УДК 531.37

© 1998 г. В.М. Матросов, И.А. Финогенко

О ПРИТЯЖЕНИИ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ СКОЛЬЖЕНИЯ

Рассматриваются вопросы притяжения для автономных механических систем с голономными, идеальными, удерживающими связями под действием потенциальных, гироскопических, диссипативных сил и сил трения скольжения. В частности, устанавливаются полуинвариантность ω – предельных множеств и условия дихотомичности таких систем. Исследования основаны на принципе инвариантности с использованием нескольких функций Ляпунова, объединяющем методы работы [1] с принципом инвариантности Ла-Салля [2, 3] применительно к автономным системам c-разрывной правой частью.

Исследование динамических свойств механических систем с трением скольжения современными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений в значительной степени связано с созданием и развитием общей математической теории таких уравнений. Трудности, возникающие на этом пути, можно было бы поделить на две части: первые связаны с возможным нарушением утверждения о существовании, неограниченной продолжимости и единственности всех движений (в рамках принятой механической модели системы, включающей задание сил трения в соответствии с законом Кулона); вторые – с разрывностью обобщенных ускорений в точках относительного покоя (с разрывностью правых частей уравнений движения), которые и обусловливают невозможность применения к системам с трением хорошо разработанных методов классической теории дифференциальных уравнений.

Объяснению причин "неединственности" или "невозможности" движений, на которые впервые указал Пэнлеве [4], посвящены многочисленные исследования (см. [5–10])[1]. К настоящему времени они носят в основном или дискуссионный характер или связаны как с введением и учетом тех или иных дополнительных механических гипотез, так и с изучением условий возникновения или отсутствия парадоксов Пэнлеве и анализом областей их конкретных проявлений.

Следует заметить, что даже однозначная определенность и совместимость уравнений движения с законами Кулона (отсутствие парадоксов Пэнлеве) не устраняет трудностей изучения этих уравнений, связанных с разрывной зависимостью сил трения от обобщенных скоростей.

Ниже исследуются некоторые свойства движений (полуинвариантность ω – предельных множеств, притяжение зон застоя) механических систем с трением скольжения, введенных и исследованных в работах [11–12]. Полученные здесь результаты опираются на математическую теорию систем с трением, развитую в [11–14].

Вначале устанавливается модифицированный принцип инвариантности для автономных уравнений общего вида, позволяющий уточнять условия притяжения движений системы некоторым множеством M с использованием набора вспомогательных функций Ляпунова.

1. Принцип инвариантности и притяжение для автономных систем. Рассматривается автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x) \qquad (1.1)$$

[1] *Ле Суан Ань.* Теория механических систем с трением скольжения. Л., 1987. 202 с. – Деп. в ВИНИТИ. № 84–В87.

с функцией $f: \Omega \to R^n$, определенной в некоторой области $\Omega \subset R^n$. Под правосторонним решением уравнения (1.1) на $[t_0, t_1)$ с начальными условиями (t_0, x_0) понимается непрерывная дифференцируемая справа функция $x(t)$, определенная на промежутке $[t_0, t_1)$ и удовлетворяющая соотношениям

$$D^+x(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

для всех $t \in [t_0, t_1)$, где $D^+x(t)$ – правая производная функции $x(t)$.

Всюду в дальнейшем решения уравнения (1.1) понимаются как правосторонние, считается $t_0 = 0$ и предполагаются выполненными для уравнения (1.1) следующие основные условия.

1°. Для любого начального состояния $x_0 \in \Omega$ существует локальное решение уравнения (1.1).

2°. Функция $f(x)$ является локально ограниченной.

3°. Предел $x(t)$ любой равномерно на $[0, t_1)$ сходящейся последовательности решений уравнения (1.1) является решением уравнения (1.1) при условии, что $x(t) \in \Omega$ при всех $t \in [0, t_1)$;

Единственность или правосторонняя единственность решений не предполагается. Очевидно, каждое из условий 1°–3° выполняется, если функция f непрерывна; были указаны условия [12–14], при которых они выполняются и для систем с трением.

Для решения $x(t)$ уравнения (1.1), определенного на правом максимальном промежутке существования $[0, \omega)$, через $\Lambda^+(x)$ обозначим ω – предельное множество. В определениях полуинвариантности множеств, притяжения и слабого притяжения следуем [3].

Лемма 1.1. Любое решение уравнения (1.1) может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[0, \omega)$. При этом либо $\omega = +\infty$, либо $\omega < +\infty$ и для любого компактного множества $K \subset \Omega$ существует точка $t_K \in (0, \omega)$ такая, что $x(t) \notin K$ для всех $t \in (t_K, \omega)$ ($x(t)$ стремится к границе $\partial\Omega$ множества Ω).

В частности, если $\Lambda^+(x) \cap \Omega \neq \emptyset$, то $\omega = +\infty$.

