УДК 531.36

© 1998 г. А.В. Карапетян, И.И. Нараленкова

О БИФУРКАЦИИ РАВНОВЕСИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Обсуждается проблема бифуркации положений равновесия консервативных систем, потенциальная энергия которых не зависит от знаков входящих в него переменных. Предлагается методика последовательного определения положений равновесия таких систем, начиная с тривиальных, в порядке возрастания их сложности.

Известно, что проблема отыскания положений равновесия или стационарных движений консервативных механических систем и исследования их устойчивости сводится к задаче анализа критических точек потенциальной или приведенной потенциальной энергии этой системы. Критические точки потенциальной энергии определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений, полное исследование которой нередко сопряжено с большими вычислительными трудностями. К счастью, в механических задачах потенциальная энергия нередко инвариантна относительно тех или иных замен переменных, что связано с наличием тех или иных дискретных групп симметрий в этих задачах. Это свойство позволяет определять простейшие классы решений указанной системы алгебраических уравнений только из соображений симметрии. При этом остается открытым вопрос о наличии или отсутствии других (не симметричных) классов решений. Решение этого вопроса во многом зависит от свойств простейших решений при изменении физических параметров механической системы. Если индекс второй вариации потенциальной энергии, вычисленной для какого-либо простейшего решения, изменяется при изменении физических параметров, то, согласно теории бифуркации [1], заведомо существуют иные классы решений. Правда, при этом остается открытым вопрос о способе построения этих решений.

В предлагаемой работе указана методика последовательного определения нетривиальных положений равновесия (стационарных движений) в порядке возрастания их сложности. Эта методика опирается на свойства симметрии механической системы и свойства второй вариации потенциальной энергии, вычисленной для положения равновесия (стационарного движения) предыдущего уровня сложности, начиная с тривиального.

1. Пусть $V(\mathbf{x}; \mathbf{p})$ – потенциальная энергия системы (исходная или приведенная), $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^T$ – вектор координат системы (в общем случае, зависимых), $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m)^T$ – вектор физических параметров (значок T означает транспонирование).

Предположим, что

$$V((-1)^{\mathbf{s}}\mathbf{x};\ \mathbf{p}) \equiv V(\mathbf{x};\ \mathbf{p}) \quad (\mathbf{s} = (s_1,\ \ldots,\ s_n)^T,\ \ s_i = 0 \text{ или } 1)$$

$$(-1)^{\mathbf{s}}\mathbf{x} = ((-1)^{s_1}x_1,\ \ldots,\ (-1)^{s_n}x_n)^T$$

Другими словами, предположим, что функция $V(\mathbf{x}; \mathbf{p})$ может быть представлена в виде

$$V(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = W(\xi; \mathbf{p}) \quad (\xi_i = x_i^2,\ i = 1, ..., n) \tag{1.1}$$

Во многих прикладных задачах механики обычно удобнее использовать зависимые переменные. Поэтому предположим, что координаты $\mathbf{x}$ связаны соотношением $f(\mathbf{x}) = 0$, которое определяет компактное пространство конфигураций системы, также инвариантное относительно замены $\mathbf{x} \to (-1)^s\mathbf{x}$.

Для простоты ограничимся сначала случаем $(n-1)$-мерной сферы:

$$f(\mathbf{x}) \equiv x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1 = 0 \tag{1.2}$$

Для отыскания критических точек функции (1.1) на множестве (1.2) введем функцию $2F = W + \lambda f$, где λ – неопределенный множитель Лагранжа, и выпишем условия ее стационарности по переменным $\mathbf{x}$, λ:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i} + \lambda\right)x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n; \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}f = 0 \tag{1.3}$$

Очевидно, система (1.3) допускает тривиальные решения

$$x_\alpha = \pm 1, \quad x_j = 0 \quad (j \neq \alpha), \quad \alpha = 1, \ldots, n \tag{1.4}$$

$$\lambda = \lambda_\alpha = -\left[\frac{\partial W}{\partial \xi_\alpha}\right]_{(1.4)} \tag{1.5}$$

Для определения характера критических точек (1.4) вычислим (с учетом (1.5)) вторую вариацию $\delta^2 F$ функции F на линейном многообразии $\delta f = 0$, которое для решения (1.4) имеет вид $\delta x_\alpha = 0$:

$$2\delta^2 F = \sum_{j\neq\alpha} c_j^{(\alpha)}(\delta x_j)^2; \quad c_j^{(\alpha)} = \left[\frac{\partial W}{\partial \xi_j} - \frac{\partial W}{\partial \xi_\alpha}\right]_{(1.4)} = c_j^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \tag{1.6}$$

Итак, справедливо

Утверждение 1.1. Функция (1.1) на сфере (1.2) всегда принимает критические значения в точках (1.4), причем ее вторая вариация в этих точках всегда имеет вид суммы квадратов (1.6).

