^*, \quad u^* = q|q|^{-1}; \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0, \quad x(t_f) = 0 \quad (1.4)$$

$$v(t_f) = 0, \quad p(t) = p^0 = \text{const}, \quad q(t) = -p^0 t + q^0; \quad q^0 = \text{const}$$

причем p, q допускают нормировку. Система (1.4) полностью интегрируется в элементарных функциях. Требуется определить допустимые значения неизвестных p^0, q^0 и $t_f > 0$, удовлетворяющие конечным условиям для x, v .

2. Построение фазовой траектории. Выпишем явное аналитическое выражение для фазовой траектории $x(t)$, $v(t)$. Используя структуру оптимального управления $u^*(t)$ и подставляя его в уравнения движения согласно (1.4), получим после интегрирования представление для вектора скорости $v(t)$ в элементарных функциях вида

$$v(t) = v^0 + \int_0^t \frac{Q(\tau)}{R(\tau)} d\tau = v^0 + \frac{1}{\rho^2} [-\xi R(\tau) + (\rho\eta - \sigma\xi)V(\tau)]_0^t$$

$$Q(t) = -\xi t + \eta, \quad R(t) = |Q(t)| = (\rho^2 t^2 - 2\sigma\rho t + 1)^{1/2}$$

$$V(t) = \operatorname{arsh} \kappa, \quad \kappa = (\rho t - \sigma)(1 - \sigma^2)^{-1/2}, \quad \rho = |\xi|, \quad \eta = q^0 |q^0|^{-1}$$

$$\xi = \rho^0 |q^0|^{-1}, \quad |\eta| = 1, \quad \operatorname{arsh} \kappa = \ln[\kappa + (1 + \kappa^2)^{1/2}]$$

$$(\xi, \eta) = \rho\sigma, \quad \sigma = \cos(\xi, \eta), \quad -1 \leq \sigma \leq 1; \quad u^* = Q(t) / R(t)$$
(2.1)

Функции Q, R в (2.1) определены для всех t, ξ, η , причем V нечетна по κ , поскольку $-\kappa + (1 + \kappa^2)^{1/2} = [\kappa + (1 + \kappa^2)^{1/2}]^{-1}$. Отметим, что в (2.1) упомянутая ранее нормировка проведена на величину $|q^0|$. В результате функция $v(t)$ зависит явным образом от времени t , известного (измеренного) n -вектора параметров v^0 , а также от $2n - 1$ неизвестных ξ, η , подлежащих определению из граничных (при $t = t_f$, где t_f также неизвестно) условий (1.1). Параметры σ, ρ определяются через n -векторы ξ, η , причем $|\eta| = 1$.

На основе найденного в (2.1) представления $v(t)$ с использованием формулы повторного интегрирования получим аналогичное элементарное представление для вектора положения $x(t)$:

$$x(t) = x^0 + v^0 t + \int_0^t \frac{(t - \tau)Q(\tau)}{R(\tau)} d\tau = x^0 + tv(t) +$$

$$+ \frac{\xi}{2\rho^3} [(\rho\tau + 3\sigma)R(\tau) + (3\sigma^2 - 1)V(\tau)]_0^t - \frac{\eta}{\rho^2} [\sigma V(\tau) + R(\tau)]_0^t$$
(2.2)

Функции $v(t), R(t), V(t)$ определены согласно (2.1). В (2.1), (2.2) и далее верхнее $\tau = t$ и нижнее $\tau = 0$ значения τ пока не подставляются с целью сокращения записи. Таким образом, получены явные представления искомых фазовых переменных $x(t), v(t)$ с помощью элементарных алгебраических и логарифмических функций. Для удобства дальнейших построений они могут быть представлены в виде "линейных выражений" относительно векторов ξ, η следующим образом:

$$v(t) = v^0 + V_\xi \xi + V_\eta \eta, \quad V_\xi = -\rho^{-2} (\sigma V + R)|_0^t, \quad V_\eta = \rho^{-1} V|_0^t$$

$$x(t) = x^0 + v^0 t + X_\xi \xi + X_\eta \eta, \quad X_\eta = \rho^{-2} [-R + (\rho t - \sigma)V]|_0^t$$

$$X_\xi = \frac{1}{2\rho^3} [(-\rho t + 3\sigma)R + (-2\rho\sigma t + 3\sigma^2 - 1)V]|_0^t$$
(2.3)

Здесь $V_{\xi, \eta}(t), X_{\xi, \eta}(t)$ – известные скалярные функции t , зависящие также от неизвестных параметров ρ, σ ; они обращаются в нуль при $t = 0$.

Во избежание недоразумений следует заметить, что зависимость x, v от ξ, η на самом деле будет существенно нелинейной, поскольку коэффициенты $X_{\xi, \eta}, V_{\xi, \eta}$ содержат алгебраические и трансцендентные (логарифмические) функции от ρ, σ . Эти функции достаточно гладкие для рассматриваемых значений аргумента $t \geq 0$ и параметров $\rho \geq 0, |\sigma| < 1$. При $|\sigma| = 1$ требуется отдельное рассмотрение, см. разд. 4.

3. Редукция системы граничных условий. Основную трудность в решении задачи оптимального быстрогодействия (1.1) представляет эффективное построение решения краевой задачи (1.4), т.е. определение неизвестных ξ , η и минимального значения t_f для произвольных значений x^0 , ν^0 . Имеем систему $2n$ линейных алгебраических уравнений относительно векторов ξ , η , которая получается из (2.3) согласно (1.4): $x(t_f) = 0$, $\nu(t_f) = 0$, т.е.

$$X_\xi(t_f)\xi + X_\eta(t_f)\eta = -x^0 - \nu^0 t_f \quad (3.1)$$

$$V_\xi(t_f)\xi + V_\eta(t_f)\eta = -\nu^0$$

Система (3.1) однозначно разрешима для произвольных x^0 , ν^0 , t_f , ρ , σ , поскольку на основе неравенства Буняковского–Коши устанавливается, что ее определитель отличен от нуля:

$$X_\xi(t_f)V_\eta(t_f) - V_\xi(t_f)X_\eta(t_f) \neq 0$$

Система (3.1) имеет блочно-диагональную матрицу; из нее элементарно (как для скалярных ξ , η) находятся искомые ξ , η в виде линейных функций от x^0 , ν^0 :

$$\xi = \xi^*(x^0, \nu^0, t_f, \rho, \sigma) \equiv \xi_x^* x^0 + \xi_\nu^* \nu^0 \quad (3.2)$$

$$\eta = \eta^*(x^0, \nu^0, t_f, \rho, \sigma) \equiv \eta_x^* x^0 + \eta_\nu^* \nu^0$$

