УДК 62–50

© 1998 г. А.М. Ковалев

КРИТЕРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ И ОБРАТИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В развитие исследований обратных задач [1, 2] получены критерии функциональной управляемости и обратимости нелинейных систем управления с выходом. Решение основано на построении обратной системы, для которой выходом является входное воздействие исходной системы. Рассмотрена задача идентификации, соответствующая задаче обратимости с неизвестным начальным состоянием. Исследованы свойства λ-обратимости и λ-идентифицируемости, возникающие в случаях, когда выходной сигнал известен на множестве траекторий.

1. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная система управления с выходом

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{1.1}$$

$$y = h(t, x, u) \tag{1.2}$$

Здесь $x \in D \subseteq R^n$ – фазовый вектор; $u \in U \subseteq R^m$ – входное воздействие или вектор управления, являющийся функцией времени t при $t \in T = [0, t_1] \subseteq [0, \infty)$; $y \in Y \subseteq R^k$ – вектор выхода или измеряемая функция. Функции f, h, u полагаем достаточное число раз дифференцируемыми.

В зависимости от того, ищется ли входное воздействие из необходимости реализации выхода с требуемыми свойствами либо по заданному выходу определяется реализовавшее его управление, различают прямые и обратные задачи управления. К прямым задачам относится рассматриваемая ниже задача функциональной управляемости, состоящая в реализации произвольного (возможно, достаточное число раз дифференцируемого) выходного сигнала. Относящаяся к обратным задача обратимости состоит в нахождении входного воздействия по заданному выходу. При решении обеих задач может быть успешно использована обратная система, для которой выходом является входное воздействие исходной системы, а входом – выходной сигнал (и его производные) исходной системы.

2. Обратная система. Поставим вопрос о нахождении входного воздействия для заданного выходного сигнала системы (1.1), (1.2) как выхода некоторой системы дифференциальных уравнений, входом которой был бы заданный выход, и, возможно, его производные. Решение этой задачи предлагается проводить по следующей схеме, состоящей из нескольких шагов. Сначала вычислим производные

$$y_i^{(s_i)} = h_{is_i}(t, x, u), \quad i = 1, \ldots, k \tag{2.1}$$

содержащие явно параметр u, при этом производные порядка $s_i - 1$ явно от параметра u не зависят. Пусть среди функций (2.1), рассматриваемых как функции переменной u, имеется $k_1 \leqslant k$ независимых, для определенности $y_1^{(s_1)}, \ldots, y_{k_1}^{(s_{k_1})}$, а остальные от них зависят. Разрешив уравнения $y_i^{(s_i)} = h_{is_i}(t,x,u) \quad (i=1,\dots,k_1)$ относительно $u_1,\dots,u_{k_1}$ (при необходимости можно изменить нумерацию u_i) и подставив найденные величины в оставшиеся уравнения (2.1) и систему (1.1), получим

$$u_i = \varphi_i(t,x,y_1^{(s_1)},\dots,y_{k_1}^{(s_{k1})},u_{k_1+1},\dots,u_m), \quad i=1,\dots,k_1 \tag{2.2}$$

$$y_j^{(s_j)} = \Phi_{js_j}(t,x,y_1^{(s_1)},\dots,y_{k_1}^{(s_{k1})}), \quad j=k_1+1,\dots,k \tag{2.3}$$

$$\dot{x} = f_1(t,x,y_1^{(s_1)},\dots,y_{k_1}^{(s_{k1})}, \ u_{k_1+1},\dots,u_m) \tag{2.4}$$

При этом в формулах (2.3), (2.4) функции $y_1^{(s_1)},\dots,y_{k_1}^{(s_{k1})}$ рассматриваются как функции времени t, т.е. аргументами функций Φ_{js_j} являются t,x, а аргументами функции f_1 – t, x, $u_{k_1+1},\dots,u_m$. Предполагаем, что в результате процедуры исключения переменных $u_1,\dots,u_{k_1}$ полученные функции Φ_{js_j}, f_1 являются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов.

Переходя ко второму шагу, в качестве исходной рассматриваем систему (2.4), входом которой является вектор $(u_{k_1+1},\dots,u_m)$, а выходом – функции (2.3), и повторяем преобразования первого шага. Получение искомой системы заканчивается, когда на очередном шаге производные функций (2.3) не содержат входных переменных u_i. После конечного числа шагов (не более чем m) получаем

$$w = \varphi(t,x,y,\dots,y^{(s)},v) \tag{2.5}$$

$$\Phi_j(t,y,\dots,y^{(s_j)}) = 0, \quad j=1,\dots,\varkappa \tag{2.6}$$

$$\dot{x} = \Phi(t,x,y,\dots,y^{(s)},v) \tag{2.7}$$

где $u=(w,v), w \in W \subseteq R^{k-\varkappa}$, $v \in V \subseteq R^{m+\varkappa-k}$ при необходимости нумерация входных переменных может быть изменена. Функции Φ_j независимы и величины s_j в формулах (2.6) являются минимальными, для которых такие соотношения возможны. Это соглашение необходимо, поскольку дифференцирование соотношения (2.6) по t приводит к дополнительному равенству с увеличенными значениями s_j, что влечет неоднозначность определения величины $\varkappa$.