Рассмотрим какое-либо из тривиальных решений (1.4) и предположим, что при некоторых значениях параметров один из коэффициентов Пуанкаре второй вариации (1.6) меняет знак, а остальные коэффициенты при этом сохраняют свои знаки. Тогда при указанных значениях параметров изменяется индекс второй вариации и, согласно теории бифуркации, от рассматриваемого тривиального решения ответвляются другие решения. В общем случае поиск этих нетривиальных решений представляет собой трудно разрешимую проблему. Однако в данном случае (симметричный потенциал и симметричное пространство конфигураций) можно указать довольно простой способ построения этих решений.

Пусть для решения (1.4) коэффициент $c_\beta^{(\alpha)}$ меняет знак на некотором множестве

$$\mathbf{P}_\beta^\alpha = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^m : c_\beta^{(\alpha)}(\mathbf{p}) = 0\} \tag{1.7}$$

причем $c_j^{(\alpha)} \neq 0$ при $j \neq \beta$ и $\mathbf{p} \in \mathbf{P}_\beta^{(\alpha)}$. Будем искать решения системы (1.3) в виде ($\varphi \neq 0/\mathrm{mod}\,\pi/2$)

$$x_\alpha = \pm\cos\varphi, \quad x_\beta = \pm\sin\varphi, \quad x_j = 0 \quad (j \neq \alpha,\ \beta) \tag{1.8}$$

Подставляя соотношения (1.8) в систему (1.3), получим

$$\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial \xi_\alpha} + \lambda = 0, \qquad \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial \xi_\beta} + \lambda = 0 \tag{1.9}$$

где $W_{\alpha\beta} = W_{(1.8)}$, а остальные уравнения системы (1.3) выполняются тождественно по φ, λ. Вычитая из второго уравнения системы (1.9) первое, имеем

$$\Phi_{\alpha\beta}(\varphi;\ \mathbf{p}) \equiv \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial \xi_\alpha} = 0 \tag{1.10}$$

Согласно сделанным предположениям функция $\Phi_{\alpha\beta}(0;\ \mathbf{p}) \equiv c_\beta^{(\alpha)}(\mathbf{p})$ меняет знак при $\mathbf{p} \in \mathbf{P}_\beta^\alpha$. Зафиксируем значение $\mathbf{p}_+$, близкое к множеству $\mathbf{P}_\beta^\alpha$, такое, что $\Phi_{\alpha\beta}(0;\ \mathbf{p}_+) > 0$. При этом по непрерывности при всех $\varphi \in (-\delta;\ \delta)$, где $\delta > 0$ достаточно мало, имеем

$$\Phi_{\alpha\beta}(\varphi;\ \mathbf{p}_+) > 0 \tag{1.11}$$

Аналогично можно показать, что при $\varphi \in (-\delta; \delta)$

$$\Phi_{\alpha\beta}(\varphi;\ \mathbf{p}_-) < 0 \tag{1.12}$$

(значение $\mathbf{p}$ близко к множеству $\mathbf{P}_\beta^{(\alpha)}$ причем $\Phi(0;\ \mathbf{p}_-) < 0$). Из соотношений (1.11), (1.12) следует (при учете (1.1)), что уравнение (1.10) имеет пару решений

$$\varphi = \pm\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \tag{1.13}$$

причем $\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = 0$ для $\mathbf{p} \in \mathbf{P}_\beta^{(\alpha)}$; при этом (см. (1.9))

$$\lambda = \lambda_{\alpha\beta} = -\left[\frac{\partial W}{\partial \xi_\alpha}\right]_{(1.8)} = -\left[\frac{\partial W}{\partial \xi_\beta}\right]_{(1.8)} \tag{1.14}$$

Отметим, что при значениях $\mathbf{p}$, близких к $\mathbf{P}_\beta^{(\alpha)}$, система (1.3) не имеет решений, отличных от (1.4) и (1.8), поскольку из (1.3) следует, что $x_j = 0$ ($j \neq \alpha$, β; $\mathbf{p}$ близко к $\mathbf{P}_\beta^\alpha$) в силу предположения $c_j^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \neq 0$ ($j \neq \beta$; $\mathbf{p} \in \mathbf{P}_\beta^{(\alpha)}$). Решения (1.8) заведомо существуют при значениях параметров $\boldsymbol{p}$, лежащих в окрестности множества $\mathbf{P}_\beta^\alpha$, но могут существовать и вне этой окрестности (последнее зависит от свойств функции $\Phi_{\alpha\beta}$ в каждом конкретном случае).

Для определения характера критических точек (1.8) (см. также (1.13), (1.14)) вычислим вторую вариацию $\delta^2 F$ на линейном многообразии $\delta f = 0$, которое для решения (1.8) имеет вид

$$(\cos\varphi_{\alpha\beta})\delta x_\alpha + (\sin\varphi_{\alpha\beta})\delta x_\beta = 0$$

(в силу симметрии задачи здесь и далее все решения (1.4), (1.8) и т.д. берутся с верхними знаками).