Доказательство. Существование продолжения решения $x(t)$ на правый максимальный промежуток существования устанавливается с использованием леммы Цорна и основных условий 1°, 2°, сформулированных выше.

Для того чтобы доказать, что $x(t)$ стремится к границе множества Ω, предположим противное. Тогда существуют компактное множество $K \subset \Omega$, последовательности точек $t_i \to \omega$, $x(t_i) \to a$ такие, что $x(t_i) \in K$ и $a \in K$. Рассуждения, аналогичные изложенным ранее ([15], с. 26), позволяют убедиться, что существует $\lim_{t\to\omega} x(t) = a$. Но тогда решение $x(t)$ может быть продолжено вправо, что невозможно.

Для полноты изложения сформулируем некоторые свойства ω-предельных множеств, справедливые для произвольных непрерывных кривых: $\Lambda^+(x)$ – замкнутое множество; $\Lambda^+(x) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда функция $\|x(t)\|$ не является бесконечно большой при $t \to \omega$; множество $\Lambda^+(x)$ ограничено тогда и только тогда, когда функция $x(t)$ ограничена и при этом $\lim_{t\to\omega} d(x(t), \Lambda^+(x)) = 0$, где d – расстояние от точки до множества.

Лемма 1.2. Множество $\Lambda \stackrel{\Delta}{=} \Lambda^+(x) \cap \Omega$ полуинвариантно.

Доказательство. Пусть $a \in \Lambda \neq \emptyset$. Тогда согласно лемме 1.1 $\omega = +\infty$ и существует последовательность точек $t_k \to +\infty$ такая, что $t_{k+1} - t_k > \alpha$ для некоторого $\alpha > 0$ и $\lim_{k\to\infty} x(t_k) = a$.

Очевидно, функции $y_k(t) = x(t_k + t)$ – решения уравнения (1.1), определенные на промежутке $[0, \alpha)$ и $y_k(0) = x(t_k) \to a$. Так как функция f локально ограничена, то начиная с некоторого номера k последовательность $\{y_k(t)\}_1^\infty$ является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на некотором промежутке $[0, t_1]$, $0 < t_1 < \alpha$ и функции $y_k(t)$ принимают свои значения в окрестности точки a, принадлежащей множеству Ω вместе со своим замыканием. Поэтому согласно теореме Арцела из этой последовательности можно выделить равномерно на $[0, t_1]$ сходящуюся подпоследовательность, предел $y(t)$ которой будет решением уравнения (1.1), определенным на $[0, t_1)$, с начальным условием $y(0) = a$. Очевидно, $y(t) \in \Lambda$ для всех $t \in [0, t_1)$.

Таким образом, для любого $a \in \Lambda$ существует решение $y(t)$ уравнения (1.1), определенное на некотором промежутке $[0, t_1)$ со свойством $y(t) \in \Lambda$ для всех $t \in [0, t_1)$. Теперь можно убедиться, что для любого $a \in \Lambda$ существует решение $y(t)$ уравнения (1.1) с начальным условием $y(0) = a$, непродолжимое во множестве Λ, т.е. $y(t) \in \Lambda$ для всех $t \in [0, \omega_y)$ и не существует решения $z(t)$ уравнения (1.1), совпадающего с $y(t)$ на промежутке $[0, \omega_y)$, и такого, что $z(t) \in \Lambda$ для всех $t \in [0, \omega_z)$, где $\omega_z > \omega_y$.

Если ω_y не является правым концом максимального промежутка существования решения $y(t)$ (во множестве Ω), то существует $\lim_{t \to \omega_y} y(t) \in \Lambda$ и тогда $y(t)$ может быть продолжено во множестве Λ, что невозможно. Следовательно, решение $y(t)$ непродолжимо и тем самым полуинвариантность множества Λ доказана.

Замечание 1.1. Если $\Lambda^+(x) \subset \Omega$ – ограниченное множество, то для любого $a \in \Lambda^+(x)$ существует инвариантное относительно $\Lambda^+(x)$ решение $y(t)$ уравнения (1.1), определенное на $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющее условию $y(0) = a$.

Через $w(x)$ будем обозначать произвольную функцию с неотрицательными значениями, определенную в области Ω. Положим $E(w = 0) \overset{\Delta}{=} \{x \in \Omega : w(x) = 0\}$.

Для локально липшицевой функции $V : \Omega \to R^n$ под $D^{*+}V(x)$ будем понимать правую верхнюю производную Дини в силу уравнения (1.1), которая может быть вычислена с использованием теоремы Иосидзавы (см. [3], с. 269), справедливой, как легко проверить, и для рассматриваемых систем.

С учетом леммы 1.2 в рамках сделанных предположений (основных условий) можно утверждать, что для уравнения (1.1) справедлив принцип инвариантности Ла-Салля для автономных систем в форме теорем из [2] и из [3], который здесь сформулируем в удобном для дальнейшего виде, заметив, что его доказательство соответствует доказательству, приведенному ранее ([3], с. 190).