Систему (2.5)–(2.7) будем называть обратной системой (ОС) по отношению к данной системе (1.1), (1.2). Величину $\varkappa$ назовем дефектом выхода, а $s_0 = \max(s,s_1,\dots,s_\varkappa)$ – показателем гладкости выхода системы (1.1), (1.2). Отметим, что входом ОС является выходной сигнал и его производные $y,\dots, y^{(s)}$ и часть компонент входного сигнала v исходной системы, а выходом – часть компонент входного сигнала w исходной системы. При этом в отличие от исходной системы входное воздействие ОС может быть не произвольным, а удовлетворять дифференциальным соотношениям (2.6). Из приведенных рассуждений следует, что вид ОС зависит от выбора компонент входной переменной исходной системы, являющихся выходом ОС.

Замечание 1. Введение ОС возможно непосредственно определением как системы уравнений (2.5), (2.7), которые обращаются в тождества на любом решении системы (1.1), (1.2) и наоборот любые решения системы (2.5), (2.7) из области ее определения обращают в тождества уравнения (1.1), (1.2). При таком определении вопрос существования ОС остается открытым. Предлагаемая схема построения ОС в ряде случаев осуществима глобально. В локальной постановке при сделанных предположениях ее использование всегда приводит к построению ОС. При этом локальность понимается в том смысле, что изучаемое свойство имеет место в некоторой окрестности, принадлежащей области, в которой рассматривается система (1.1), (1.2). При локальном рассмотрении в точке (все рассматриваемые окрестности содержат исходную точку) могут возникнуть ситуации, когда необходимо выполнение предварительных процедур типа разрешения особенностей[1].

Для доказательства рассмотрим первый шаг, и для функций (2.1) в области $\tau_0 \times D_0 \times U_0 \subseteq T \times D \times U$ находим

$$\max_{(t,x,u)\in\tau_0\times D_0\times U_0} \operatorname{rank} \frac{\partial(y_1^{(s_1)},\ldots,y_k^{(s_k)})}{\partial(u_1,\ldots,u_m)} = k_1$$

Тогда в силу сделанного предположения о дифференцируемости рассматриваемых функций существует окрестность $\tau_0^* \times D_0^* \times U_0^* \subseteq \tau_0 \times D_0 \times U_0$, в которой ранг рассматриваемой якобиевой матрицы постоянен и равен k_1. По теореме о неявных функциях это обеспечивает существование и дифференцируемость функций (2.2), (2.3) для значений $t, x_1,\ldots, x_n$, $y_1^{(s_1)},\ldots,y_{k_1}^{(s_{k1})},u_{k_1+1},\ldots,u_m$, принадлежащих некоторой окрестности $\tau_{01} \times D_{01} \times Y_1 \times U_1$, где окрестность U_1 включена в проекцию окрестности U_0 на подпространство переменных $u_{k_1+1},\ldots,u_m$. Пусть при $(t,x) \in \tau_1 \times D_1 \subseteq (\tau_0^* \times D_0^*) \cap (\tau_{01} \times D_{01})$ значения $y_1^{(s_1)},\ldots,y_{k_1}^{(s_{k1})}$ принадлежат окрестности Y_1. Тогда функции Φ_{js_j}, f_1 в формулах (2.3), (2.4), рассматриваемые как функции аргументов $t,x_1,\ldots,x_n,u_{k_1+1},\ldots,u_m$, будут достаточное число раз дифференцируемыми в окрестности $\tau_1 \times D_1 \times U_1$, и для системы (2.3), (2.4) на втором шаге можно повторить приведенные рассуждения в новой области $\tau_1 \times D_1 \times U_1$ с пониженной размерностью управления. Эти заключения сохраняются и при выполнении последующих шагов, что и обеспечивает существование ОС (2.5)–(2.7).

Замечание 2. Введенное определение ОС и ее использование отличается от принятого в литературе [3–5], где ОС определяется в предположении обратимости исходной системы и поэтому имеет специальный вид и используется для представления входного сигнала в задачах управления при разработке различных вычислительных процедур. В настоящей работе ОС введена для системы общего вида и применяется для исследования свойства разрешимости обратных задач управления.

Замечание 3. Производные функций (2.3) можно вычислять неявно, дифференцируя достаточное число раз выход (1.2). Соответствующие производные $y^{(i)}(t)$ в этом случае будут уже зависеть от производных входа $u^{(i)}(t)$. Используя эти соотношения, можно изучать свойства ОС без ее непосредственного построения и получать условия разрешимости различных обратных задач, что выполнено в разд. 5.

3. Функциональная управляемость и обратимость. Построенная ОС позволяет изучить свойства функциональной управляемости и обратимости. Примем следующее определение функциональной управляемости.

Определение 1. Система (1.1) называется функционально управляемой по выходу (1.2) гладкости s в точке $x_0 \in D$ если для любой функции $y(t) \in C^s(Y)$, такой, что

$$y^{(i)}(t_0) \in \{h_i(t_0, x_0, u(t_0)) \colon u(t_0) \in U\}, \quad i = 0, 1, \ldots, s$$

можно указать управление $u(t) \in U$, такое, что $y(t) = h(t, x(t, t_0, x_0, u), u(t))$. Если в качестве областей U, Y приняты некоторые окрестности нуля и точки $y(t_0)$ и функция $y(t)$ определена на малом интервале $\tau_0 \subset T$ точки t_0, то говорят о локальной функциональной управляемости.