Таким образом, $\delta x_\alpha = -(\operatorname{tg}\varphi_{\alpha\beta})\delta x_\beta$ и

$$2\delta^2 F = \sum_{j \neq \alpha} c_j^{(\alpha\beta)} (\delta x_j)^2 \tag{1.15}$$

$$c_j^{(\alpha\beta)} = \left[\frac{\partial W}{\partial \xi_j} - \frac{\partial W}{\partial \xi_\alpha}\right]_{(1.8)} = c_j^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p})\ (j \neq \beta)$$

$$c_\beta^{\alpha\beta} = \left[\frac{\delta^2 W}{\delta \xi_\alpha^2} - 2\frac{\delta^2 W}{\delta \xi_\alpha \delta \xi_\beta} + \frac{\delta^2 W}{\delta \xi_\beta^2}\right]_{(1.8)} \sin^2\varphi_{\alpha\beta} = c_\beta^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p})$$

Итак, справедливо

*Утверждение*1.2. Если для тривиального решения (1.4) существуют бифуркационные значения параметров (1.7), то функция (1.1) на сфере (1.2) принимает критические значения в точках вида (1.8), причем ее вторая вариация в этих точках имеет вид суммы квадратов (1.15).

Очевидно, коэффициент $c_\beta^{(\alpha\beta)}(p)$ обращается в нуль, но не меняет знака при $\mathbf{p} \in \mathbf{P}_\beta^{(\alpha)}$, так как при этом $\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ обращается в нуль. Если этот коэффициент обращается в нуль и меняет знак при некоторых других значениях параметров (за счет множителя при $\sin^2\varphi_{\alpha\beta}$), то аналогично предыдущему можно показать, что при этом функция $\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ теряет однозначность. В этом случае существует еще один класс решений вида (1.8) (но с другой функцией $\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ и не в окрестности множества ($\varphi = 0$; $\mathbf{P}_\beta^{(\alpha)}$) в пространстве $\mathbf{S} \times \mathbf{R}^m (\varphi \in \mathbf{S},\ \mathbf{p} \in \mathbf{R}^m)$).

Значительно интересней случай, для которого один из других коэффициентов Пуанкаре, скажем $c_\gamma^{(\alpha\beta)}(\gamma \neq \beta)$, меняет знак на некотором множестве

$$\mathbf{P}_\gamma^{(\alpha\beta)} = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^m : c_\gamma^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p}) = 0\} \tag{1.16}$$

При этом, как и ранее, будем полагать, что остальные коэффициенты второй вариации (1.15) не обращаются в нуль при $\mathbf{p} \in \mathbf{P}_\gamma^{\alpha\beta}$. Тогда от решения (1.18) ответвляются решения (φ, $\psi \neq 0/\mathrm{mod}\ \pi/2$)

$$x_\alpha = \pm\cos\varphi\cos\psi, \quad x_\beta = \pm\sin\varphi\cos\psi \tag{1.17}$$

$$x_\gamma = \pm\sin\psi, \quad x_j = 0\ (j \neq \alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

Действительно, подставляя соотношения (1.17) в систему (1.3), получим

$$\frac{\partial W_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\xi_\alpha} + \lambda = 0, \quad \frac{\partial W_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\xi_\beta} + \lambda = 0, \quad \frac{\partial W_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\xi_\gamma} + \lambda = 0 \tag{1.18}$$

где $W_{\alpha\beta\gamma} = W_{(1.17)}$, а остальные уравнения системы (1.3) выполняются тождественно по φ, ψ и λ. Вычитая из третьего и второго уравнения системы (1.18) первое, имеем

$$\mathbf{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}(\varphi;\psi;\mathbf{p}) \equiv \left[\frac{\partial W_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\xi_\gamma} - \frac{\partial W_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\xi_\alpha}\right] = 0 \tag{1.19}$$

$$\mathbf{\Psi}_{\alpha\beta\gamma}(\varphi;\psi;\mathbf{p}) \equiv \left[\frac{\partial W_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\xi_\beta} - \frac{\partial W_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\xi_\alpha}\right] = 0 \tag{1.20}$$

Заметим, что при $\psi = 0$ уравнение (1.20) переходит в (1.10), а левая часть уравнения (1.19) – в коэффициент $c_\gamma^{(\alpha\beta)}$ квадратичной формы (1.15). Следовательно, из уравнения (1.20) можно определить $\varphi = \overline{\varphi}_{\alpha\beta\gamma}(\psi,\ \mathbf{p})$ при всех ψ, близких к нулю, причем $\overline{\varphi}_{\alpha\beta\gamma}(0,\ \mathbf{p}) = \varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$. Подставляя $\overline{\varphi}_{\alpha\beta\gamma}$ в (1.19), имеем

$$\overline{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}(\psi,\ \mathbf{p}) \equiv \Phi_{\alpha\beta\gamma}(\overline{\varphi}_{\alpha\beta\gamma}(\psi,\ \mathbf{p});\psi;\mathbf{p}) = 0 \tag{1.21}$$