Теорема 1.1. Пусть $x(t)$ – непродолжимое решение уравнения (1.1) и $V : \Omega \to R^n$ – локально липшицевая функция, такая, что $D^{*+}V(x) \leqslant -w(x)$ на $[0, \omega)$. Тогда

$$\Lambda^+(x) \cap \Omega \subset E(w = 0)$$

Теорема 1.2. Пусть для уравнения (1.1) и некоторого множества $M \subset \Omega$ существует конечный набор локально липшицевых функций $V_i(x)$, $0 \leqslant i \leqslant N$, таких, что $D^{*+}V_0(x) \leqslant -w(x)$ для всех $x \in \Omega$ и для любого $x \in E(w = 0) \setminus \overline{M}$ существует функция V_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, такая, что $V_i(x) = 0$ и $D^{*+}V_i(x) \neq 0$.

Тогда для любого непродолжимого решения $x(t)$ уравнения (1.1) выполняется условие

$$\Lambda^+(x) \cap \Omega \subset \overline{M} \tag{1.2}$$

При этом

$$\Lambda^+(x) \subset \overline{M} \cup \partial\Omega \tag{1.3}$$

и справедливы утверждения:

1) либо $\|x(t)\| \to +\infty$, либо $x(t)$ слабо стремится к множеству $M \cup \partial\Omega$ при $t \to \omega$;

2) либо $x(t)$ неограничено, либо $x(t)$ стремится к множеству $M \cup \partial\Omega$ при $t \to \omega$;

3) если $M \cup \partial\Omega = \emptyset$, то $\|x(t)\| \to +\infty$ при $t \to \omega$.

Доказательство. Включение (1.3) следует из (1.2) и леммы 1.1. Утверждения 1–3 теоремы вытекают из (1.3). Таким образом, для доказательства теоремы нужно установить выполнение условия (1.2).

Случай $\Lambda^+(x) = \emptyset$ или $\Lambda^+(x) \subset \partial\Omega$ тривиален. Пусть $\Lambda^+(x) \cap \Omega \neq \emptyset$ и $a \in \Lambda^+(x) \cap \Omega$. Тогда $\omega = +\infty$ и существует последовательность точек $t_k \to +\infty$ такая, что $\lim_{k\to\infty} x(t_k) = a$.

Предположим, что $a \notin \overline{M}$. В силу леммы 1.2 и теоремы 1.1 существует решение $y(t)$ уравнения (1.1) такое, что $y(0) = a$ и $y(t) \in E(w = 0)$ для всех $t \in [0, \omega_y)$. Так как множество $\overline{M}$ замкнуто, то $y(t) \notin \overline{M}$ для всех $t \in [0, \alpha)$ при некотором $\alpha \in (0, \omega_y)$.

Из условий теоремы вытекает, что существует функция V_{i_1} и достаточно малое число $h_1 > 0$ такие, что $V_{i_1}(a) = 0$, $V_{i_1}(y(h_1)) \neq 0$ и $y(h_1) \neq \overline{M}$. Следовательно, найдется функция V_{i_2}, $i_1 \neq i_2$ такая, что $V_{i_2}(y(h_1)) = 0$, $V_{i_2}(y(h_1 + h_2)) \neq 0$ и $y(h_1 + h_2) \notin \overline{M}$ для некоторого числа $h_2 > 0$, настолько малого, что и $V_{i_1}(y(h_1 + h_2)) \neq 0$. Продолжая этот процесс, получим точку $t_N = \sum_{i=1}^{N} h_i$ такую, что $t_N \in [0, \alpha)$, $V_i(y(t_N)) \neq 0$ для всех $i = 1,\ldots,N$, $y(t_N) \in E(w = 0)\setminus\overline{M}$. Последнее противоречит условиям теоремы и, тем самым доказывается условие (1.2). Теорема доказана.

Для каждого $x \in \overline{\Omega}$ обозначим

$$\underline{w}(x) = \begin{cases} w(x) & , x \in \Omega \\ \underline{\lim}_{x' \to x, x' \in \Omega} w(x') & , x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Будем говорить, что функция $V(x)$ непрерывна вплоть до границы, если для каждой точки $x \in \partial\Omega$ существует конечный предел $\lim_{x' \to x, x' \in \Omega} V(x')$. Функцию f назовем локально ограниченной на границе, если для любой точки $x \in \partial\Omega$ функция f ограничена на пересечении некоторой окрестности x с множеством Ω.

Теорема 1.3. Пусть $V_0(x)$ – непрерывная вплоть до границы локально липшицева функция, такая, что

$$D^{*+}V_0(x) \leqslant -w(x) \tag{1.4}$$

для всех $x \in \Omega$ и f – локально ограниченная на границе функция. Тогда $\Lambda^+(x) \subset$ $\subset E(\underline{w} = 0)$ для любого решения уравнения (1.1), определенного при всех $t \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $a \in \Lambda^+(x)$. Если $a \in \Omega$, то утверждение теоремы следует из теоремы 1.1.