Здесь $\xi_{x,\nu}^*(t_f, \rho, \sigma)$, $\eta_{x,\nu}^*(t_f, \rho, \sigma)$ – скалярные функции неизвестных t_f , ρ , σ . В результате применения элементарных операций скалярного произведения получим систему трех трансцендентных уравнений относительно неизвестных t_f , ρ , σ :

$$\begin{aligned} \eta^{*2} &= \eta_x^{*2} x^{02} + 2\eta_x^* \eta_\nu^* |x^0| |\nu^0| c + \eta_\nu^{*2} \nu^{02} = 1 \\ \xi^{*2} &= \xi_x^{*2} x^{02} + 2\xi_x^* \xi_\nu^* |x^0| |\nu^0| c + \xi_\nu^{*2} \nu^{02} = \rho^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$(\xi^*, \eta^*) = \xi_x^* \eta_x^* x^{02} + (\xi_x^* \eta_\nu^* + \xi_\nu^* \eta_x^*) |x^0| |\nu^0| c + \xi_\nu^* \eta_\nu^* \nu^{02} = \rho\sigma$$

Здесь c – известный скалярный параметр, определяемый аналогично σ (см. (2.1)) посредством операции скалярного произведения векторов x^0 , ν^0 : $(x^0, \nu^0) = |x^0| |\nu^0| c$. Неизвестные t_f , ρ , σ являются аргументами элементарных трансцендентных функций $\xi_{x,\nu}^*$, $\eta_{x,\nu}^*$, см. (2.1)–(2.3) и (3.1)–(3.2).

Интересно отметить, что система (3.3) определяется тремя параметрами $|x^0|$, $|\nu^0|$, c , характеризующими векторы x^0 , ν^0 в плоскости, задаваемой этими векторами ($|c| < 1$). Простой вырожденный случай $c = \pm 1$ изучен в [1, 2]. Он отвечает одномерной системе, т.е. движению объекта (материальной точки) по прямой, соединяющей геометрическую точку x^0 и начало координат.

Заметим, что система (3.3) линейна по известным (измеренным) параметрам x^{02} , ν^{02} , (x^0, ν^0) и может быть разрешена относительно них. Эти параметры определяются как функции неизвестных $t_f > 0$, $\rho > 0$, $-1 \leq \sigma \leq 1$.

Окончательное решение системы (3.3) можно получить численными или численно-графическими методами. Однако "прямой" подход представляется трудно реализуемым, что в первую очередь связано с высокой размерностью системы (3.3) (она равна трем). Введение автомобильных переменных и уменьшение размерности разрешаемой системы может существенно уменьшить вычислительные затраты и получить искомое решение в наглядной численно-графической форме [7, 8].

Анализ выражений (2.1), (2.2) показывает, что предпочтительнее ввести вектор $\zeta = t_f \xi$ вместо ξ ; его модуль $|\zeta| = \mu = t_f \rho$. Тогда векторные уравнения относительно

ζ, η , аналогичные уравнениям (3.1) для ξ, η , преобразуются к виду

$$\begin{aligned} x^0 &= t_f^2(a_\zeta \zeta + a_\eta \eta), \quad v^0 = t_f(b_\zeta \zeta + b_\eta \eta) \\ a_\zeta &= a_\zeta(\mu, \sigma) = -(1/2\mu^3)[(\mu + 3\sigma)a + \mu + (3\sigma^2 - 1)b] \\ a_\eta &= a_\eta(\mu, \sigma) = \mu^{-2}(a + \sigma b), \quad b_\zeta = b_\zeta(\mu, \sigma) = \mu^{-2}(a + \sigma b) \\ b_\eta &= b_\eta(\mu, \sigma) = b/\mu, \quad a = a(\mu, \sigma) \equiv R|_0^{t_f} = (\mu^2 - 2\mu\sigma + 1)^{1/2} - 1 \\ b &= b(\mu, \sigma) \equiv V|_0^{t_f} = \operatorname{arsh}(\mu - \sigma)(1 - \sigma^2)^{-1/2} + \operatorname{arsh} \sigma(1 - \sigma^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отметим, что $a = b = 0$ при $\mu = 0$, а коэффициенты $a_{\zeta, \eta}, b_{\zeta, \eta}$ имеют конечные пределы при $\mu \rightarrow 0$, если $\sigma \neq \pm 1$. Это свойство следует непосредственно из выражений (3.4), либо может быть установлено из (2.1), (2.2) при $t = t_f$ посредством замены переменной интегрирования $\tau = t_f \theta$ (тогда верхний предел для θ будет равен $\theta_f = 1$).

Перейдем к анализу векторных уравнений (3.4), связывающих известные (измеренные) величины x^0, v^0 и неизвестные ζ, η, t_f . В отличие от вышеизложенного (см. (3.2)) не будем их разрешать относительно ζ, η . Аналогично (3.3) посредством операций скалярного произведения получим систему трех уравнений для определения неизвестных параметров t_f, μ, σ :

$$\begin{aligned} x^{02} &= t_f^4(a_\zeta^2 \mu^2 + 2a_\zeta a_\eta \mu \sigma + a_\eta^2) \equiv t_f^4 f_x^2(\mu, \sigma) \geq 0 \\ v^{02} &= t_f^2(b_\zeta^2 \mu^2 + 2b_\zeta b_\eta \mu \sigma + b_\eta^2) \equiv t_f^2 f_v^2(\mu, \sigma) \geq 0 \\ |x^0| |v^0| c &= t_f^3 [a_\zeta b_\zeta \mu^2 + (a_\zeta b_\eta + a_\eta b_\zeta) \mu \sigma + a_\eta b_\eta] \equiv t_f^3 f_{xv}(\mu, \sigma) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Существенное отличие системы (3.5) от (3.4) состоит в том, что введение параметра $\mu = \rho t_f$ позволяет отделить неизвестную t_f и получить определяющую систему двух уравнений относительно неизвестных μ, σ . Эта система строится неоднозначно в зависимости от значений $l = |x^0|, h = |v^0|$.

