

УДК 532.59:534.1

© 1997 г. И.В. Стурова

РАДИАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В РАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Методом мультипольных разложений получено решение плоской линейной задачи о колебаниях горизонтального кругового цилиндра в равномерном потоке двухслойной безграничной жидкости. Направление потока перпендикулярно оси цилиндра, который расположен полностью в верхнем или нижнем слое. Жидкость считается идеальной и несжимаемой, а течение в каждом слое – потенциальным. Определены все компоненты радиационной нагрузки (присоединенные массы и коэффициенты демпфирования) и найдены области существования радиационной неустойчивости в зависимости от скорости потока для цилиндра, подвешенного на упругих горизонтальных и вертикальных связях. В результате численного решения интегродифференциального уравнения определены относительные колебания тела при заданных начальных условиях.

При исследовании гидродинамических характеристик в линейной теории качки движущегося погруженного тела обнаружено, что коэффициенты демпфирования могут быть отрицательными. Это означает, что подобно флаттеру в аэроупругости движение в жидкости твердого тела, обладающего колебательными степенями свободы, может сопровождаться радиационной неустойчивостью – раскачкой колебаний за счет энергии поступательного движения.

Были получены [1] отрицательные коэффициенты демпфирования при вычислении гидродинамических нагрузок, действующих на эллипсоид, равномерно движущихся под свободной поверхностью однородной жидкости и одновременно совершающий колебания по одной из шести степеней свободы. Отмечено, что этот факт имеет место только при очень больших скоростях движения тела и свидетельствует о том, что энергия поступательного движения (или потока) может расходоваться как на излучение волн, так и на раскачку колебаний их источника. При движении погруженного тела вблизи резкого скачка плотности стратифицированной жидкости, например, в двухслойной жидкости, при малом перепаде плотности между слоями отрицательные коэффициенты демпфирования появляются уже при относительно медленных движениях тела [2].

Была исследована [3–6] потеря устойчивости относительного положения равновесия осциллятора, движущегося с постоянной скоростью и взаимодействующего с гравитационными волнами. Эффект неустойчивости обнаружен с помощью вычисления энергетических затрат при движении сферы [3] и кругового цилиндра [4] под границей раздела безграничной двухслойной жидкости, а также сферы под свободной поверхностью однородной жидкости конечной глубины или в безграничной однородно стратифицированной жидкости [5]. Выполнен [6] асимптотический анализ интегродифференциального уравнения, описывающего колебания кругового цилиндра под свободной поверхностью безграничной однородной жидкости. Была использована [3–6] дипольная аппроксимация движущегося тела и рассмотрена возможность колебаний его только с одной горизонтальной степенью свободы. Известно, что дипольное приближение в радиационной задаче дает сингулярное решение на резонансной частоте и только учет ненулевого объема тела приводит к конечному решению. Этот вывод был получен [7] для полубезграничной однородной жидкости со свободной поверхностью и может быть распространен на случай двухслойной безграничной жидкости.

Предлагаемый ниже подход основан на полном решении линейной радиационной задачи для кругового цилиндра в потоке двухслойной жидкости методом мультипольных разложений (это решение аналогично полученному ранее [8, 9]). Используя результаты

гидродинамической теории качки [10], исследована возможность появления незатухающих колебаний цилиндра, обладающего двумя степенями свободы, с помощью методов, применяемых в теории аэроупругости [11].

1. Постановка задачи о колебаниях тела в равномерном потоке двухслойной жидкости. В невозмущенном состоянии верхний слой жидкости плотности ρ_1 занимает область $|x| < \infty, y < 0$, а нижний слой плотности $\rho_2 = \rho_1(1 + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$) – область $|x| < \infty, y > 0$, где x – горизонтальная, а y – вертикальная координаты. Равномерный поток со скоростью U набегаёт на тело в отрицательном направлении оси x . Цилиндр совершает малые колебания по двум возможным степеням свободы с частотой ω .