Доказательство существования решения $\psi = \pm\psi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{p})$ уравнения (1.21) проводится аналогично доказательству существования решения уравнения (1.10). Таким образом, система (1.19), (1.20) имеет решение вида

$$\varphi = \pm\varphi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{p}), \quad \psi = \pm\psi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{p}) \tag{1.22}$$

$$(\varphi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{p})=\overline{\varphi}_{\alpha\beta\gamma}(\pm\psi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{p});\ \mathbf{p}))$$

$$\lambda=\lambda_{\alpha\beta\gamma}=-\left[\frac{\partial W}{\partial\xi_\rho}\right]_{(1.17)}\quad(\rho=\alpha,\ \beta,\ \gamma)\tag{1.23}$$

Отметим, что при значениях $\mathbf{p}$, близких к $\mathbf{P}_\gamma^{(\alpha\beta)}$, система (1.3) не имеет решений, отличных от (1.4), (1.8), (1.17), поскольку из (1.3) следует, что $x_j=0$ ($j\neq\alpha$, β, γ; $\mathbf{p}$ близко к $\mathbf{P}_\gamma^{(\alpha\beta)}$). Решения (1.17) заведомо существуют при значениях параметров $\mathbf{p}$, лежащих в окрестности множества $\mathbf{P}_\gamma^{(\alpha\beta)}$, но могут существовать и вне этой окрестности.

Для определения характера критических точек (1.17) следует вычислить (с учетом (1.22), (1.23)) вторую вариацию δ^2F на линейном многообразии $\delta f=0$, которое для решения (1.17) имеет вид

$$(\cos\varphi_{\alpha\beta\gamma}\cos\psi_{\alpha\beta\gamma})\delta x_\alpha+(\sin\varphi_{\alpha\beta\gamma}\cos\psi_{\alpha\beta\gamma})\delta x_\beta+(\sin\psi_{\alpha\beta\gamma})\delta x_\gamma=0$$

Таким образом,

$$2\delta^2F=[2\delta^2F]^{(\beta\gamma)}+[2\delta^2F]^{(j)}\quad(j\neq\alpha,\ \beta,\ \gamma)\tag{1.24}$$

$$[2\delta^2F]^{(\beta\gamma)}=a_{\beta\beta}(\delta x_\beta)^2+2a_{\beta\gamma}(\delta x_\beta)(\delta x_\gamma)+a_{\gamma\gamma}(\delta x_\gamma)^2\tag{1.25}$$

$$[2\delta^2F]^{(j)}=\sum_{j\neq\alpha,\beta,\gamma}c_j^{(\alpha\beta\gamma)}(\delta x_j)^2\tag{1.26}$$

Явные выражения коэффициентов $a_{\rho\sigma}$ (ρ, $\sigma=\beta$, γ) и $c_j^{(\alpha\beta\gamma)}$ ($j\neq\alpha$, β, γ) достаточно громоздки и поэтому не приведены.

Итак, справедливо

Утверждение 1.3. Если для нетривиального решения (1.8) существуют бифуркационные значения параметров (1.16), то функция (1.1) на сфере (1.2) принимает критические значения в точках вида (1.17), причем ее вторая вариация в этих точках имеет вид (1.24) и представляет собой сумму двух квадратичных форм, одна из которых зависит от двух переменных и не имеет, вообще говоря, диагонального вида, а вторая зависит от остальных независимых переменных и имеет диагональный вид.

Замечание. Индекс квадратичной формы (1.24) меняется при тех значениях параметров $\mathbf{p}$, для которых либо определитель квадратичной формы (1.25) меняет знак (в этом случае функции $\varphi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{p})$ и $\psi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{p})$ теряют однозначность и не появляется решений, принципиально отличающихся от (1.17)) либо один из коэффициентов квадратичной формы (1.26) меняет знак. В последнем случае от решений (1.17) ответвляются решения вида

$$x_\alpha=\pm\cos\varphi\cos\psi\cos\chi,\quad x_\beta=\pm\sin\varphi\cos\psi\cos\chi$$

$$x_\gamma=\pm\sin\psi\cos\chi,\quad x_\delta=\pm\sin\chi,\quad x_j=0\quad(j\neq\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

где индекс δ отвечает коэффициенту Пуанкаре $c_\delta^{(\alpha\beta\gamma)}$, меняющему знак, и т.д.

В заключение этой части работы отметим, что для отыскания нетривиальных решений (1.8) достаточно решить одно нелинейное алгебраическое уравнение (1.10), для отыскания решений (1.17) – систему двух таких уравнений (1.19), (1.20), и т.д. Даже если решение этих уравнений невозможно найти аналитически, их анализ или численное решение значительно проще, чем анализ или численное решение исходной системы уравнений (1.3).