Предположим, что $a \in \partial\Omega$ и $\lim_{t_k \to +\infty} x(t_k) = a$. Из условий теоремы вытекает, что существует конечный предел $\lim_{t \to +\infty} V(x(t)) = c$.

Пусть $a \notin E(\underline{w} = 0)$. Тогда существуют числа $\delta > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $w(x') > \alpha$ для всех $x' \in S_\delta(a) \cap \Omega$, где $S_\delta \stackrel{\Delta}{=} \{x' : ||x - x'|| < \delta\}$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что для последовательности точек t_k выполняется неравенство $t_{k+1} - t_k > h > 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Так как функция f локально ограничена на границе, то найдутся числа $h_0 \in (0, h)$ и k_0 такие, что $x(t_k + t) \in S_\delta(a) \cap \Omega$ для всех $t \in [0, h_0)$ и $k \geqslant k_0$. Но тогда

$$V(x(t)) \leqslant V(x(0)) - \alpha(k - k_0)h_0$$

при условии, что $k > k_0$, $t > t_{k+1}$. Последнее неравенство противоречит ограниченности функции $V(x(t))$. Следовательно, $a \in E(\underline{w} = 0)$. Теорема доказана.

Теорема 1.4. Пусть $M \subset \Omega$ – некоторое множество, $V_0(x)$ – локально липшицевая, непрерывная вплоть до границы функция, для которой выполняется неравенство (1.4). Предположим, что функция f локально ограничена на границе и в некоторой окрестности множества $\overline{\Omega}$ определены непрерывно-дифференцируемые функции $V_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ со свойством: для любого $x \in E(\underline{w}=0) \setminus \overline{M}$ существует функция V_i такая, что $V_i(x)=0$ и выполняется $D^+V_i(x) \neq 0$, если $x \in (E(w=0) \cap \Omega) \setminus \overline{M}$

$$(\operatorname{grad} V_i(x), \bar{f}(x)) > 0 \text{ для всех } \bar{f}(x), \text{если } x \in (E(\underline{w}=0) \cap \partial\Omega) \setminus \overline{M} \tag{1.5}$$

где $\bar{f}(x)$ – предельные значения функции f в точке x.

Тогда для любого решения $x(t)$ уравнения (1.1), определенного для всех $t \geqslant 0$, выполняется включение

$$\Lambda^+(x) \subset \overline{M} \tag{1.6}$$

При этом

1) либо $\|x(t)\| \to +\infty$, либо $x(t)$ слабо стремится к множеству M при $t \to +\infty$;

2) либо функция $x(t)$ не ограничена, либо $x(t)$ стремится к множеству M при $t \to +\infty$;

3) если $M = \emptyset$, то $\|x(t)\| \to +\infty$ при $t \to +\infty$ для любого решения уравнения (1.1).

Доказательство. С учетом теоремы 1.2, для того чтобы доказать (1.6), достаточно показать, что $\Lambda^+(x) \cap \partial\Omega \subset \overline{M}$. Предположим противное: существует $a \in (\Lambda^+(x) \cap \partial\Omega) \setminus \overline{M}$.

Пусть $x(t_k) \to a$, где $t_k \to +\infty$, $t_{k+1} - t_k > h > 0$ при $k = 1, 2, \ldots$. Так как функция f локально ограничена на границе, то простыми рассуждениями с использованием теоремы Арцела – Асколи убеждаемся, что существует достаточно малое число $h_0 \in (0, h)$ такое, что последовательность решений $y_k(t) = x(t_k + t)$, $t \in [0, h)$ уравнения (1.1) содержит равномерно на отрезке $[0, h_0]$ сходящуюся подпоследовательность, предел которой обозначим $y(t)$.

Очевидно, $y(0) = a$ и $y(t) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \in [0, h_0]$. Покажем, что $y(t) \in \partial\Omega$ для всех $t \in [0, \alpha)$ для некоторого $\alpha \in [0, h_0)$. Предполагая противное, заключаем, что существует последовательность точек $t_i \to +0$, $t_i \neq 0$, такая, что $y(t_i) \notin \partial\Omega$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Тогда согласно теореме 1.2 $y(t_i) \in \overline{M}$ и, следовательно, $y(0) \in \overline{M}$, что невозможно. Полученное противоречие и теорема 1.3 дают

$$y(t) \in (E(\underline{w}=0) \cap \partial\Omega) \setminus \overline{M}$$

для всех $t \in [0, \alpha)$ при некотором малом $\alpha > 0$.

Согласно утверждениям из [16] (с. 53 лемма 1, с. 60 следствие 1, с. 56 теорема 1) выполняется включение

$$\operatorname{cont} y(t) \subset F(y(t)) \tag{1.7}$$

для всех $t \in [0, \alpha)$, где $F(x)$ – выпуклая оболочка всех предельных значений функции f в каждой точке $x \in \overline{\Omega}$, $\operatorname{cont} y(t)$ – контингенция функции $y(t)$.