4. Определение решения краевой задачи. Если величина скорости h достаточно велика, то предпочтительнее использовать уравнения

$$l^2 h^{-4} \equiv \varphi_v^2 = f_x^2(\mu, \sigma) f_v^{-4}(\mu, \sigma), \quad clh^{-3} \equiv \psi_v = f_{xv}(\mu, \sigma) f_v^{-3}(\mu, \sigma) \quad (4.1)$$

для определения неизвестных μ, σ . Требуется найти допустимые корни $(\mu_i, \sigma_i), \mu_i \geq 0, |\sigma_i| \leq 1$, доставляющие минимум функционалу t_f . Согласно (3.5) получим

$$t_f^* = \min_i t_{fi}, \quad t_{fi} = t_f(h, \mu_i, \sigma_i), \quad t_f = hl |f_v(\mu, \sigma)|^{-1} \quad (4.2)$$

$$\mu_i = \mu_i(\varphi_v^2, \psi_v^2), \quad \sigma_i = \sigma_i(\varphi_v^2, \psi_v^2)$$

Здесь φ_v^2, ψ_v^2 – известные (измеряемые) величины, определяемые на основе l, h, c из (4.1). Из (4.2) следует, что оптимальным будет тот корень (μ_i, σ_i) , который доставляет максимум функции $|f_v(\mu_i, \sigma_i)|$.

Если же расстояние l достаточно велико, то для определения μ, σ следует использовать соотношения, обратные к (4.1)

$$h^4 l^{-2} \equiv \varphi_x^2 = f_v^4(\mu, \sigma) f_x^{-2}(\mu, \sigma), \quad chl^{-1/2} \equiv \psi_x = f_{xv}(\mu, \sigma) |f_x(\mu, \sigma)|^{-3/2} \quad (4.3)$$

$$t_{fi} = l^{1/2} |f_x(\mu_i, \sigma_i)|^{-1/2} \rightarrow \min, \quad \mu_i = \mu_i(\varphi_x, \psi_x), \quad \sigma = \sigma_i(\varphi_x, \psi_x)$$

Из (4.3) находим, что оптимальным будет корень (μ_i, σ_i) , доставляющий максимум $|f_x|$. Отметим, что Φ_v^2 и Φ_x^2 функционально связаны: $\Phi_v^2 = \Phi_x^{-2}$. В прикладном аспекте соотношения (4.1)–(4.3) неудобны, поскольку величины $\Phi_{v,x}$, $\Psi_{v,x}$ могут быть довольно большими ("неограниченными" при $l/h^2 \rightarrow \infty$ или $h^2/l \rightarrow \infty$, что потребует значительных вычислительных затрат. Вычислительные трудности можно уменьшить введением нормированных величин $\Phi_{x,v}$:

$$\begin{aligned}\Phi_x^2 &\equiv \frac{l^2}{l^2 + h^4} = f_x^2(\mu, \sigma)F^{-2}(\mu, \sigma) \equiv L^2(\mu, \sigma) \\ \Phi_v^2 &\equiv \frac{h^4}{l^2 + h^4} = f_v^4(\mu, \sigma)F^{-2}(\mu, \sigma) \equiv H^2(\mu, \sigma) \\ \Psi &\equiv clh(l^2 + h^4)^{-3/4} = f_{xv}(\mu, \sigma)F^{-3/2}(\mu, \sigma) \\ F^2(\mu, \sigma) &\equiv f_x^2(\mu, \sigma) + f_v^4(\mu, \sigma), \quad 0 \leq \Phi_{x,v}^2 \leq 1 \\ t_f &= (l^2 + h^4)^{1/4} |F(\mu, \sigma)|^{-1/2}, \quad t_f^* = \min_i t_f(\mu_i, \sigma_i)\end{aligned}\tag{4.4}$$

Здесь измеряемыми (заданными) и вычисляемыми величинами являются $\Phi_{x,v}^2$, Ψ . Отметим, что Φ_x^2 и Φ_v^2 функционально связаны: $\Phi_x^2 + \Phi_v^2 = 1$ (как ранее Φ_x^2 , Φ_v^2). Неизвестные (μ, σ) определяются парой независимых уравнений для Φ_x^2 , Ψ или Φ_v^2 , Ψ . Поскольку выражение для Ψ неограниченно при $l, h \rightarrow 0$, то более предпочтительно использование уравнения

$$c = f_{xv}(\mu, \sigma) |f_x(\mu, \sigma)|^{-1} |f_v(\mu, \sigma)|^{-1} \equiv C(\mu, \sigma), \quad |c| \leq 1\tag{4.5}$$

В силу интегрального неравенства Буняковского–Коши правая часть C в (4.5) не превосходит по модулю единицу для всех допустимых значений $\mu \geq 0$, $|\sigma| \leq 1$.

Таким образом, далее требуется разрешить какую-либо пару уравнений: $\Phi_x^2 \equiv L^2$, $c = C$ или $\Phi_v^2 \equiv H^2$, $c = C$ относительно (μ, σ) и выбрать оптимальный корень (μ_i, σ_i) . Из (4.4) следует, что этот корень соответствует максимуму функции $|F(\mu, \sigma)|$:

$$(\mu^*, \sigma^*) = (\mu_i, \sigma_i)^* = \arg \max_i |F(\mu_i, \sigma_i)|\tag{4.6}$$

После определения оптимальных значений (μ^*, σ^*) и t_f^* можно переходить к построению управлений и траекторий.