Теорема 1. Система (1.1) функционально управляема по выходу (1.2) тогда и только тогда, когда дефект выхода равен нулю. Гладкость выхода определяется при построении ОС.

[1] На возможность появления таких ситуаций обратил внимание автора рецензент.

Доказательство. При выполнении условий теоремы ОС имеет вид (2.5), (2.7) и на выход $y(t)$ не наложено никаких ограничений, кроме начальных: $y^{(i)}(t_0) \in \{h_i(t_0, x_0, u(t_0)) : u(t_0) \in U\}$ $(i = 0, 1, \ldots, s_0)$. Любой заданной функции $y(t)$ с допустимыми начальными значениями соответствует система (2.7), решая которую с начальным условием $x(t_0) = x_0$ и каким-либо допустимым управлением $\tilde{v}(t)$, находим $\tilde{x}(t)$. Решение $\tilde{x}(t)$ определяет по формулам (2.5) управление

$$\tilde{u}_i(t) = \varphi_i(t, \tilde{x}(t), y(t), \ldots, y^{(s)}(t), \tilde{v}(t)), \quad i = 1, \ldots, k$$

$$\tilde{u}_{j+k}(t) = \tilde{v}_j(t), \quad j = 1, \ldots, m-k \qquad (3.1)$$

По построению соответствующее управлению (3.1) решение системы (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ удовлетворяет соотношению $y(t) = h(t, x(t, t_0, x_0, \tilde{u}), \ \tilde{u}(t))$, что доказывает достаточность условий теоремы.

Необходимость докажем рассуждением от противного. Пусть система (1.1) функционально управляема и вопреки утверждению теоремы дефект выхода ненулевой. Тогда существует по крайней мере одно соотношение вида (2.6)

$$\Phi_1(t, y, \ldots, y^{(s)}) = 0 \qquad (3.2)$$

что означает зависимость одной из компонент сигнала, пусть $y_k(t)$, от остальных. Отсюда следует, что для функции $y(t)$, не удовлетворяющей соотношению (3.2), управления $u(t)$, реализующего этот сигнал, не существует, т.е. система (1.1) не функционально управляема, что противоречит предположению и доказывает теорему.

Свойство обратимости изучим, приняв следующее определение.

Определение 2. Система (1.1) называется обратимой по выходу (1.2) в точке $x_0 \in D$, если для любых двух различных допустимых функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ существует момент $t \in T$, такой, что

$$h(t, x(t, t_0, x_0, u_1), u_1(t)) \neq h(t, x(t, t_0, x_0, u_2), u_2(t))$$

Если в качестве области U принята некоторая окрестность нуля и функции $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$ определены на малом интервале $\tau \in T$ точки t_0, то говорят о локальной обратимости.

Критерий обратимости дает следующая теорема.

Теорема 2. Система (1.1) обратима по выходу (1.2) в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда дефект выхода равен $\varkappa = k - m$, функции φ, определяемые формулой (2.5), однозначны, система (2.7) удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши.

Доказательство. Для доказательства достаточности заметим, что при выполнении условий теоремы ОС имеет вид

$$\dot{x} = \Phi(t, x, y, \ldots, y^{(s)}) \qquad (3.3)$$

$$u = \varphi(t, x, y, \ldots, y^{(s)}) \qquad (3.4)$$

В силу однозначности функций (3.4) и единственности решения задачи Коши для системы (3.3) отображение $y(t) \to u(t)$ будет однозначным, что означает обратимость системы (1.1) по выходу (1.2).

Необходимость докажем рассуждением от противного. Пусть вопреки утверждению $\varkappa \neq k - m$. Поскольку $\varkappa \geqslant k - m$, то $\beta = \varkappa - k + m > 0$, и ОС имеет вид (2.5)–(2.7), где $\dim v = \beta > 0$. Для произвольного допустимого выходного сигнала $y(t)$ и двух непрерывных функций $v_1(t), v_2(t) (v_1(t) \not\equiv v_2(t))$ решение задачи Коши для системы (2.7) совместно с формулой (2.5) определяет функции $w_1(t), w_2(t)$. По построению ОС входным сигналам $u_1(t) = (w_1(t), v_1(t))$, $u_2(t) = (w_2(t), v_2(t)) (u_1(t) \not\equiv u_2(t)$ в силу выбора функций

$v_1(t)$, $v_2(t)$) соответствует один и тот же выход $y(t)$, что означает необратимость системы (1.1). Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие применение доказанных теорем.