Считая возмущенное колебательное движение жидкости установившимся, полный потенциал скоростей всего волнового движения можно искать в виде

$$\Phi^{(s)}(x, y, t) = -Ux + U\bar{\Phi}^{(s)}(x, y) + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \eta_j \Phi_j^{(s)}(x, y) e^{i\omega t}$$

где $\bar{\Phi}^{(s)}$ – потенциалы скоростей, отвечающие равномерному движению тела с единичной скоростью, $\Phi_j^{(s)}$ ($j = 1, 2$) характеризуют радиационные потенциалы, обусловленные вынужденной качкой тела в горизонтальном ($j = 1$) и вертикальном ($j = 2$) направлениях, η_j – амплитуды колебаний тела, верхний индекс $s = 1, 2$ введен соответственно для верхнего и нижнего слоев, t – время.

Для стационарных потенциалов внутри жидкости

$$\Delta \bar{\Phi}^{(1)} = 0 \quad (y > 0), \quad \Delta \bar{\Phi}^{(2)} = 0 \quad (y < 0) \quad (1.1)$$

Согласно линейной теории волн граничные условия на поверхности раздела имеют вид

$$\partial^2 [(1 + \epsilon)\bar{\Phi}^{(2)} - \bar{\Phi}^{(1)}] / \partial x^2 + \epsilon \mu \partial \bar{\Phi}^{(1)} / \partial y = 0, \quad \partial \bar{\Phi}^{(1)} / \partial y = \partial \bar{\Phi}^{(2)} / \partial y \quad (y = 0) \quad (1.2)$$

где $\mu = g/U^2$, g – ускорение силы тяжести. В дальнейшем поле следует потребовать выполнения условия излучения, означающего отсутствие волн выше по потоку, а также затухания волнового процесса при $|y| \rightarrow \infty$

$$\partial \bar{\Phi}^{(s)} / \partial x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty), \quad \left| \partial \bar{\Phi}^{(s)} / \partial x \right| < \infty \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (s = 1, 2) \quad (1.3)$$

$$\partial \bar{\Phi}^{(1)} / \partial y \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty), \quad \partial \bar{\Phi}^{(2)} / \partial y \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow -\infty) \quad (1.4)$$

На круговом контуре $S: x^2 + [y + (-1)^q h]^2 = a^2$ ставится условие непротекания

$$\partial \bar{\Phi}^{(q)} / \partial n = n_1 \quad (x, y \in S) \quad (1.5)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ – внутренняя нормаль к контуру S , a – радиус цилиндра, h – расстояние центра цилиндра до границы раздела ($h > a$), $q = 1$ ($q = 2$) при расположении цилиндра в верхнем (нижнем) слое.

Компоненты радиационных потенциалов удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \Phi_j^{(1)} = 0 \quad (y > 0), \quad \Delta \Phi_j^{(2)} = 0 \quad (y < 0) \quad (j = 1, 2) \quad (1.6)$$

аналогичным (1.1), и граничным условиям

$$N[(1 + \epsilon)\Phi_j^{(2)} - \Phi_j^{(1)}] + \epsilon g \partial \Phi_j^{(1)} / \partial y = 0, \quad \partial \Phi_j^{(1)} / \partial y = \partial \Phi_j^{(2)} / \partial y \quad (y = 0) \quad (1.7)$$

$$\partial \Phi_j^{(1)} / \partial y \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty), \quad \partial \Phi_j^{(2)} / \partial y \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow -\infty) \quad (1.8)$$

$$\partial \Phi_j^{(q)} / \partial n = i\omega n_j - U m_j \quad (x, y \in S) \quad (1.9)$$

где

$$N \equiv (U\partial / \partial x - i\omega)^2, \quad (m_1, m_2) = \partial(\partial\bar{\Phi}^{(q)} / \partial x, \partial\bar{\Phi}^{(q)} / \partial y) / \partial n$$

Условия изучения для $\Phi_j^{(s)}$ предполагают, что распространяющаяся впереди тела волна может быть только в том случае, когда ее фазовая скорость положительна, а групповая – больше скорости тела, в противном случае волновые движения существуют только за телом. Гидродинамические силы $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$, действующие на цилиндр, определяются с помощью интегрирования давления жидкости (без учета гидростатического члена) $p = -\rho_q(\partial\Phi^{(q)}/\partial t + |\nabla\Phi^{(q)}|^2/2)$ по контуру S . Удобно заменить этот интеграл суммой