5. Построение оптимального управления. Итак, пусть оптимальные значения μ^* , σ^* , t_f^* определены. Тогда в соответствии с (2.1) может быть построено оптимальное управление в форме программы и синтеза. Согласно произведенной в разд. 3 (см. (3.4)) замене $\zeta = t_f \xi$, выражение для программного управления преобразуется следующим образом:

$$u_p^* = Q^*(t) / |Q^*(t)|; \quad Q^*(t) = -\zeta^*(t/t_f^*) + \eta^*, \quad |\zeta^*| = \mu^*\tag{5.1}$$

$$|Q^*(t)| = (\mu^{*2}(t/t_f^*)^2 - 2\sigma^*\mu^*(t/t_f^*) + 1)^{1/2}, \quad |\eta^*| = 1$$

Оптимальные значения n -векторов ζ^* , η^* в (5.1) определяются уравнениями (3.4), решение которых строится аналогично (3.2). Это решение находится элементарно, поскольку матрица системы состоит из четырех $(n \times n)$ -блоков, каждый из которых

пропорционален единичной матрице. В результате получаем выражения

$$\begin{aligned}\zeta^* &= \alpha_x x^0 + \alpha_v v^0, \quad \alpha_x = b_\eta^* / (t_f^{*2} \delta^*), \quad \alpha_v = -a_\eta^* / (t_f^* \delta^*) \\ \eta^* &= \beta_x x^0 + \beta_v v^0, \quad \beta_x = -b_\zeta^* / (t_f^{*2} \delta^*), \quad \beta_v = -a_\zeta^* / (t_f^* \delta^*) \\ \delta^* &= \alpha_\zeta^* b_\eta^* - a_\eta^* b_\zeta^*, \quad a_{\zeta, \eta}^* = a_{\zeta, \eta}(\mu^*, \sigma^*), \quad b_{\zeta, \eta}^* = b_{\zeta, \eta}(\mu^*, \sigma^*)\end{aligned}\quad (5.2)$$

функции $a_{\zeta, \eta}$, $b_{\zeta, \eta}$ определяются согласно (3.4), где μ^* , σ^* зависят только от двух параметров, например c и L^2 (или H^2).

В полученных выражениях (5.2) можно избавиться от величины t_f^* и представить их в виде

$$\begin{aligned}\zeta^* &= (b_\eta^* / \delta^*) F^* \Phi_x n_x^0 - (a_\eta^* / \delta^*) (F^* \Phi_v)^{1/2} n_v^0 \\ \eta^* &= -(b_\zeta^* / \delta^*) F^* \Phi_x n_x^0 + (a_\zeta^* / \delta^*) (F^* \Phi_v)^{1/2} n_v^0 \\ n_x^2 &= x^0 / l^0, \quad |n_x^0| = 1, \quad n_v^0 = v^0 / h, \quad |n_v^0| = 1\end{aligned}\quad (5.3)$$

Подставив выражения ζ^* , η^* вида (5.2) или (5.3) в (5.1), получим искомое оптимальное управление в форме программы, зависящей от t , x^0 , v^0 и трех параметров движения l , h , c :

$$u_p^* = u_p^*(t, x^0, v^0, l, h, c), \quad l = |x^0|, \quad h = |v^0|, \quad c = \cos(x^0, v^0) \quad (5.4)$$

Время быстрогодействия $t_f^* = t_f^*(l, h, c)$ определено согласно (4.2)–(4.4), (4.6), а оптимальные траектории определены выражениями (2.3), в которых $\xi = \xi^* = \zeta^* / t_f^*$, $\rho = \rho^* = \mu^* / t_f^*$, $\sigma = \sigma^*$. В результате задача программного оптимального управления при фиксированных x^0 , v^0 полностью решена.

Рассмотрим теперь проблему построения синтеза оптимального быстрогодействия. Предположим, что определены корни μ^* , σ^* и значение t_f^* как функции переменных $l = |x|$, $h = |v|$, $c = \cos(x, v)$ из достаточно широкой области значений $(l, h) \in D \subset R^2$ и $-1 \leq |c| \leq 1$. Тогда на основе (5.1) получаем управление по обратной связи u_s^* и функцию Беллмана T задачи:

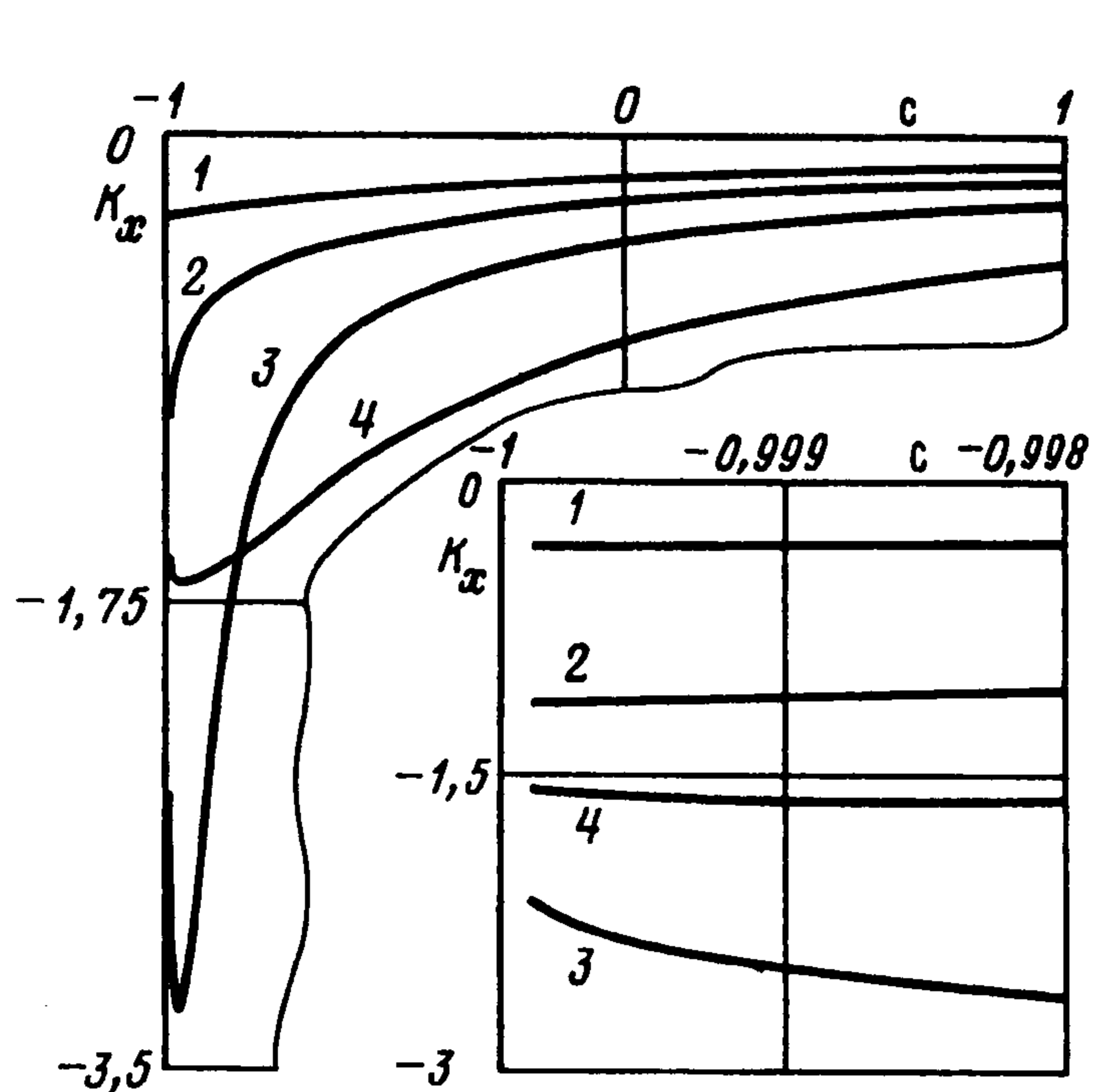
$$\begin{aligned}u_s^* &= u_s^*(l, h, c, x, v) = \eta^*(l, h, c, x, v) \\ \eta^* &= -(b_\zeta^* / (T^2 \delta^*)) x + (a_\zeta^* / (T \delta^*)) v \equiv k_x x + k_v v = \\ &= -(b_\zeta^* / \delta^*) F^* \Phi_x n_x + (a_\zeta^* / \delta^*) (F^* \Phi_v)^{1/2} n_v \equiv K_x n_x + K_v n_v\end{aligned}\quad (5.5)$$