Пусть V_{i_1} – функция, существование которой предполагается в условиях теоремы для точки $y(0)$. Тогда $V_{i_1}(y(0)) = 0$ и из (1.5) вытекает, что

$$\sup\{(\operatorname{grad} V_{i_1}(y(0)), z) : z \in F(y(0))\} > 0 \tag{1.8}$$

Из (1.7), (1.8) следует, что любое правое производное число Дини функции V_{i_1} вдоль $y(t)$ в точке $t = 0$ отлично от нуля. Поэтому существует достаточно малое число $h_1 \in [0, \alpha)$, такое, что $V_{i_1}(y(h_1)) \neq 0$, $y(h_1) \notin \overline{M}$. Теперь, выбирая функцию V_{i_2}, такую, что $V_{i_2}(y(h_1)) = 0$, убеждаемся, что существует число $h_2 > 0$, такое, что $V_{i_2}(y(h_1 + h_2)) \neq$ $\neq 0$, $V_{i_1}(y(h_1 + h_2)) \neq 0$, $y(h_1 + h_2) \notin \overline{M}$. Завершается доказательство так же, как в теореме 1.2.

2. Притяжение в системах с трением. Рассматривается механическая система с k степенями свободы, стесненная голономными, не зависящими от времени идеальными связями с силами трения скольжения, добавляемыми к активным силам.

Уравнения ее движения могут быть записаны в форме Лагранжа [11]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_a}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T_a}{\partial q^i} = Q_i^T + Q_i^A, \quad i = 1,\ldots,k \tag{2.1}$$

Здесь T_a – кинетическая энергия системы, представляющая сумму $T_a = T + T_1 + T_0$ положительно определенной квадратичной формы T обобщенных скоростей с симметричной матрицей $A(q) = [a_{ij}(q)]_1^k$, линейной формы обобщенных скоростей $T_1 =$ $= \sum_{i=1}^k a_i(q)\dot{q}^i$ и функции $T_0(q)$. Пусть обобщенные силы трения скольжения имеют вид

$$Q_s^T(q,\dot{q},\ddot{q}) = \begin{cases} -f_s(q^s,\dot{q}^s)\,|N_s(q,\dot{q},\ddot{q})|\operatorname{sgn}\dot{q}^s, \text{если } \dot{q}^s \neq 0 \\ f_s(q^s,0)\,|N_s(q,\dot{q},\ddot{q})|\operatorname{sgn} Q_s^{T0}(q,\dot{q},\ddot{q}), \text{если } \dot{q}^s = 0, \\ \qquad |Q_s^{T0}(q,\dot{q},\ddot{q})| > f_s(q^s,0)\,|N_s(q,\dot{q},\ddot{q})|\big|_{\dot{q}^s=0} \\ Q_s^{T0}(q,\dot{q},\ddot{q}), \qquad \text{если } \dot{q}^s = 0, \\ \qquad |Q_s^{T0}(q,\dot{q},\ddot{q})| \leq f_s(q^s,0)\,|N_s(q,\dot{q},\ddot{q})|\big|_{\dot{q}^s=0} \end{cases}$$

$$Q_s^{T0}(q,\dot{q},\ddot{q}) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{j=1,\,j\neq s}^{k} a_{s,j}(q)\ddot{q}^j - [g_s(q,\dot{q}) + Q_s^A(q,\dot{q})]_{\dot{q}=0}$$

где $1 \leq s \leq k_*$, $k_* \leq k$, $f_s(q^s,\dot{q}^s) > 0$ – коэффициенты трения, $|N_s(q,\dot{q},\ddot{q})|$ – модули нормальных реакций, $Q_s^{T0}(q,\dot{q},\ddot{q})$ – силы трения при относительном покое. Для $s = k_* + 1,\ldots,k$ считаем $f_s = 0$.

Здесь можно предположить, например, что

$$Q_s^A(q,\dot{q}) = D_s(q,\dot{q}) + K_s(q)$$

$$\Gamma_s(q,\dot{q}) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial T_1}{\partial q^s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}^s} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial a_j}{\partial q^s} - \frac{\partial a_s}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j, \quad Q_s^e(q) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial T_0}{\partial q^s}$$

где $D_s(q,\dot{q})$ – диссипативные силы, $K_s(q) = -\partial\Pi/\partial q^s$, $\Pi(q)$ – потенциальная энергия системы, $\Gamma_s(q,\dot{q})$ – гироскопические силы с условиями $\Gamma_s(q,0) \equiv 0$; $D_s(q,0) \equiv 0$, $Q_s^e(q)$ – обобщенные переносные силы инерции ($s = 1,\ldots,k$). Тогда (2.1) записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = D_i + \Gamma_i + K_i + Q_i^e + Q_i^T, \quad i = 1,\ldots,k$$