Пример 1. Изучим функциональную управляемость и обратимость системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u_2 \tag{3.5}$$

по выходу

$$y_1 = x_1 + u_1 + u_2, \quad y_2 = x_2 + u_1 + u_2 \tag{3.6}$$

На первом шаге построения ОС из уравнений (3.6) находим

$$u_1 = y_1 - x_1 - u_2 \tag{3.7}$$

$$y_2 = x_2 - x_1 + y_1 \tag{3.8}$$

На втором шаге рассматриваем систему (3.5) с входом u_2 и выходом (3.8) на единицу меньшей размерности по сравнению с исходными. Имеем

$$\dot{y}_2 = x_3 - x_2 + \dot{y}_1, \quad \ddot{y}_2 = u_2 - x_3 + \ddot{y}_1 \tag{3.9}$$

Из уравнения (3.7) и второго уравнения (3.9) получаем

$$u_1 = y_1 + \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 - x_1 - x_3, \quad u_2 = \ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 + x_3 \tag{3.10}$$

Подставляя выражение для u_2 в систему (3.5), имеем

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = \ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 + x_3 \tag{3.11}$$

Уравнения (3.11), (3.10) образуют ОС, для которой $\varkappa = 0$ и выполнены условия теорем 1, 2. На этом основании заключаем, что система (3.5) функционально управляема и обратима по выходу (3.6).

Пример 2. Рассмотрим функциональную управляемость и обратимость системы (3.5) по выходу

$$y_1 = x_1 + u_1 + u_2, \quad y_2 = x_2 + u_1 + u_2, \quad y_3 = x_3 \tag{3.12}$$

Отличие от предыдущего примера состоит в том, что выход дополнен третьей компонентой y_3, которую используем при выполнении первого шага.

Из уравнения $\dot{y}_3 = u_2$ и второго уравнения (3.12) находим

$$u_1 = y_2 - \dot{y}_3 - x_2, \quad u_2 = \dot{y}_3 \tag{3.13}$$

Исключим u_1, u_2 с помощью формул (3.13) из системы (3.5) и первого уравнения (3.12)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = \dot{y}_3 \tag{3.14}$$

$$y_1 = x_1 - x_2 + y_2 \tag{3.15}$$

Дифференцируя выражение (3.15) в силу системы (3.14), получаем уравнения

$$\dot{y}_1 = x_2 - x_3 + \dot{y}_2; \quad \ddot{y}_1 = x_3 - \dot{y}_3 + \ddot{y}_2 \tag{3.16}$$

которые совместно с последним соотношением (3.12) и уравнением (3.15) используем для получения условия, накладываемого на выходную переменную, не содержащую фазовой переменной

$$\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 - y_3 + \dot{y}_3 = 0 \tag{3.17}$$

Уравнения (3.14), (3.13) образуют ОС, для которой $\varkappa = 1$. Применяя теоремы 1, 2, заключаем, что система (3.6) не функционально управляема, но обратима по выходу (3.12).

Замечание 4. Равенства $\varkappa = 0$, $\varkappa = k - m$ могут выполняться лишь для $k \geqslant m$. Отсюда следует, что необходимым условием функциональной управляемости и обратимости является неравенство $k \geqslant m$, т.е. размерность выхода должна быть не меньше размерности входа.

4. Идентифицируемость и наблюдаемость по части переменных. Важным для приложений является вариант задачи обратимости, когда начальное состояние $x_0 = x(t_0)$ системы (1.1) считается неизвестным. Задача определения входного сигнала в этом случае известна как задача идентификации. Свойство идентифицируемости может быть введено следующим образом [1, 2].

Определение 3. Система (1.1) называется идентифицируемой по выходу (1.2) в области D, если для любых двух различных допустимых функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ и любых решений $x_1(t) \in X_{u_1}$, $x_2(t) \in X_{u_2}$ существует момент $t \in T$, такой, что $h(t, x_1(t), u_1(t)) \neq$ $\neq h(t, x_2(t), u_2(t))$. Здесь X_{u_i} – множество решений системы (1.1) для $u = u_i(t)$ и любых начальных значений $x_0 \in D$.

Решение задачи идентификации по сравнению с задачей обратимости требует дополнительного изучения, связанного с необходимостью исключения в формуле (2.5) фазовой переменной x. С этой целью проанализируем всю информацию, получаемую в процессе построения ОС. Наряду с соотношениями (2.5), (2.6) имеются еще уравнения

$$\psi_\alpha(t, x, y, \ldots y^{(p_\alpha)}) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, \nu \tag{4.1}$$

которые были использованы для исключения переменной x в соотношениях (2.6). Очевидно, что если с помощью функций (4.1) можно исключить переменную x из формул (2.5), то в случае обратимости системы (1.1) она будет и идентифицируемой. Оказывается, это условие является и необходимым.

Теорема 3. Система (1.1) идентифицируема по выходу (1.2) в области D тогда и только тогда, когда дефект выхода равен $\varkappa = k - m$, система (2.7) удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши, функции (2.5) однозначны и не зависят от x.

Доказательство. При выполнении условий теоремы система является обратимой и при заданном начальном значении x_0 входной сигнал находится однозначно по формулам (3.4), а поскольку эти формулы не зависят от x, то они дают и решение задачи идентификации, что доказывает достаточность условий теоремы.