$$\mu^* = \mu^*(|x|, |v|, (x, v) |x|^{-1} |v|^{-1}), \quad \sigma^* = \sigma^*(|x|, |v|, (x, v) |x|^{-1} |v|^{-1})$$

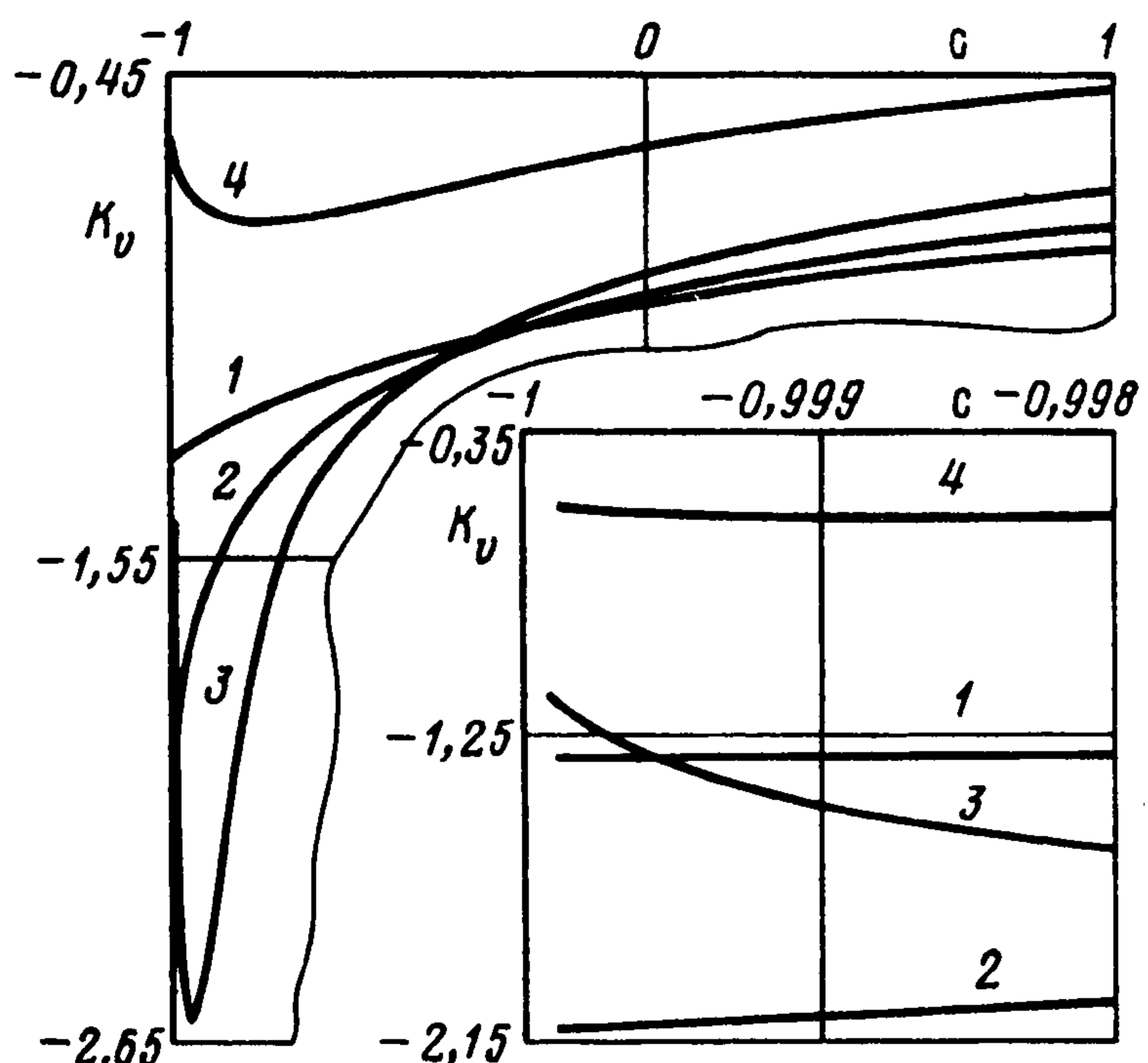
$$n_x = x |x|^{-1}, \quad n_v = v |v|^{-1}$$

$$T(x, v) = t_f^*(|x|, |v|, (x, v) |x|^{-1} |v|^{-1}) = (l^2 + h^4)^{1/4} |F^*(\mu, \sigma)|^{-1/2}$$