$$F_j = F_{sj} + \text{Re}(F_{rj}e^{i\omega t}) \quad (j = 1, 2)$$

где F_{sj} – стационарные силы (волновое сопротивление и подъемная сила), действующие на неподвижное тело в равномерном потоке, а F_{rj} – радиационные силы, которые обычно записывают в матричной форме (подробнее см., например, [2, 10])

$$F_{rj} = \eta_1 T_{j1} + \eta_2 T_{j2}$$

Величины T_{jk} представляют собой комплексную силу, действующую в направлении j и обусловленную синусоидальными колебаниями тела с единичной амплитудой в направлении k , и их можно представить в виде $T_{jk} = \omega^2 A_{jk} - i\omega B_{jk}$. Вещественные значения A_{jk} и B_{jk} известны как коэффициенты присоединенных масс и демпфирования соответственно.

Вводя полярную систему координат r, θ с началом в центре контура S

$$x = r \sin\theta, \quad y + (-1)^q h = r \cos\theta \quad (q = 1, 2)$$

и учитывая, что для кругового контура

$$n_1 = -\sin\theta, \quad n_2 = -\cos\theta \tag{1.10}$$

получим [9]

$$\left\| \begin{matrix} F_{s1} \\ F_{s2} \end{matrix} \right\| = \frac{\rho_q U^2}{2a} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial(\bar{\Phi}^{(q)} - x)}{\partial\theta} \right]^2 \left\| \begin{matrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{matrix} \right\| d\theta \tag{1.11}$$

$$T_{jk} = \rho_q a \int_0^{2\pi} \frac{\partial\Phi_j^{(q)*}}{\partial n} \Phi_k^{(q)} d\theta \tag{1.12}$$

где звездочка означает комплексно-сопряженное значение.

2. Решение стационарной задачи. Решение стационарной задачи методом мультипольных разложений получено ранее [8]. Приведем лишь основные результаты этого решения, необходимые для исследования радиационной задачи (разд. 3).

При расположении цилиндра в нижнем слое решение уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2)–(1.4) представим в виде

$$\bar{\Phi}^{(1)} = (1 + \gamma) \text{Re} \sum_n \frac{a^n C_n}{(n-1)!} \left[\text{p. v.} \int_0^\infty \frac{k^n}{k-v} e^{-k(y+h+ix)} dk + i\pi v^n e^{-v(y+h+ix)} \right]$$

$$\bar{\Phi}^{(2)} = \text{Re} \sum_n a^n C_n \left\{ \frac{e^{-in\theta}}{r^n} - \frac{\gamma}{(n-1)!} \left[\text{p. v.} \int_0^\infty k^{n-1} \frac{k+\mu}{k-v} e^{k(y-h-ix)} dk + \right. \right. \\ \left. \left. + i\pi v^{n-1} (v+\mu) e^{v(y-h-ix)} \right] \right\}; \quad v = \mu\gamma, \quad \gamma = \varepsilon / (2 + \varepsilon)$$

(р.в. означает интеграл в смысле главного значения, суммирование по n , а в дальнейшем и по m , ведется от 1 до ∞).

Для учета граничного условия (1.5) используется известное соотношение

$$\exp[k(y + h \pm ix)] = 1 + \sum_m \frac{(kr)^m}{m!} \exp(\pm im\theta) \quad (2.1)$$

и значение потенциала в нижнем слое запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^{(2)} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_m \left[\frac{a^m}{r^m} C_m - \gamma \sum_n \frac{a^n r^m}{m!(n-1)!} I_{n+m-1}^+ C_n \right] e^{-im\theta} - \right. \\ \left. - \gamma \sum_n \frac{a^n}{(n-1)!} C_n I_{n-1}^+ \right\}, \quad I_m^\pm = \text{p. v.} \int_0^\infty k^m \frac{k \pm \mu}{k - \nu} e^{-2kh} dk \pm i\pi \nu^m (\nu \pm \mu) e^{-2\nu h} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Величина I_m^\pm может быть вычислена по рекуррентной формуле

$$I_m^\pm = \left(\frac{m}{2h} \pm \mu \right) \frac{(m-1)!}{(2h)^m} + \nu I_{m-1}^\pm, \quad I_0^\pm = \frac{1}{2h} \pm (\nu \pm \mu) e^{-2\nu h} [i\pi \mp \operatorname{Ei}(2\nu h)] \quad (2.3)$$

Ei – интегральная показательная функция вещественного аргумента [12].