Для доказательства необходимости заметим, что если система идентифицируема, то она обратима, и при учете теоремы 2 остается доказать, что функции (3.4) не зависят от x. Рассуждая от противного, предположим, что переменную x исключить из функций (3.4) не удается, и они зависят от x. Выберем значения x_{10}, x_{20} и допустимый сигнал $y(t)$ таким образом, чтобы $u_1(t_0) = \varphi(t_0, x_{10}, y(t_0), \ldots, y^{(s)}(t_0)) \neq \varphi(t_0, x_{20}, y(t_0), \ldots$ $\ldots, y^{(s)}(t_0)) = u_2(t_0)$. Тогда решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ задачи Коши для системы (3.3) с $y(t)$ и начальными данными x_{10}, x_{20} определяют по формулам (3.4) два входа $u_1(t)$, $u_2(t)$, таких, что $u_1(t) \not\equiv u_2(t)$ и $h(t, x_1(t), u_1(t)) \equiv h(t, x_2(t), u_2(t)) \equiv y(t)$. Это означает неидентифицируемость системы (1.1) и противоречит исходному предположению. Теорема доказана.

Используем эту теорему для изучения свойства идентифицируемости системы (3.5) в примерах 1, 2. В примере 1 имеются два уравнения (3.8), (3.9), не содержащих входной переменной. Исключить с их помощью фазовую переменную в формулах (3.10), определяющих входной сигнал, не удается. Поэтому, на основании теоремы 3 система (3.5) неидентифицируема по выходу (3.6). В примере 2 имеются три уравнения (последнее уравнение (3.12), уравнение (3.15) и первое уравнение (3.16)), с помощью которых можно исключить фазовую переменную из формул (3.13), откуда на основании теоремы 3 следует идентифицируемость системы (3.5) по выходу (3.12).

В задачах идентификации встречаются случаи, когда структура входного сигнала известна, достаточно часто он является решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = g(t, x, u) \tag{4.2}$$

Задача нахождения переменной u для системы (1.1), (4.2) по выходу (1.2) при неизвестном значении $x_0 = x(t_0)$ является задачей наблюдения по части переменных. Свойство наблюдаемости по части переменных вводится следующим определением [2].

Определение 4. Система (1.1), (4.2) называется наблюдаемой по переменной u по выходу (1.2) в области D, если для любых двух решений $(x_1(t),\ u_1(t))$, $(x_2(t),\ u_2(t))$ таких, что $u_1(t) \neq u_2(t)$ существует момент $t \in T$, такой, что $h(t, x_1(t),\ u_1(t)) \neq$ $\neq h(t, x_2(t),\ u_2(t))$.

Необходимые и достаточные условия наблюдаемости по части переменных дает, очевидно, теорема 3. Однако решение этой задачи можно получить, используя непосредственно расширенный вектор наблюдения, состоящий из выходного сигнала и его производных, без построения ОС. Это дает возможность достаточно просто получить достаточные условия наблюдаемости по части переменных в локальной постановке с помощью теоремы о неявных функциях.

5. Достаточные условия. С целью получения решения обратных задач без построения ОС введем расширенный вектор наблюдения [1, 2]

$$y^{(0)}(t) = h_0(t, x, u) = h(t, x, u)$$

$$y^{(i)}(t) = h_i(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(i)}) = \frac{\partial h_{i-1}}{\partial t} + \frac{\partial h_i}{\partial x} f(t, x, u) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial h_{i-1}}{\partial u^{(j)}} u^{(j+1)}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.1}$$

Обозначим

$$z = (y^T,\ \dot{y}^T, \ldots, y^{(n)T})^T, \quad \nu = (\dot{u}^T, \ldots, u^{(n)T})^T$$

$$H(t, x, u, \nu) = (h_0^T(t, x, u), \ldots, h_n^T(t, x, u, \nu))^T$$

и перепишем уравнения (5.1) в виде

$$z(t) = H(t, x, u, \nu), \quad \nu \in U_\nu \subseteq R^{mn} \tag{5.2}$$

Выбор области U_ν определяет класс допустимых входных сигналов в рассматриваемых обратных задачах. Как следует из теорем 2, 3, единственность решения обратных задач обеспечивается существованием функций $u = \varphi(t, x, z)$ либо $u = \varphi(t, z)$, являющихся решением системы (5.2). Достаточные условия существования решения такого вида у системы алгебраических уравнений

$$z - F(x, y) = 0, \quad x \in P \subseteq R^n, \quad y \in Q \subseteq R^k, \quad z \in E \subseteq R^l \tag{5.3}$$

дает следующая лемма [2].

Лемма 1. Пусть в области $P \times Q \times E$ задана система уравнений (5.3), причем $F \in$ $\in C^p(P \times Q)$ и в некоторой точке $(x_0, y_0) \in P \times Q$

$$\operatorname{rank} \frac{\partial F(x, y)}{\partial (x, y)} = n + \operatorname{rank} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \tag{5.4}$$

Тогда существуют окрестности B_x, B_y, B_z точек x_0, y_0, $z_0 = F(x_0, y_0)$ и функция $G \in C^p(B_z)$, такие, что для $(x, y, z) \in B_x \times B_y \times B_z$ координата x решения (x, y) системы (5.3) описывается формулой $x = G(z)$.

Применив лемму 1 к системе (5.2), из условия (5.4) с помощью теорем 2, 3 получим достаточные условия локальной обратимости, идентифицируемости, наблюдаемости по части переменных.

Теорема 4. Пусть в некоторой точке $(t_0, x_0, u_0, \nu_0) \in T \times D \times U \times U_\nu$

$$\operatorname{rank}\frac{\partial H(t,x,u,\nu)}{\partial(u,\nu)} = m + \operatorname{rank}\frac{\partial H(t,x,u,\nu)}{\partial \nu}$$

Тогда система (1.1) локально обратима (в окрестности B_u точки u_0) по выходу (1.2) в точке x_0.