и функция g_s в выражении для силы трения покоя определится так:

$$g_s(q,\dot{q}) = \Gamma_s(q,\dot{q}) + Q_s^e(q) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q^s}\dot{q}^\nu\dot{q}^j - \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial a_{sj}}{\partial q^\nu}\dot{q}^\nu\dot{q}^j$$

При определенных условиях (см. [14]) уравнения (2.1) разрешимы относительно обобщенных ускорений и приводятся к виду

$$\ddot{q} = G(q,\dot{q}) \tag{2.2}$$

с разрывной функцией G. Для (2.2) доказаны теоремы существования правосторонних решений и изучены их свойства. В частности, установлены все свойства 1°–3° из разд. 1 основных условий ([14], лемма 2, лемма 5, теорема 1). В соответствии с этим в дальнейшем считаем, что уравнения (2.1) и (2.2) равносильны и полагаем при этом $\Omega = R^{2k}$.

Положим $V_0 \overset{\Delta}{=} \Pi + T - T_0$. Умножая уравнения (2.1) на $\dot{q}^i$ и затем складывая их, получаем уравнение рассеяния энергии

$$D^+V_0(q,\dot{q}) = -\sum_{i=1}^{k_*} f_i\,|N_i|\,|\dot{q}^i| + \sum_{i=1}^{k} D_i(q,\dot{q})\dot{q}^i (\leqslant 0)$$

Пусть $J \subset (1,\ldots,k_*)$. Обозначим

$$w_J(q,\dot{q}) = \sum_{i\in J} f_i\,|N_i|\,|\dot{q}^i|, \qquad H_J = \{(q,\dot{q}) : \dot{q}^i = 0, i \in J\}$$

$$M_J = \{(q,\dot{q}) : \dot{q}^i = 0,\ f_i\,|N_i| \geqslant |Q_i^{T0}|,\ i \in J\}$$

$$M = \{(q,0) : f_i\,|N_i| \geqslant |K_i + Q_i^e|,\ i = 1,\ldots,k_*;\ K_i + Q_i^e = 0,\ i = k_* + 1,\ldots,k\}$$

Очевидно, если $J' \subset J$, то

$$w_{J'} \leqslant w_J \leqslant -D^+V_0, \quad H_J \subset H_{J'}, \quad M_J \subset M_{J'}$$

и всегда $M \subset M_J \subset H_J \subset E(w_J = 0)$. Множество M представляет собой множество положений равновесия для уравнений (2.1). Множества H_J и M замкнуты.

Так же как в [11, 12], обозначим $N(\dot{q}) = \{i \in (1,\ldots,k_*) : \dot{q}^i = 0\}$. Легко проверить, что $(q,\dot{q}) \in H_J \Leftrightarrow J \subset N(\dot{q})$ и

$$((q,\dot{q}) \in E(w_J = 0) \setminus H_J) \Leftrightarrow (J \setminus N(\dot{q}) \neq \emptyset) \wedge (\forall i \in J \setminus N(\dot{q}), |N_i| = 0) \tag{2.3}$$

Непосредственно из сделанных предположений и теоремы 1.1 вытекает, что для любого решения $z(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ уравнения (2.1) и множества $J \subset (1,\ldots,k_*)$ выполняется включение $\Lambda^+(z) \subset E(w_J = 0)$

Теорема 2.1. Пусть для некоторого множества $J \subset (1,\ldots,k_*)$ существует конечный набор локально липшецевых функций $V_i(q,\dot{q})$ $(i = 1, 2,\ldots,N)$ таких, что

$$(J \setminus N(\dot{q}) \neq \emptyset) \wedge (\forall j \in J \setminus N(\dot{q}),\ |N_j| = 0) \Rightarrow (\exists i \in \overline{(1,N)}, V_i = 0, D^{*+}V_i \neq 0) \tag{2.4}$$

Тогда $\Lambda^+(z) \subset H_J$ для любого решения $z(t)$ уравнения (2.1).

Доказательство следует из (2.3), (2.4) и теоремы 1.2.

Теорема 2.2. Пусть для множества $J \subset (1,\ldots,k_*)$ выполняется условие (2.4). Тогда для любого решения $z(t)$ уравнения (2.1) выполняется $\Lambda^+(z) \subset M_J$ и при этом:

1) либо $\|z(t)\| \to \infty$, либо $M_J \neq \emptyset$ и $z(t)$ слабо стремится к M_J;

2) либо решение $z(t)$ неограничено, либо $M_J \neq \emptyset$ и $z(t)$ стремится к M_J.

Доказательство следует из теоремы 2.1, леммы 1.2 о полуинвариантности множества $\Lambda^+(z)$, определений множества M_J и обобщенных сил трения Q_s^T.