Дифференцируя (2.2) по r и используя (1.5) и (1.10), получим систему линейных уравнений для определения C_n

$$C_m + \gamma \sum_n \frac{a^{m+n} C_n}{m!(n-1)!} I_{n+m-1}^+ = -i\delta_{m1} \quad (2.4)$$

где δ_{m1} – символ Кронекера. Подставляя (2.4) в (2.2) и выполняя дифференцирование по θ , получим при $r = a$

$$\partial(\bar{\Phi}^{(2)} - x) / \partial\theta = -2 \operatorname{Re} \sum_m im C_m e^{-im\theta} \quad (2.5)$$

При расположении цилиндра в верхнем слое аналогично предыдущему получим

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^{(1)} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_m \left[\frac{a^m}{r^m} C_m + (-1)^m \gamma \sum_n \frac{(-a)^n r^m}{m!(n-1)!} I_{n+m-1}^- C_n \right] e^{-im\theta} + \right. \\ \left. + \gamma \sum_n \frac{(-a)^n}{(n-1)!} C_n I_{n-1}^- \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Система для определения C_n отличается от (2.4) заменой γ на $-\gamma$, a на $-a$ и I_{n+m-1}^+ на I_{n+m-1}^- . Выражение, аналогичное (2.5), справедливо и в этом случае. Следовательно, для обоих случаев значение стационарных сил в (1.11) имеет вид

$$F_{s2} + iF_{s1} = \frac{2\pi\rho_q U^2}{a} \sum_m m(m+1) C_m^* C_{m+1}$$

3. Решение радиационной задачи. Значение потенциала в нижнем слое для радиационной задачи (1.6)–(1.8) с учетом условия излучения ищем в виде (цилиндр в нижнем слое)

$$\Phi_j^{(2)} = \sum_n a^n \left[D_{jn}^- \left(\frac{e^{-in\theta}}{r^n} - F_{2n}^- \right) + D_{jn}^+ \left(\frac{e^{in\theta}}{r^n} - F_{2n}^+ \right) \right] \quad (j = 1, 2) \quad (3.1)$$

$$F_{2n}^{\pm} = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \text{p. v.} \int_0^{\infty} k^{n-1} \left[\gamma + \frac{1+\gamma}{\sqrt{1 \pm 4\tau}} \left(\frac{k_1^{\pm}}{k-k_1^{\pm}} - \frac{k_2^{\pm}}{k-k_2^{\pm}} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times e^{k(y-h \pm ix)} dk \mp \frac{i\pi(1+\gamma)}{\sqrt{1 \pm 4\tau}} \left[(k_1^{\pm})^n e^{k_1^{\pm}(y-h \pm ix)} \mp (k_2^{\pm})^n e^{k_2^{\pm}(y-h \pm ix)} \right] \right\} \\ k_1^{\pm} = \frac{v}{2}(1 \pm 2\tau + \sqrt{1 \pm 4\tau}), \quad k_2^{\pm} = \frac{v}{2}(1 \pm 2\tau - \sqrt{1 \pm 4\tau}), \quad \tau = \frac{\omega U}{\gamma g}$$

Вещественные значения k_1^{\pm}, k_2^{\pm} существуют только при $\tau \leq 1/4$, в противном случае последнее слагаемое в фигурных скобках для F_{2n}^{\pm} отсутствует.

При вычислении вторых производных в граничных условиях (1.9) используем, как и ранее [9], соотношения

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(2)}}{\partial n \partial x} e^{im\theta} d\theta = -\frac{im}{a^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial(\bar{\Phi}^{(2)} - x)}{\partial \theta} e^{im\theta} \sin \theta d\theta = \frac{i\pi m}{a^2} P_m^- \quad (3.2)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(2)}}{\partial n \partial y} e^{im\theta} d\theta = -\frac{im}{a^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial(\bar{\Phi}^{(2)} - x)}{\partial \theta} e^{im\theta} \cos \theta d\theta = -\frac{\pi m}{a^2} P_m^+$$

$$P_m^{\pm} = (m+1)C_{m+1} \pm (m-1)C_{m-1}$$

Подставляя (2.1) в (3.1), выполняя дифференцирование по r и используя (1.9) при учете (3.2), получим следующие системы линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов D_{jn}^{\pm} :

$$D_{jm}^{\pm} + \sum_n \frac{a^{m+n}}{m!(n-1)!} H_{n+m-1}^{\pm} D_{jn}^{\pm} = X_{jm}^{\pm} \quad (j=1,2) \quad (3.3)$$