Теорема 5. Пусть в некоторой точке $(t_0, x_0, u_0, \nu_0) \in T \times D \times U \times U_\nu$

$$\operatorname{rank}\frac{\partial H(t,x,u,\nu)}{\partial(x,u,\nu)} = m + \operatorname{rank}\frac{\partial H(t,x,u,\nu)}{\partial(x,\nu)}$$

Тогда система (1.1) локально идентифицируема (в некоторой окрестности $B_x \times B_u$ точки (x_0, u_0)) по выходу (1.2).

В задаче наблюдения по части переменных, когда входной сигнал является решением системы уравнений (4.2), формулы (5.1), (5.2), вводящие расширенный вектор наблюдения, необходимо заменить следующими:

$$y^{(0)}(t) = h_0(t,x,u) = h(t,x,u)$$

$$y^{(i)}(t) = h_i(t,x,u) = \frac{\partial h_{i-1}}{\partial t} + \frac{\partial h_{i-1}}{\partial x} f(t,x,u) + \frac{\partial h_{i-1}}{\partial u} g(t,x,u), \quad i = 1,\ldots,n \tag{5.5}$$

$$z(t) = H(t,x,u) \tag{5.6}$$

Достаточные условия локальной наблюдаемости по части переменных дает следующая теорема.

Теорема 6. Пусть в некоторой точке $(t_0, x_0, u_0) \in T \times D \times U$

$$\operatorname{rank}\frac{\partial H(t,x,u)}{\partial(x,u)} = m + \operatorname{rank}\frac{\partial H(t,x,u)}{\partial x}$$

Тогда система (1.1), (4.2) локально наблюдаема (в некоторой окрестности B_u точки u_0) по переменной u по выходу (1.2).

6. Использование множества траекторий. Постановка задач идентификации и обратимости допускает использование нескольких траекторий, что, действительно, реализуется в практических задачах, в основном с целью проведения статистической обработки результатов. Однако такое обобщение этих задач имеет и теоретическое значение, так как расширяет класс систем, обладающих свойствами идентифицируемости и обратимости. Приведем соответствующие определения, следуя работам [1, 2].

Определение 5. Система (1.1) называется λ-обратимой (обратимой по λ траекториям) по выходу (1.2) в точке $(x_{01}, \ldots, x_{0\lambda}) \in D^\lambda$, если для любых двух различных допустимых функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ существует момент $t \in T$, такой, что

$$(h^T(t, x(t,t_0,x_{01},u_1),\ u_1(t)),\ldots,h^T(t,x(t,t_0,x_{0\lambda},u_1),\ u_1(t))) \neq$$
$$\neq (h^T(t,x(t,t_0,x_{01},u_2),\ u_2(t)),\ldots,h^T(t,x(t,t_0,x_{0\lambda},u_2),\ u_2(t)))$$

Определение 6. Система (1.1) называется λ-идентифицируемой (идентифицируемой по λ траекториям) по выходу (1.2) в области D, если для любых двух различных допустимых функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ и любых решений $x_{11}(t), \ldots, x_{1\lambda}(t) \in X_{u_1}$, $x_{21}(t),\ldots,x_{2\lambda}(t) \in X_{u_2}$ существует момент $t \in T$, такой, что

$$(h^T(t,x_{11}(t),\ u_1(t)),\ldots,h^T(t,x_{1\lambda}(t),\ u_1(t))) \neq (h^T(t,x_{21}(t),\ u_2(t)),\ldots,h^T(t,x_{2\lambda}(t),\ u_2(t)))$$

Очевидно, если система обратима или идентифицируема, то она λ-обратима и λ-идентифицируема, соответственно, для любого λ. Поэтому изучение свойств λ-обратимости и λ-идентифицируемости естественно проводить для систем необратимых и неидентифицируемых (по одной траектории).

Исследование с помощью ОС возможно двумя способами. Первый способ состоит в использовании ОС (2.5)–(2.7), построенной по одной траектории. На основании теорем 2, 3 заключаем, что для рассматриваемого случая функция φ в формуле (2.5) содержит вектор v, и для однозначной разрешимости необходимо и достаточно иметь возможность определить вектор v из соотношений

$$w=\varphi(t,\ x_i,\ y_i,\ \dot{y}_i,\dots,y_i^{(s)},\ v),\quad i=1,\dots,\lambda \tag{6.1}$$

Для нахождения v из соотношений (6.1) получаем эквивалентную систему

$$\varphi_{(i)}=\varphi(t,\ x_{i+1},\ y_{i+1},\dots,y_{i+1}^{(s)},\ v)-\varphi(t,\ x_1,\ y_1,\dots,y_1^{(s)},\ v)=0,\ i=1,\dots,\lambda-1 \tag{6.2}$$

При условии однозначной разрешимости системы (6.2) относительно v из уравнений (6.1) однозначно находится вектор w и совместно с найденным значением v однозначно определяет входной сигнал $u=(w,v)$, что означает λ-обратимость системы (1.1) по выходу (1.2).