Здесь $k_{x,v}$ – коэффициенты обратных связей по x , v ; выражения $K_x = k_x |x|$, $K_v = k_v |v|$ имеют смысл коэффициентов обратных связей по ортам n_x , n_v соответственно. Отметим, что $K_{x,v}$ зависят от двух аргументов: c и Φ_x^2 , которые находятся на основе измерений и вычислений по элементарным формулам: $c = (x, v) |x|^{-1} |v|^{-1}$, $\Phi_x^2 = x^2 (x^2 + v^4)^{-1}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Выражения (5.5) получаются из (5.4) заменами $l = |x|$, $h = |v|$, $c = (x, v)|x|^{-1}|v|^{-1}$, т.е. переходом $x^0 \rightarrow x$, $v^0 \rightarrow v$ и $t \rightarrow t - t_0$, $t_0 \rightarrow t$, т.е. $t \rightarrow 0$. Функция Беллмана T в (5.5) имеет смысл времени быстрогодействия из текущей фазовой точки $x(t) = x$, $v(t) = v$. Построение и анализ функций μ^* , σ^* , T представляет основную вычислительную и аналитическую трудность излагаемого подхода.

Для отыскания неизвестных σ и μ необходимо решить систему трансцендентных уравнений, представленную в следующем замкнутом виде:

$$f_x^2 / F^2 = \Phi_x^2, \quad f_{xv} / (|f_x| |f_v|) = c$$

$$F^2 = f_x^2 + f_v^2, \quad f_x^2 = a_\zeta^2 \mu^2 + 2a_\zeta a_\eta \mu \sigma + a_\eta^2, \quad f_v^2 = b_\zeta^2 \mu^2 + 2b_\zeta b_\eta \mu \sigma + b_\eta^2$$

$$f_{xv} = a_\zeta b_\zeta \mu^2 + (a_\zeta b_\eta + a_\eta b_\zeta) \mu \sigma + a_\eta b_\eta$$

(5.6)

$$a_\zeta = -\mu^{-3} ((\mu + 3\sigma)a + \mu + (3\sigma^2 - 1)b)$$

$$a_\eta = b_\zeta = (a + \sigma b) / \mu^2, \quad b_\eta = -b / \mu, \quad a = (\mu^2 - 2\mu\sigma + 1)^{1/2} - 1$$

$$b = \ln((\mu - \sigma + (\mu^2 - 2\mu\sigma + 1)^{1/2}) / (1 - \sigma))$$

Пусть $\omega = (\mu - \sigma + (\mu^2 - 2\mu\sigma + 1)^{1/2}) / (1 - \sigma)$, где ω — новый неизвестный параметр, причем $\omega \geq 1$, и, кроме того, при $0 \leq \mu < 1$ должно выполняться дополнительное условие $\omega \leq 1/(1 - \mu)$. Тогда

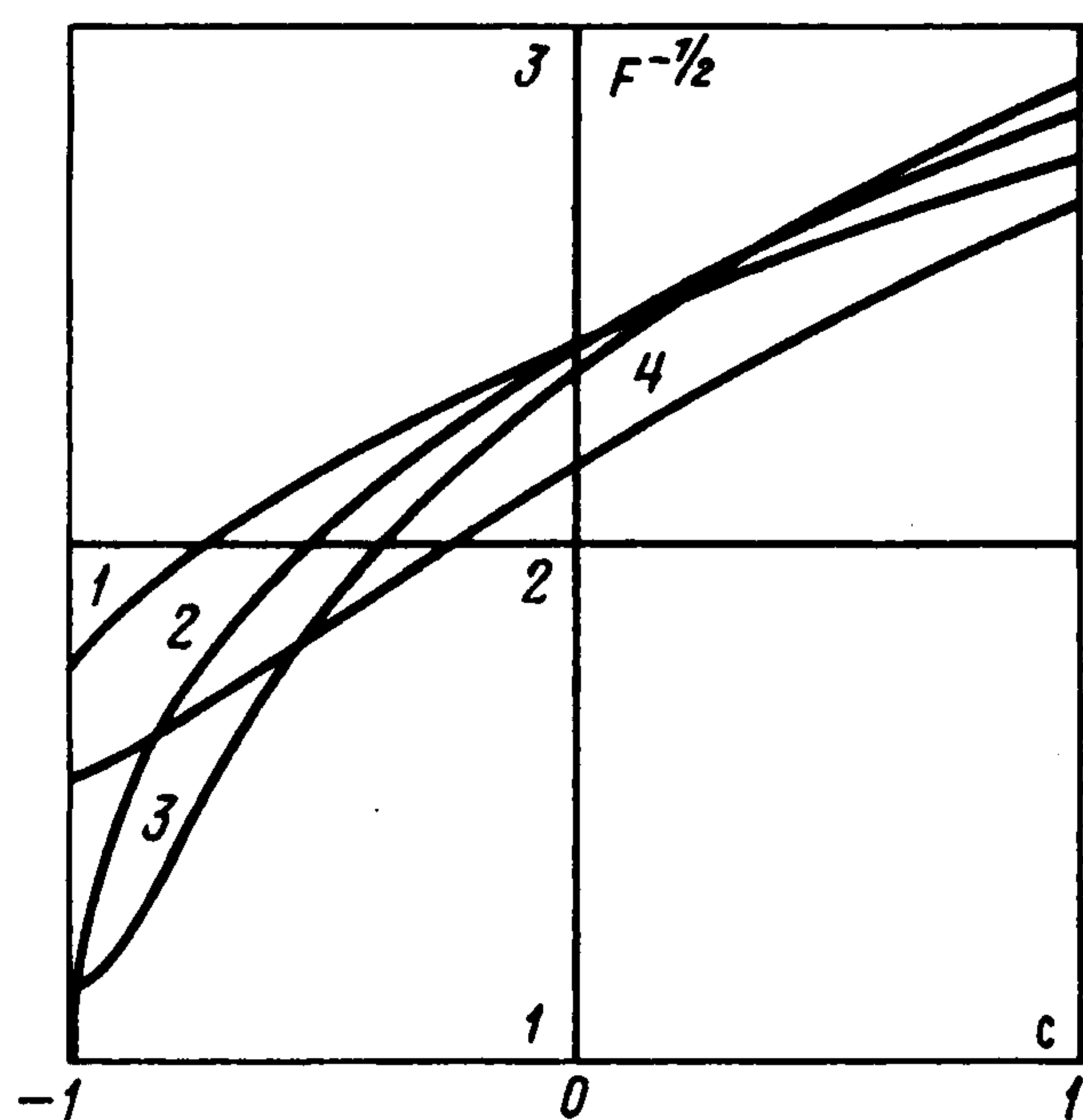
$$\sigma = (\omega^2 - 2\mu\omega - 1)(\omega - 1)^{-2}$$