2. Предположим теперь, что потенциальная энергия зависит от $2n$ переменных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$, причем

$$V(\mathbf{x};\ \mathbf{y};\ \mathbf{p}) = W(\boldsymbol{\xi};\ \boldsymbol{\eta};\ \mathbf{p})\,(\xi_i = x_i^2,\ \eta_i = y_i^2) \tag{2.1}$$

а переменные $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ связаны соотношениями

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1 = 0, \quad g(\mathbf{x}) = y_1^2 + \ldots + y_n^2 - 1 = 0 \\ h(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Для отыскания критических точек функции (2.1) на множестве (2.2) введем функцию $2F = V + \lambda f + \mu g + 2\nu h$, где λ, μ, ν – неопределенные множители Лагранжа, и выпишем условия ее стационарности по переменным $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, λ, μ, ν:

$$\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i} + \lambda\right) x_i + \nu y_i = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y_i} = \left(\frac{\partial W}{\partial \nu_i} + \mu\right) y_i + \nu x_i = 0, \quad i = 1,\ \ldots,\ n \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} f = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \mu} = \frac{1}{2} g = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \nu} = h = 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

Очевидно, система (2.3) допускает тривиальные решения

$$\begin{gathered} x_\alpha = \pm 1, \quad y_\beta = \pm 1 \quad (\alpha \neq \beta) \\ x_j = 0 \quad (j \neq \alpha), \quad y_k = 0 \quad (k \neq \beta) \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\lambda = \lambda_{\alpha\beta} = -\left[\frac{\partial W}{\partial \xi_\alpha}\right]_{(2.4)}, \quad \mu = \mu_{\alpha\beta} = -\left[\frac{\partial W}{\partial \nu_\beta}\right]_{(2.4)}, \quad \nu = 0 \tag{2.5}$$

Для определения характера критических точек (2.4) вычислим (при учете (2.5)) вторую вариацию $\delta^2 F$ функции F на линейном многообразии $\delta f = 0$, $\delta g = 0$, $\delta h = 0$, которое для решения (2.4) имеет вид $\delta x_\alpha = 0$, $\delta y_\beta = 0$, $\delta x_\beta + \delta y_\alpha = 0$ (здесь и далее в силу симметрии задачи все решения берутся с верхним знаком). Таким образом,

$$2\delta^2 F = \sum_{j \neq \alpha, \beta} [c_j^{(\alpha\beta)} (\delta x_j)^2 + d_j^{(\alpha\beta)} (\delta y_j)^2] + [c_\beta^{(\alpha\beta)} + d_\alpha^{(\alpha\beta)}](\delta z)^2 \tag{2.6}$$

$$\delta z = \delta x_\beta = -\delta y_\alpha$$

$$c_j^{(\alpha\beta)} = \left[\frac{\partial W}{\partial \xi_j} - \frac{\partial W}{\partial \xi_\alpha}\right]_{(2.4)} \quad (j \neq \alpha); \qquad d_k^{(\alpha\beta)} = \left[\frac{\partial W}{\partial \eta_k} - \frac{\partial W}{\partial \eta_\beta}\right]_{(2.4)} \quad (k \neq \beta)$$

Итак, справедливо

Утверждение 2.1. Функция (2.1) на множестве (2.2) всегда принимает критические значения в точках (2.4), причем ее вторая вариация в этих точках всегда имеет вид суммы квадратов (2.6).

Рассмотрим какое-либо из тривиальных решений (2.4) и предположим, что при некоторых значениях параметров один из коэффициентов Пуанкаре второй вариации (2.6) меняет знак, а остальные коэффициенты не обращаются в нуль при этих значениях параметров.

Сначала предположим, что меняет знак $c_\gamma^{(\alpha\beta)}$ или $d_\gamma^{(\alpha\beta)}$ $(\gamma \neq \alpha,\ \beta)$. Тогда совершенно аналогично изложенному в предыдущем разделе можно показать, что система (2.3) допускает нетривиальные решения вида

$$x_\alpha = \pm\cos\varphi, \quad x_\gamma = \pm\sin\varphi$$
$$y_\beta = \pm 1, \quad x_j = y_k = 0 \ (j \neq \alpha,\ \gamma;\ k \neq \beta) \tag{2.7}$$

(если $c_\gamma^{(\alpha\beta)}$ меняет знак) или

$$x_\alpha = \pm 1, \quad y_\beta = \pm\cos\varphi, \quad y_\gamma = \pm\sin\varphi$$
$$x_j = y_k = 0 \ (j \neq \alpha;\ k \neq \beta,\ \gamma) \tag{2.8}$$

(если $d_\gamma^{(\alpha\beta)}$ меняет знак). При этом

$$\varphi = \pm\varphi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{p}) : \Phi_{\alpha\beta\gamma}(\varphi,\ \mathbf{p}) = 0 \tag{2.9}$$