где

$$X_{1m}^- = (a\omega\delta_{m1} - iUP_m^- / a) / 2, \quad X_{1m}^+ = (iUP_m^+ / a - a\omega\delta_{m1}) / 2 \\ X_{2m}^- = (UP_m^+ / a - ia\omega\delta_{m1}) / 2, \quad X_{2m}^+ = (UP_m^- / a - ia\omega\delta_{m1}) / 2 \quad (3.4)$$

$$H_m^{\pm} = \text{p. v.} \int_0^{\infty} k^m \left[\gamma + \frac{1+\gamma}{\sqrt{1 \pm 4\tau}} \left(\frac{k_1^{\pm}}{k-k_1^{\pm}} - \frac{k_2^{\pm}}{k-k_2^{\pm}} \right) \right] e^{-2kh} dk + \\ + \frac{i\pi(1+\gamma)}{\sqrt{1 \pm 4\tau}} \left[(k_2^{\pm})^{m+1} e^{-2k_2^{\pm}h} \mp (k_1^{\pm})^{m+1} e^{-2k_1^{\pm}h} \right]$$

При вычислении интегралов в (3.4) используются рекуррентные формулы аналогично (2.3). При $\tau > 1/4$ для H_m^{\pm} следует опустить второе слагаемое, интеграл рассматривать в обычном смысле и в рекуррентной формуле использовать интегральную показательную функцию комплексного аргумента E_1 . В этом случае

$$H_m^- = \frac{\gamma m!}{(2h)^{m+1}} + \frac{2(1+\gamma)}{\sqrt{4\tau-1}} \text{Im}[k_1^- V_m(k_1^-)]$$

где

$$V_m(k_1^-) = \int_0^{\infty} \frac{k^m}{k-k_1^-} e^{-2kh} dk = W_m(-2hk_1^-) / (2h)^m$$

$$W_m(z) = (m-1)! - zW_{m-1}(z) \quad (m \geq 2), \quad W_1(z) = 1 - ze^z E_1(z)$$

На поверхности тела при $r = a$

$$\Phi_j^{(2)} = \sum_m [(2D_{jm}^- - X_{jm}^-)e^{-im\theta} + (2D_{jm}^+ - X_{jm}^+)e^{im\theta}] + c_j \quad (j=1,2) \quad (3.5)$$

где $c_{1,2}$ – постоянные, подобные последнему слагаемому в (2.6).