Теорема 2.3. Пусть для множества $J = (1,\ldots,k_*)$ выполняется условие (2.4) и диссипация является полной относительно $\dot{q}^{k_*+1},\ldots,\dot{q}^k$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{k} D_i(q,\dot{q})\dot{q}^i \leqslant -\gamma \sum_{i=k_*+1}^{k} \dot{q}^{i2} \tag{2.5}$$

при некотором $\gamma > 0$. Тогда для любого решения $z(t)$ уравнения (2.1) выполняется включение $\Lambda^+(z) \subset M$. При этом:

1) либо $\|z(t)\| \to \infty$, либо $M \neq \emptyset$ и $z(t)$ слабо стремится к M;

2) либо решение $z(t)$ не ограничено, либо $M \neq \emptyset$ и $z(t)$ стремится к M;

3) $M = \emptyset \Leftrightarrow \|z(t)\| \to \infty$ для любого решения $z(t)$ уравнения (2.1).

Доказательство. Положим $w(q, \dot{q}) = -D^+V_0(q, \dot{q})$. Тогда $\Lambda^+(z) \subset E(w = 0)$ и из (2.5) вытекает $\dot{q}^i = 0$ для всех $i = k_* + 1, \ldots, k, (q, \dot{q}) \in \Lambda^+(z)$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 2.2 и леммы 1.2 о полуинвариантности множества $\Lambda^+(z)$.

3. Пример. Рассматривается плоская механическая система, состоящая из поршня, движущегося с трением по наклонной прямолинейной трубке, и тяжелого абсолютно твердого тела, вращающегося с трением вокруг цилиндрического шарнира, установленного на поршне (детальное описание см. [12]).

Уравнения движения системы в форме Лагранжа после преобразования записываются в виде

$$m\ddot{x} + m_2 r\cos\beta\ddot{\beta} = m_2 r\dot{\beta}^2 \sin\beta - mg\sin\alpha + Q_1^T$$
$$m_2 r\cos\beta\ddot{x} + J\ddot{\beta} = -m_2 gr\sin(\alpha + \beta) + Q_2^T \tag{3.1}$$

Модули нормальных реакций имеют вид

$$|N_1| = |m_2 r(\ddot{\beta}\sin\beta + \dot{\beta}^2\cos\beta) + mg\cos\alpha|$$

$$|N_2| = m_2[(\ddot{x} + r\ddot{\beta}\cos\beta - r\dot{\beta}^2\sin\beta + g\sin\alpha)^2 + (r\ddot{\beta}\sin\beta + r\dot{\beta}^2\cos\beta + g\cos\alpha)^2]^{1/2}$$

Обобщенные силы трения при равновесии относительно каждой из обобщенных координат x, β записываются так:

$$Q_1^{T0} = m_2 r(\ddot{\beta}\cos\beta - \dot{\beta}^2\sin\beta) + mg\sin\alpha \quad (\dot{x} = 0, \ddot{x} = 0)$$

$$Q_2^{T0} = m_2 r(\ddot{x}\cos\beta + g\sin(\alpha + \beta)) \quad (\dot{\beta} = 0, \ddot{\beta} = 0)$$

В общем случае обобщенные силы трения определяются по указанному выше правилу для $s = 1, 2$, обобщенных координат $q^1 = x, q^2 = \beta$, скоростей $\dot{q}^1 = \dot{x}, \dot{q}^2 = \dot{\beta}$ и ускорений $\ddot{q}^1 = \ddot{x}, \ddot{q}^2 = \ddot{\beta}$.

Достаточными условиями выполнения предположений из разд. 1 для уравнений (3.1) являются неравенства 6.4 из [12].

Множеством положений равновесия для системы (3.1) будет

$$M = \{(q, \dot{q}): \dot{x} = 0,\ \dot{\beta} = 0,\ f_1 \geqslant \operatorname{tg}\alpha,\ f_2 \geqslant r|\sin(\alpha + \beta)|\}$$

где f_1, f_2 – коэффициенты трения (постоянные величины) соответственно в поршне и шарнире. За основную функцию Ляпунова возьмем энергию системы

$$V_0 = T + \Pi = \tfrac{1}{2}(m\dot{x}^2 + 2m_2 r\dot{x}\dot{\beta}\cos\beta + J\dot{\beta}^2) + mgx\sin\alpha + m_2 gr(1 - \cos(\alpha + \beta))$$

Для множества индексов $J_0 = \{1, 2\}$ рассмотрим вспомогательные функции Ляпунова

$$V_1 = \dot{x},\ V_2 = \dot{\beta},\ V_3 = r\dot{\beta}^2 + g\cos(\alpha + \beta),\ V_4 = \sin(\alpha + \beta)$$

и функцию

$$w = f_1|N_1||\dot{x}| + f_2|N_2||\dot{\beta}| = -D^+V_0$$

Покажем, что для системы (3.1) выполняется условие (2.4). Имеется три возможности выполнения условия $(J_0 \setminus N(\dot q) \neq \emptyset) \wedge (\forall j \in J_0 \setminus N(\dot q), |N_j| = 0)$, а именно:

1) $N(\dot q) = \{2\}, |N_1| = 0 \; (\dot\beta = 0, \dot x \neq 0)$

2) $N(\dot q) = \{1\}, |N_2| = 0 \; (\dot\beta \neq 0, \dot x = 0)$

3) $N(\dot q) = \emptyset, |N_1| = 0, |N_2| = 0 \; (\dot\beta \neq 0, \dot x \neq 0)$

Легко видеть, что функции $|N_1|$ и $|N_2|$ одновременно в нуль не обращаются, и поэтому случай 3 невозможен ни при каких условиях. Рассмотрим случаи 1 и 2.