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial W_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\zeta_\gamma} - \frac{\partial W_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\zeta_\alpha}; \quad W_{\alpha\beta\gamma} = W|_{(2.7)\ \text{или}\ (2.8)}; \quad \zeta = \xi \ \text{или}\ \eta$$

$$\lambda = \lambda_{\alpha\beta} = -\left[\frac{\partial W}{\partial\xi_\alpha}\right]_{(2.7)\ \text{или}\ (2.8)}, \quad \mu = \mu_{\alpha\beta\gamma} = -\left[\frac{\partial W}{\partial\eta_\beta}\right]_{(2.7)\ \text{или}\ (2.8)}, \quad \nu = 0 \tag{2.10}$$

Вторая вариация $\delta^2 F$ вычисляется на линейном многообразии $\delta f = 0$, $\delta g = 0$, $\delta h = 0$, которое для решения (2.7) имеет вид

$$\cos\varphi\delta x_\alpha + \sin\varphi\delta x_\gamma = 0, \quad \delta y_\beta = 0, \quad \cos\varphi\delta y_\alpha + \sin\varphi\delta y_\gamma + \delta x_\beta = 0 \tag{2.11}$$

а для решения (2.8) – вид

$$\delta x_\alpha = 0, \quad \cos\varphi\delta y_\beta + \sin\varphi\delta y_\gamma = 0, \quad \cos\varphi\delta x_\beta + \sin\varphi\delta x_\gamma + \delta y_\alpha = 0 \tag{2.12}$$

Таким образом,

$$[2\delta^2 F]_{(2.7)} = [2\delta^2 F]^{(j\neq\alpha,\beta,\gamma)} + [2\delta^2 F]^{(\gamma;\alpha,\gamma)} \tag{2.13}$$

$$[2\delta^2 F]_{(2.8)} = [2\delta^2 F]^{(j\neq\alpha,\beta,\gamma)} + [2\delta^2 F]^{(\beta,\gamma;\gamma)} \tag{2.14}$$

$$[2\delta^2 F]^{(j\neq\alpha,\beta,\gamma)} = \sum_{j\neq\alpha,\beta,\gamma} [c_j^{(\alpha\beta\gamma)}(\delta x_j)^2 + d_j^{(\alpha\beta\gamma)}(\delta y_j)^2]$$

$$[2\delta^2 F]^{(\gamma;\alpha,\gamma)} = c_\gamma^{\alpha\beta\gamma}(\delta x_\beta)^2 + b_{\alpha\alpha}(\delta y_\alpha)^2 + 2b_{\alpha\gamma}(\delta y_\alpha)(\delta y_\gamma) + b_{\gamma\gamma}(\delta y_\gamma)^2$$

$$[2\delta^2 F]^{(\beta,\gamma;\gamma)} = a_{\beta\beta}(\delta x_\beta)^2 + 2a_{\beta\gamma}(\delta x_\beta)(\delta x_\gamma) + a_{\gamma\gamma}(\delta x_\gamma)^2 + d_\gamma^{\alpha\beta\gamma}(\delta y_\beta)^2$$

(явные выражения коэффициентов квадратичных форм (2.13), (2.14) довольно громоздки и потому не выписаны).

Итак, справедливо

Утверждение 2.2. Если для тривиального решения (2.4) существуют бифуркационные значения параметров $c_\gamma^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p}) = 0$ или $d_\gamma^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p}) = 0$ $(\gamma \neq \alpha,\ \beta)$, то функция (2.1) множестве (2.2) принимает критические значения в точках вида (2.7) или (2.8) соответственно, причем ее вторая вариация в этих точках имеет вид (2.13) или (2.14).

Замечание. Решения (2.7) и (2.8) в известной мере аналогичны решениям (1.8), рассмотренным в предыдущем разделе. Коэффициенты $c_\gamma^{(\alpha\beta\gamma)}(\mathbf{p})$ или $d_\gamma^{(\alpha\beta\gamma)}(\mathbf{p})$ квадратичной формы (2.13) или (2.14) обращаются в нуль при $c_\gamma^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p})=0$ или $d_\gamma^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p})=0$. Если эти коэффициенты меняют знак при некоторых других значениях параметров, то функции $\varphi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{p})$ теряют однозначность. Если же какие-либо другие коэффициенты Пуанкаре $c_j^{(\alpha\beta\gamma)}(\mathbf{p})$, или $d_j^{(\alpha\beta\gamma)}(\mathbf{p})$ ($j\neq\alpha,\ \beta,\ \gamma$) квадратичных форм (2.13) и (2.14) или соответствующие этим формам выражения $b_{\alpha\alpha}b_{\gamma\gamma}-b_{\alpha\gamma}^2$ и $a_{\beta\beta}a_{\gamma\gamma}-a_{\alpha\gamma}^2$ меняют знаки, то от решений (2.7) и (2.8) ответвляются нетривиальные решения второго уровня и т.д.