(5.7)

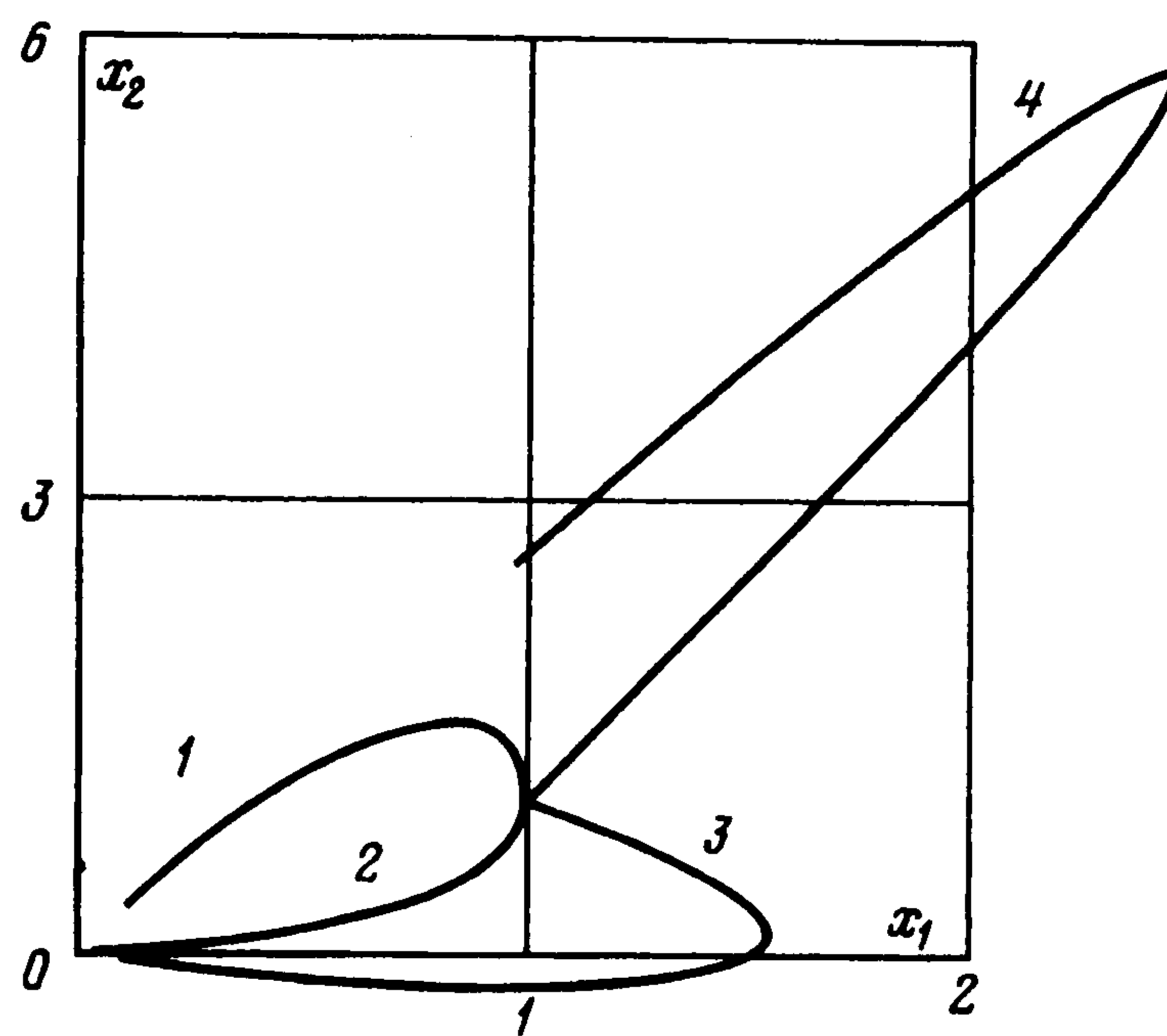
Подставим (5.7) в первое из уравнений системы (5.6) и получим уравнение четвертой степени относительно μ , что позволяет выразить μ через ω и тем самым свести проблему к решению одного трансцендентного уравнения относительно ω . Соответствующие выражения очень громоздки и не могут быть приведены здесь.

В результате применения компьютерной алгебры и численных методов построено полное решение задачи синтеза: оптимальное управление по принципу обратной связи и выражение для функции Беллмана.

На фиг. 1, 2 приведены семейства графиков (кривые 1–4) для коэффициентов обратных связей $K_x(c, \Phi_x^2)$, $K_v(c, \Phi_x^2)$ по ортам векторов положения x и скорости v



Фиг. 3



Фиг. 4

соответственно. Переменная c , $|c| \leq 1$ принимается за аргумент, а Φ_x^2 – за параметр семейства, который принимает соответственно значения $\Phi_x^2 = 0,1, 0,2, 0,4$ и $0,9$. Врезки на фиг. 1, 2, показывают поведение функций вблизи значения $c = -1$ и практически соответствуют движению по прямой к началу координат в режиме торможения.

На фиг. 3 приведено семейство кривых $F^{-1/2}(c, \Phi_x^2)$ для указанных значений c и Φ_x^2 . На его основе строится функция Беллмана $T = (l^2 + h^4)^{1/4} F^{-1/2}$. Построенный алгоритм вычислений позволяет получать графики для произвольных достаточно частых значений параметра семейства Φ_x^2 , см. расчет примеров в следующем разделе.