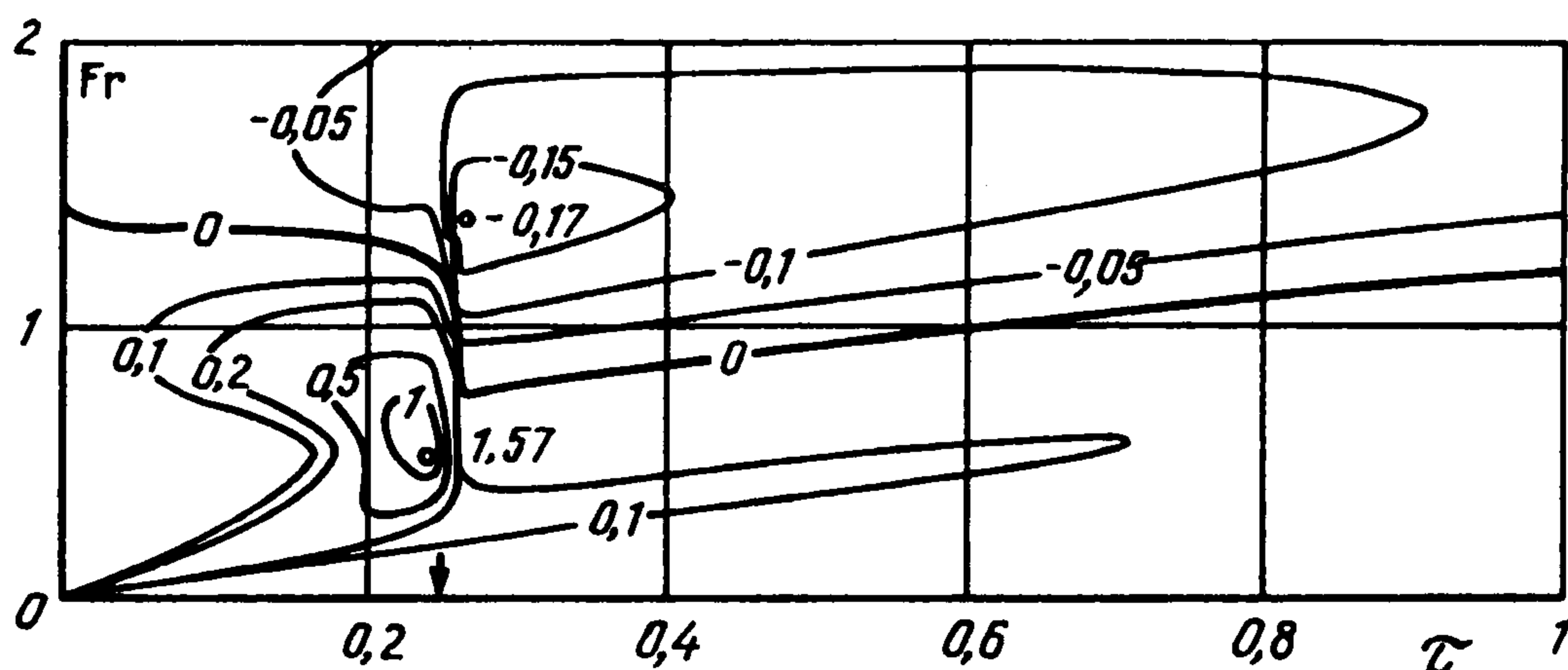
При расположении цилиндра в верхнем слое аналогично (3.1)

$$\Phi_j^{(1)} = \sum_n a^n \left[D_{jn}^- \left(\frac{e^{-in\theta}}{r^n} + F_{1n}^- \right) + D_{jn}^+ \left(\frac{e^{in\theta}}{r^n} + F_{1n}^+ \right) \right] \quad (j=1,2)$$

где

$$F_{1n}^\pm = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \left\{ \text{p. v.} \int_0^\infty k^{n-1} \left[\gamma - \frac{1-\gamma}{\sqrt{1 \mp 4\tau}} \left(\frac{k_1^\mp}{k-k_1^\mp} - \frac{k_2^\mp}{k-k_2^\mp} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times e^{k(\mp ix - y - h)} dk - \frac{i\pi(1-\gamma)}{\sqrt{1 \mp 4\tau}} [(k_2^\mp)^n e^{k_2^\mp(\mp ix - y - h)} \pm (k_1^\mp)^n e^{k_1^\mp(\mp ix - y - h)}] \right\}$$

Используя (1.9), получим систему уравнений, которая отличается от (3.3) заменой a на $-a$, H_{n+m-1}^\pm на H_{n+m-1}^\mp и γ на $-\gamma$ в выражении для H_m^\pm . Выражения для потенциала $\Phi_j^{(1)}$ на поверхности тела совпадают с приведенными в (3.5).



Фиг. 1

После решения системы (3.3) определим коэффициенты радиационной нагрузки T_{jk} . Подставляя (1.9) и (3.5) в (1.12), получим

$$T_{jk} = 2\pi\rho_q \sum_m m [X_{jm}^{-*} (2D_{km}^- - X_{km}^-) + X_{jm}^{+*} (2D_{km}^+ - X_{km}^+)] \quad (3.6)$$

Диагональные коэффициенты демпфирования B_{jj} можно выразить также через характеристики потенциалов $\Phi_j^{(q)}$ на границе раздела в дальнем поле, исходя из закона сохранения энергии. Согласно соотношениям, приведенным для двухслойной жидкости [2] и для однородной жидкости (см., например, [9]), B_{jj} представляют собой в общем случае сумму четырех знакопостоянных слагаемых по числу возникающих в дальнем поле волн, причем вклады всех волн, кроме волны k_1^+ , положительны. Физически это означает, что волна k_1^+ обеспечивает поток энергии, направленный к телу, тогда как для трех других волн поток волновой энергии направлен от тела. Появление отрицательных значений B_{jj} возможно тогда, когда вклад волны k_1^+ становится доминирующим.