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициент Пуанкаре $c_\beta^{(\alpha\beta)}+d_\alpha^{(\alpha\beta)}$ второй вариации (2.6), вычисленной для тривиального решения (2.4), меняет знак на некотором множестве

$$\mathbf{P}_{\alpha\beta}=\{\mathbf{p}\in\mathbf{R}^m : c_\beta^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p})+d_\alpha^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p})=0\} \tag{2.15}$$

При этом, как и ранее, будем полагать, что остальные коэффициенты второй вариации (2.6) не обращаются в нуль на множестве (2.15).

В этом случае от решений (2.4) ответвляются решения

$$x_\alpha=\pm\cos\varphi,\quad x_\beta=\pm\sin\varphi$$

$$y_\alpha=\mp\sin\varphi,\quad y_\beta=\pm\cos\varphi,\quad x_j=y_j=0\ \ (j\neq\alpha,\ \beta) \tag{2.16}$$

Действительно, подставляя соотношения (2.16) в систему (2.3), получим (как и ранее, берем верхние знаки в соотношениях (2.16))

$$\left(\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial\xi_\alpha}+\lambda\right)\cos\varphi-\nu\sin\varphi=0,\quad \left(\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial\xi_\beta}+\lambda\right)\sin\varphi+\nu\cos\varphi=0 \tag{2.17}$$

$$\left(\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial\nu_\alpha}+\mu\right)\sin\varphi+\nu\cos\varphi=0,\quad \left(\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial\nu_\beta}+\mu\right)\cos\varphi+\nu\sin\varphi=0$$

где $W_{\alpha\beta}=W|_{(2.16)}$, а остальные уравнения системы (2.3) выполняются тождественно по φ, λ, μ и ν. Исключая из системы (2.17) неопределенные множители, получим

$$\Phi_{\alpha\beta}(\varphi;\ \mathbf{p})\equiv\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial\xi_\beta}(1-\sin\varphi)-\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial\xi_\alpha}\cos\varphi+\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial\eta_\alpha}(1-\sin\varphi)-\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial\eta_\beta}\cos\varphi=0 \tag{2.18}$$

Согласно сделанным выше предположениям $\Phi_{\alpha\beta}(0;\ \mathbf{p})\equiv c_\beta^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p})+d_\alpha^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p})$ меняет знак на множестве (2.15), поэтому анализ уравнения (2.18) аналогичен проведенному ранее анализу уравнения (1.10). Таким образом, уравнение (2.18) всегда имеет решение вида

$$\varphi=\pm\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \tag{2.19}$$

при значениях параметров $\mathbf{p}$, лежащих в окрестности множества (2.15).

Кроме того, из (2.17) при учете (2.19) следует, что

$$\lambda=\lambda_{\alpha\beta}=-\left[\frac{\partial W}{\partial\xi_\alpha}\cos\varphi+\frac{\partial W}{\partial\xi_\beta}\sin\varphi\right]_{(2.16)}$$

$$\mu=\mu_{\alpha\beta}=-\left[\frac{\partial W}{\partial\eta_\beta}\cos\varphi+\frac{\partial W}{\partial\eta_\alpha}\sin\varphi\right]_{(2.16)}$$

$$\nu=\nu_{\alpha\beta}=\left[\frac{\partial W}{\partial\xi_\alpha}\sin\varphi-\frac{\partial W}{\partial\xi_\beta}\cos\varphi\right]_{(2.16)}\equiv\left[\frac{\partial W}{\partial\eta_\alpha}\cos\varphi-\frac{\partial W}{\partial\eta_\beta}\sin\varphi\right]_{(2.16)}$$

Вторая вариация δ^2F вычисляется на линейном многообразии $\delta f=0$, $\delta g=0$, $\delta h=0$, которое для решения (2.16) имеет вид

$$\cos\varphi\delta x_\alpha+\sin\varphi\delta x_\beta=0,\quad -\sin\varphi\delta y_\alpha+\cos\varphi\delta y_\beta=0$$

$$\cos\varphi\delta y_\alpha-\sin\varphi\delta x_\alpha+\sin\varphi\delta y_\beta+\cos\varphi\delta x_\beta=0$$

Таким образом,

$$2\delta^2F=[2\delta^2F]^{(j\neq\alpha,\beta)}+e(\delta z)^2\quad(\delta z=-\delta x_\beta=\delta y_\alpha)\tag{2.20}$$

$$[2\delta^2F]^{(j\neq\alpha,\beta)}=\sum_{j\neq\alpha,\beta}[c_j^{(\alpha\beta)}(\delta x_j)^2+d_j^{(\alpha\beta)}(\delta y_j)^2+2e_j^{(\alpha\beta)}(\delta x_j)(\delta y_j)]$$

Явные выражения коэффициентов c_j, d_j, e_j и, особенно, e достаточно громоздки и поэтому не выписаны.

Итак, справедливо

Утверждение 2.3. Если для нетривиального решения (2.4) существуют бифуркационные значения параметров (2.15), то функция (2.1) на множестве (2.2) принимает критические значения в точках вида (2.16), причем ее вторая вариация в этих точках имеет вид (2.20).