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 7. Система (1.1) λ-обратима по выходу (1.2) тогда и только тогда, когда она обратима, либо система (2.7) удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши, функция (2.5) однозначна и система уравнений (6.2) однозначно разрешима относительно вектора v.

Для анализа свойства λ-идентифицируемости необходимо использовать уравнения (4.1), связывающие фазовую переменную и выходной сигнал на рассматриваемых траекториях:

$$\psi_\alpha(t,\ x_i,\ y_i,\dots,y_i^{(p_\alpha)})=0,\ \alpha=1,\dots,\nu;\ \ i=1,\dots,\lambda \tag{6.3}$$

Если система (6.2) однозначно разрешима относительно v и уравнения (6.2), (6.3) позволяют исключить переменные x_i из формул для w, v, получив их в виде

$$w=w(t,\ y_1,\dots,y_\lambda,\dots,y_\lambda^{(q)}),\ v=v(t,\ y_1,\dots,y_\lambda,\dots,y_\lambda^{(q)}) \tag{6.4}$$

то, повторяя доказательство теоремы 3, получаем, что система (1.1) λ-идентифицируема по выходу (1.2).

Теорема 8. Система (1.1) λ-идентифицируема по выходу (1.2) тогда и только тогда, когда она идентифицируема, либо система (2.7) удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши, функция (2.5) однозначна и система уравнений (6.2), (6.3) совместно с формулой (2.5) определяют векторы, w, v однозначным образом в виде (6.4).

Второй способ состоит в построении обратной системы для системы с фазовым вектором $X_\lambda=(x_1^T,\dots,x_\lambda^T)^T\in D^\lambda$, выходным сигналом $Y_\lambda=(y_1^T,\dots,y_\lambda^T)^T$ и исходным входным сигналом

$$\dot{x}_i=f(t,\ x_i,\ u),\quad i=1,\dots,\lambda \tag{6.5}$$

$$y_i=h(t,x_i,u),\ i=1,\dots,\lambda \tag{6.6}$$

Повторив рассуждения из разд. 2, построим ОС для системы (6.5) с выходом (6.6). Применив к ней теоремы 2, 3, получаем критерии λ-обратимости и λ-идентифицируемости. Достаточные условия локальной λ-обратимости и λ-идентифицируемости получаем из теорем 4, 5.

Теорема 9. Пусть в некоторой точке области $T\times D^\lambda\times U\times U_\nu$

$$\operatorname{rank}\frac{\partial(H(t,x_1,u,\nu),\dots,H(t,x_\lambda,u,\nu))}{\partial(u,\nu)}=m+\operatorname{rank}\frac{\partial(H(t,x_1,u,\nu),\dots,H(t,x_\lambda,u,\nu))}{\partial\nu}$$

Тогда система (1.1) локально λ-обратима по выходу (1.2) в этой точке.

Теорема 10. Пусть в некоторой точке области $T \times D^{\lambda} \times U \times U_{\nu}$

$$\operatorname{rank}\frac{\partial(H(t,x_1,u,\nu),\ldots,H(t,x_\lambda,u,\nu))}{\partial(x_1,\ldots,x_\lambda,u,\nu)} = m + \operatorname{rank}\frac{\partial(H(t,x_1,u,\nu),\ldots,H(t,x_\lambda,u,\nu))}{\partial(x_1,\ldots,x_\lambda,\nu)}$$

Тогда система (1.1) локальна λ-идентифицируема по выходу (1.2).

Аналогичные результаты верны для задачи идентификации входного сигнала известной структуры. Так, достаточные условия локальной λ-идентифицируемости дает теорема 10, в формулировке которой отсутствует вектор ν и функция $H(t, x, u)$ определена формулами (5.5), (5.6). Анализируя задачу идентификации по множеству траекторий для постоянных параметров $u = \text{const}$ можно указать два числа [2]

$$\lambda_{\min} = [(m-1)\alpha^{-1}] + 1, \quad \lambda_{\max} = m + 1 - \alpha$$

$$\alpha = \operatorname{rank}\frac{\partial H(t,x,u)}{\partial(x,u)} - \operatorname{rank}\frac{\partial H(t,x,u)}{\partial x}$$

где $[\cdot]$ – функция Антье, функция $H(t, x, u)$ вычисляется по формулам (5.5), (5.6), в которых следует положить $g = 0$. С их помощью устанавливается следующее свойство: система (1.1) не может быть идентифицируема по $\lambda < \lambda_{\min}$ траекториям; если система (1.1) неидентифицируема по $\lambda = \lambda_{\max}$ траекториям, то она неидентифицируема по любому числу траекторий.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = x_3 u_1 + u_2, \ \dot{x}_3 = u_2 \tag{6.7}$$

с выходом

$$y_1 = x_1, \ y_2 = x_2 \tag{6.8}$$

Для построения ОС вычисляем

$$\dot{y}_1 = x_2, \ \dot{y}_2 = x_3 u_1 + u_2 \tag{6.9}$$

Из формул (6.8), (6.9) находим зависимость входного сигнала от выходного, соотношение для выходного сигнала и ОС

$$w = \dot{y}_2 - x_3 v, \ u = (v, \ w) \tag{6.10}$$

$$\dot{y}_1 = y_2 \tag{6.11}$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = y_2, \ \dot{x}_3 = \dot{y}_2 - x_3 v \tag{6.12}$$

Наличие связи (6.11) показывает, что дефект ϰ системы (6.7) равен единице, поэтому условие $\varkappa = k - m$ теоремы 2 не выполнено и система (6.7) не обратима, а значит, и не идентифицируема по выходу (6.8).