1) Если $D^+\dot\beta = 0$, то из условий $|N_1| = 0, \dot\beta = 0$ получаем $mg \cos \alpha = 0$, что невозможно (так как $0 \leqslant \alpha < \pi/2$). Следовательно, $V_2 = 0, D^+V_2 \neq 0$.

2) Если $D^+\dot x \neq 0$, то $V_1 = 0$ и $D^+V_1 \neq 0$. Пусть $D^+\dot x = 0$. Тогда из условия $|N_2| = 0$ получаем

$$
\begin{aligned}
&r\ddot\beta\cos\beta - r\dot\beta^2\sin\beta + g\sin\alpha = 0\\
&r\ddot\beta\sin\beta + r\dot\beta^2\cos\beta + g\cos\alpha = 0
\end{aligned}
\qquad (0.1)
$$

Умножая первое из равенств (3.2) на $\sin \beta$, а второе – на $\cos \beta$, и затем вычитая из второго равенства (3.2) первое, получаем $r\dot\beta^2 + g\cos(\alpha+\beta) = 0$, следовательно, $V_3 = 0$.

Из второго уравнения (3.1) при условии $\ddot x = 0, |N_2| = 0$ находим $\ddot\beta = -m_2 gr\sin(\alpha+\beta)/J$, откуда вытекает $D^+V_3 = -\dot\beta g\sin(\alpha+\beta)(2r^2 m_2/J+1)$. Таким образом, $D^+V_3 \neq 0$, если $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$.

Если же $\sin(\alpha + \beta) = 0$, то $V_4 = 0$ и $D^+V_4 = \cos(\alpha + \beta)\dot\beta \neq 0$. Этим исследование условий теоремы 2.3 для уравнений (3.1) завершается, что позволяет сделать вывод о дихотомичности системы (3.1).

Сделаем два заключительных замечания: если $\operatorname{tg}\alpha > f_1$, то $M = \emptyset$ и в системе (3.1) нет ограниченных решений (точнее, все решения бесконечно большие); если $\operatorname{tg}\alpha = f_1$, то $M \neq \emptyset$, но уравнения (3.1) имеют решение (неограниченное)

$$x = \dot x_0 t + x_0, \quad \dot x = \dot x_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \dot\beta = 0$$

где $f_2 \geqslant r|\sin(\alpha + \beta_0)|$, $\dot x_0 < 0$, которое не стремится к M даже слабо.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00327).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матросов В.М.* Об устойчивости множеств неизолированных положений равновесия неавтономных систем // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1965. Т. 69. С. 20–32.
2. *La Salle J.P.* An invariance principle in the theory of stability // Differential Equation and Dynamical Systems. New York; London: Acad. Press, 1967. P. 277–286.
3. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability theory by Liapunov's direct method. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1977. = *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости, М.: Мир, 1980. 300 с.
4. *Painleve P.* Lecons sur le frottement. Pariis: Hermann, 1895. 111 p. = *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
5. *Неймарк Ю.И.* Еще раз о парадоксах Пэнлеве // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 17–21.
6. *Фуфаев Н.А.* Динамика системы в примере Пэнлеве – Клейна. О парадоксах Пэнлеве // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 48–53.
7. *Никольский В.В., Смирнов Ю.П.* Динамика систем с многовариантными моделями контактного взаимодействия трущихся твердых тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 51–59.
8. *Никольский В.В., Смирнов Ю.П.* О формах уравнений динамики системы с сухим трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 15–22.

9. *Ле Суан Ань*. Парадоксы Пэнлеве и законы движения механических систем с кулоновым трением // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 520–529.
10. *Матросов В.М.* О теории дифференциальных уравнений и неравенств с разрывными правыми частями // Годишн. Висш. учебн. завед. Приложен. мат. София. 1982. Т. 17. № 4. С. 6–35.
11. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 3–13.
12. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* О правосторонних решениях дифференциальных уравнений динамики механических систем с трением скольжения // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 877–886.
13. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* О решениях дифференциальных уравнений динамики механических систем с трением скольжения // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 1. С. 57–60.
14. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* О свойствах правосторонних решений уравнений динамики механических систем с трением скольжения // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 1. С. 53–56.
15. *Hartman P.* Ordinary differential equation. New York; London; Sydney: John Wiley & Sons, 1964. = *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
16. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

Москва – Иркутск

Поступила в редакцию
7.X.1996