Замечание. Коэффициент e второй вариации (2.20) обращается в нуль на множестве (2.15). Если этот коэффициент меняет знак при некоторых других значениях параметров, то функции (2.19) теряют однозначность. Если же какое-либо выражение $c_\gamma d_\gamma-e_\gamma^2$ меняет знак, то от решений (2.16) ответвляются нетривиальные решения второго уровня и т.д.

В заключение рассмотрим задачу об относительных равновесиях твердого тела по круговой орбите в центральном гравитационном поле. Предположим, что распределение масс тела симметрично относительно плоскостей, проходящих через любую пару его главных центральных осей инерции. Тогда (с точностью до постоянной; см., например, [2]) измененная потенциальная энергия тела имеет вид

$$V=\mu\frac{M}{2R^3}[3(J_1\gamma_1^2+J_2\gamma_2^2+J_3\gamma_3^2)-(J_1\beta_1^2+J_2\beta_2^2+J_3\beta_3^2)+\varepsilon^2F(\gamma_1^2,\ \gamma_2^2,\ \gamma_3^2,\ \varepsilon^2)]\tag{2.21}$$

Здесь μ – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего центра, R – радиус орбиты центра масс тела, J_1, J_2, J_3 – главные центральные моменты инерции, ε – отношение характерного размера тела к радиусу орбиты, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – направляющие косинусы радиус-вектора центра масс тела по отношению к притягивающему центру, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – направляющие косинусы нормали к плоскости орбиты, F – некоторая функция, явный вид которой зависит от распределения масс тела. Очевидно, переменные $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\beta}$ стеснены соотношениями

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2-1=0,\quad \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2-1=0,\quad \gamma_1\beta_1+\gamma_2\beta_2+\gamma_3\beta_3=0\tag{2.22}$$

Согласно изложенному выше функция (2.21) при условиях (2.22) принимает стационарные значения в точках

$$\gamma_i = \pm 1, \quad \beta_j = \pm 1 \quad (i \neq j) \tag{2.23}$$
$$\gamma_j = \gamma_k = \beta_i = \beta_k = 0 \quad (i, \ j, \ k = 1, \ 2, \ 3)$$

отвечающим тривиальным равновесным ориентациям тел. При этом i-я ось тела направлена вдоль радиуса-вектора, j-я по нормали к плоскости орбиты, а k-я по касательной к орбите.

Вторая вариация функции (2.21) на линейном многообразии $\delta\gamma_i = 0$, $\delta\beta_j = 0$, $\delta\beta_i \pm \delta\gamma_j = 0$ имеет вид (F_s означает $\partial F / \partial \gamma_s^2$)

$$2\delta^2 V = c_k(\delta\gamma_k)^2 + d_k(\delta\beta_k)^2 + (c_j + d_i)(\delta\gamma_j)^2 \tag{2.24}$$

$$c_s = 3(J_s + J_i) + \varepsilon^2(F_s - F_i)_{(2.23)} \quad (s = j, \ k), \quad d_r = J_j - J_r \quad (r = i, \ k)$$

В случае тела с трехосным эллипсоидом инерции $d_r \neq 0$. Следовательно, не существует нетривиальных равновесных ориентаций тела, при которых оно повернуто вокруг радиус-вектора. Если величина J_k близка к J_i, то c_k может обращаться в нуль и менять знак при некотором значении ε, близком к нулю. В этом случае рождаются нетривиальные равновесные ориентации вида

$$\gamma_i = \pm\cos\varphi, \quad \gamma_k = \pm\sin\varphi, \quad \beta_j = \pm 1, \quad \gamma_j = \beta_i = \beta_k = 0 \tag{2.25}$$

при которых тело повернуто на угол φ вокруг нормали к плоскости орбиты. Если же величина J_j близка к J_i, то $c_j + d_i$ может обращаться в нуль и менять знак при некотором значении ε, близком к нулю. В этом случае рождаются нетривиальные равновесные ориентации вида

$$\gamma_i = \pm\cos\varphi, \quad \gamma_j = \pm\sin\varphi$$
$$\beta_j = \pm\cos\varphi, \quad \beta_i = \mp\sin\varphi, \quad \gamma_k = \beta_k = 0 \tag{2.26}$$

при которых тело повернуто на угол φ вокруг касательной к орбите. Дальнейший анализ задачи существенно зависит от явного выражения функции F. Некоторые частные случаи задач об относительных равновесиях и стационарных движениях тела были рассмотрены ранее [2–5].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96–01–00261).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
2. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
3. *Абрарова Е.В., Карапетян А.В.* О стационарных движениях тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 68–73.
4. *Буров А.А., Карапетян А.В.* О движении крестообразных тел // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 14–18.
5. *Абрарова Е.В., Карапетян А.В.* О ветвлении и устойчивости стационарных движений и относительных равновесий твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 375–387.

Москва

Поступила в редакцию
19.III.1996