Для исследования λ-обратимости запишем уравнения (6.2) для $\lambda = 2$: $\varphi_{(1)} = \dot{y}_{22} - x_{32}v - \dot{y}_{21} + x_{31}v = 0$, которое однозначно разрешимо относительно v при $x_{32} \neq x_{31}$. На основании теоремы 7 заключаем, что система (6.7) λ-обратима по выходу (6.8) для $\lambda \geqslant 2$. Для изучения λ-идентифицируемости рассмотрим уравнения (6.3), которые в данном случае совпадают с уравнениями (6.8). Эти уравнения не позволяют исключить переменные x_{3i} из выражения для v при любом λ, что указывает на невыполнение условий теоремы 8 и означает неидентифицируемость системы (6.7) по выходу (6.8) по любому числу траекторий.

Проверим выполнение достаточных условий λ-обратимости и λ-идентифицируемости. Из уравнений (6.9) находим

$$\det\frac{\partial(\dot{y}_{21}, \ \dot{y}_{22})}{\partial(u_1, \ u_2)} = x_{31} - x_{32} \neq 0 \ \text{ при } x_{31} \neq x_{32}$$

Поэтому условия теоремы 9 выполнены для $H(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$, $\lambda = 2$ и система (6.7) локально λ-обратима для $\lambda \geqslant 2$. Выписав формулы (5.1), (5.2) для расширенного вектора наблюдения, можно показать, что для любого λ

$$\operatorname{rank}\frac{\partial(H(x_1,u,v),\dots,H(x_\lambda,u,v))}{\partial(x_1,\dots,x_\lambda,u,v)} = \operatorname{rank}\frac{\partial(H(x_1,u,v),\dots,H(x_\lambda,u,v))}{\partial(x_1,\dots,x_\lambda,v)}$$

что означает невыполнение достаточных условий λ-идентифицируемости для любого λ.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = x_1u_1 + u_2 \tag{6.13}$$

с выходом

$$y = x_1 \tag{6.14}$$

ОС имеет вид

$$w = \ddot{y} - x_1v,\ \ u = (v,\ w);\ \ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = \dddot{y} \tag{6.15}$$

Условия теоремы 2 не выполнены, и система (6.13) не обратима и не идентифицируема по выходу (6.14). Отметим, что этот вывод следует из того, что размерность выходного сигнала меньше размерности входного, и для анализа обратимости нет необходимости строить ОС (6.15). Однако с ее помощью можно исследовать λ-обратимость и λ-идентифицируемость. Из первой формулы (6.15) следует, что для $\lambda = 2$ вектор v однозначно определяется из уравнения $\varphi_{(1)} = 0$ и на основании теоремы 7 система (6.13) λ-обратима по выходу (6.14) для $\lambda \geqslant 2$. Для исследования λ-идентифицируемости выпишем уравнения (6.3): $y_i = x_{1i}$, $\dot{y}_i = x_{2i}$, $\ddot{y}_i = x_{3i}$ $(i = 1,\dots,\lambda)$, которые однозначно разрешимы относительно фазовых переменных x_i и позволяют исключить их из выражений для векторов v, w. Из теоремы 8 следует, что система (6.13) λ-идентифицируема по выходу (6.14) для $\lambda \geqslant 2$. Вычисляя расширенный вектор наблюдения по формулам (5.1), (5.2), можно показать выполнение достаточных условий теорем 9, 10 для $\lambda \geqslant 2$.

Рассмотренные примеры показывают, что для нелинейных систем использование множества траекторий действительно расширяет возможности восстановления входного сигнала, позволяя в ряде случаев решить задачу даже для выходного сигнала, размерности меньшей, чем размерность входа, что принципиально невозможно при использовании одной траектории. Для линейных систем $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ и линейных выходных сигналов $y = C(t)x + D(t)u$
использование множества траекторий не дает преимущества, так как ОС

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)v + Q_0(t)z;\ \ w = E_0(t)x + F_0(t)z + G_0(t)v,\ \ R_0(t)z = 0$$

линейно зависит от вектора v, и поэтому уравнения (6.2) не зависят от v, что не позволяет определить из них вектор v и не приводит к λ-обратимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Условия идентифицируемости нелинейных механических систем // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1984. Вып. 16. С. 77–91.
2. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Условия однозначной разрешимости обратных задач управляемых динамических систем // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44. № 10. С. 1359–1366.
3. *Hirschorn R.M.* Invertibility of nonlinear control systems // SIAM J. Control and Optimiz. 1979. V. 17. N 2. P. 289–297.
4. *Singh S.N.* A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. 26. N 2. P. 595–598.
5. *S. Abu El Ata-Doss, Coïc A., Fliess M.* Non-linear predictive control by inversion: discontinuities for critical behaviour // Intern. J. Control. 1992. V. 55. N 6. P. 1521–1533.

Донецк

Поступила в редакцию
16.II.1996