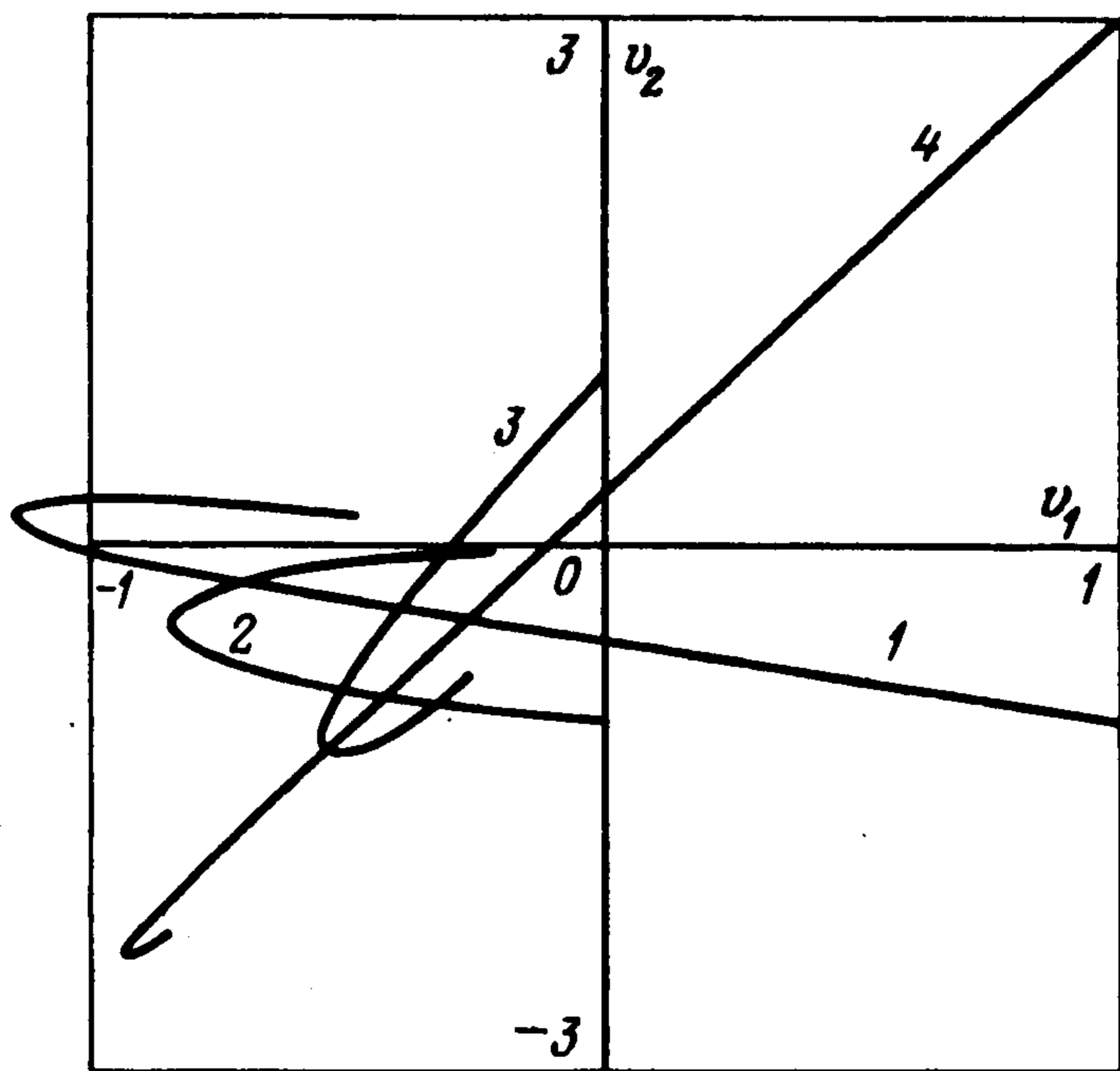
6. Примеры. На фиг. 4 под номерами 1–4 показаны траектории, а на фиг. 5 под теми же номерами – соответствующие соотношения между компонентами скорости, получившиеся в результате применения развитого выше подхода к решению задачи о "мягкой встрече" для системы

$$\ddot{x} = u, \quad x \in R^2, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = (1, 1) \quad (6.1)$$

при различных начальных значениях скорости.

Интегрирование производилось с помощью стандартного метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности с переменным шагом и контрольным членом в форме Ингланда [9]. Среднее время счета составляло около 30 мин при использовании компьютера IBM PC AT 486 DX 40 и сильно зависело от необходимой конечной точности. При этом оптимизации не подвергался ни исходный текст на языке C++, ни результирующий машинный код, а потребности в памяти не превышали 128 КВ. Использование стандартных оптимизационных возможностей в сочетании с привлечением дополнительной памяти для хранения промежуточных результатов способно значительно уменьшить время счета.

Следует заметить, что уравнения, описывающие движение, сильно вырождаются в случае, когда оптимальное управление направлено точно в начало координат. В связи с этим расчет проводился до момента, когда величина c отличалась от -1 не более чем на 10^{-5} . Дальнейшее движение для всех рассмотренных случаев сводится к торможению, причем $\Phi_x^2 \rightarrow 0,2$, а $c \rightarrow -1$. Указанные предельные значения достигаются лишь в конечной точке. В большинстве практических задач дальнейшее повышение точности, вероятно, не имеет смысла, поскольку в реальных условиях приходится учитывать влияние различных возмущений. Кроме того, существует большое количество методов, специально предназначенных для гашения малых отклонений. В рамках же данной теории можно добиться повышения точности уменьшением максимального шага интегрирования, применением



Фиг. 5

стигало величин порядка 10^6 . Это наводит на мысль о возможности построения соответствующей асимптотики.

Эти наблюдения показывают возможные направления дальнейших аналитических исследований.

Вместе с тем полученные результаты позволяют получать численное решение задачи о "мягкой встрече" с использованием сравнительно небольших вычислительных ресурсов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00221, 96-01-00018).

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
5. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Наука, 1972. 544 с.
6. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
7. Акуленко Л.Д. Возмущенная оптимальная по быстродействию задача управления конечным положением точки посредством ограниченной силы // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 12–21.
8. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 366 с.
9. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990. 336 с.