Были представлены [9] таблицы значений всех компонент гидродинамической нагрузки для однородной жидкости. Для получения значений с точностью до 5 значащих цифр достаточно учитывать в системе (3.3) лишь 8 членов.

	А		Б	
	$j=1$	2	1	2
τ_+	0,22	0,20	0,24	0,24
Fr_+	0,55	0,65	0,50	0,55
\bar{B}_{jj}^+	1,97	2,53	1,57	1,81
τ_-	0,26	0,26	0,26	0,26
Fr_-	1,30	1,15	1,35	1,25
\bar{B}_{jj}^-	-0,35	-0,32	-0,17	-0,17
Fr_*	0,75	0,70	0,75	0,75

Изолинии коэффициента демпфирования $\bar{B}_{11} = \omega B_{11}/(\rho_2 \gamma g a)$ представлены на фиг. 1 в зависимости от числа Фруда $Fr = U/\sqrt{\gamma g a}$ и τ для двухслойной жидкости при $\epsilon = 0,03$, $h/a = 2$ (цилиндр в нижнем слое). Точками с цифрами указаны положения и значения экстремумов указанной функции, стрелкой отмечено значение $\tau = 1/4$.

В таблице приведены максимальные (\bar{B}_{jj}^+) и минимальные (\bar{B}_{jj}^-) значения $\bar{B}_{jj} = \omega B_{jj}/(\rho_q \gamma g a)$, место их положения (τ_+ , Fr_+ и τ_- , Fr_- соответственно), а также указаны значения Fr_* , при которых впервые появляются при $\tau \approx 1/4$ отрицательные значения соответствующих диагональных коэффициентов демпфирования для следующих случаев расположения цилиндра при $h/a = 2$: А – под свободной поверхностью однородной жидкости ($\epsilon \rightarrow \infty$), Б – в нижнем или верхнем слое двухслойной жидкости ($\epsilon = 0,03$). Видно, что в выбранных безразмерных переменных поведение \bar{B}_{jj} для всех этих случаев достаточно близко. Значения, приведенные в таблице, получены при $0 \leq \tau \leq 1$, $0 \leq Fr \leq 2$ на сетке с шагами $\Delta\tau = 0,02$, $\Delta Fr = 0,05$. С использованием дипольного приближения было указано [4] значение $Fr_* = 0,74$ для \bar{B}_{11} в двухслойной жидкости.

4. Движение цилиндра, закрепленного на упругих связях. Предположим, что цилиндр связан линейными двумерными упругими пружинами с четырьмя неподвижными точками, расположенными попарно на вертикальной и горизонтальной линиях, проходящих через его центр. В невозмущенном состоянии цилиндр покоится, стационарная нагрузка (волновое сопротивление и подъемная сила) уравниваются натяжением пружин. Введем фиксированную систему координат x_1, x_2 , проходящую через центр невозмущенного цилиндра и параллельную исходной системе x, y . Пусть в начальный момент времени $t = 0$ цилиндр смещается на некоторое малое расстояние относительно указанного положения равновесия, так что координаты его центра равны $x(0) = (x_1^0, x_2^0)$ ($|x(0)| \ll a$). Последующее движение центра цилиндра $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ предполагается колебательным относительно фиксированного среднего положения и с учетом всех действующих сил в линейном приближении описывается системой интегродифференциальных уравнений (см., например, [13])

$$\sum_{k=1}^2 (M_{jk} + a_{jk}) \ddot{x}_k + b_{jk} \dot{x}_k + \int_0^t Q_{jk}(s) \dot{x}_k(t-s) ds + C_{jk} x_k = 0 \quad (j=1,2) \quad (4.1)$$

$$a_{jk} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} A_{jk}(\omega), \quad b_{jk} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_{jk}(\omega), \quad Q_{jk}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [B_{jk}(\omega) - b_{jk}] \cos \omega t d\omega$$

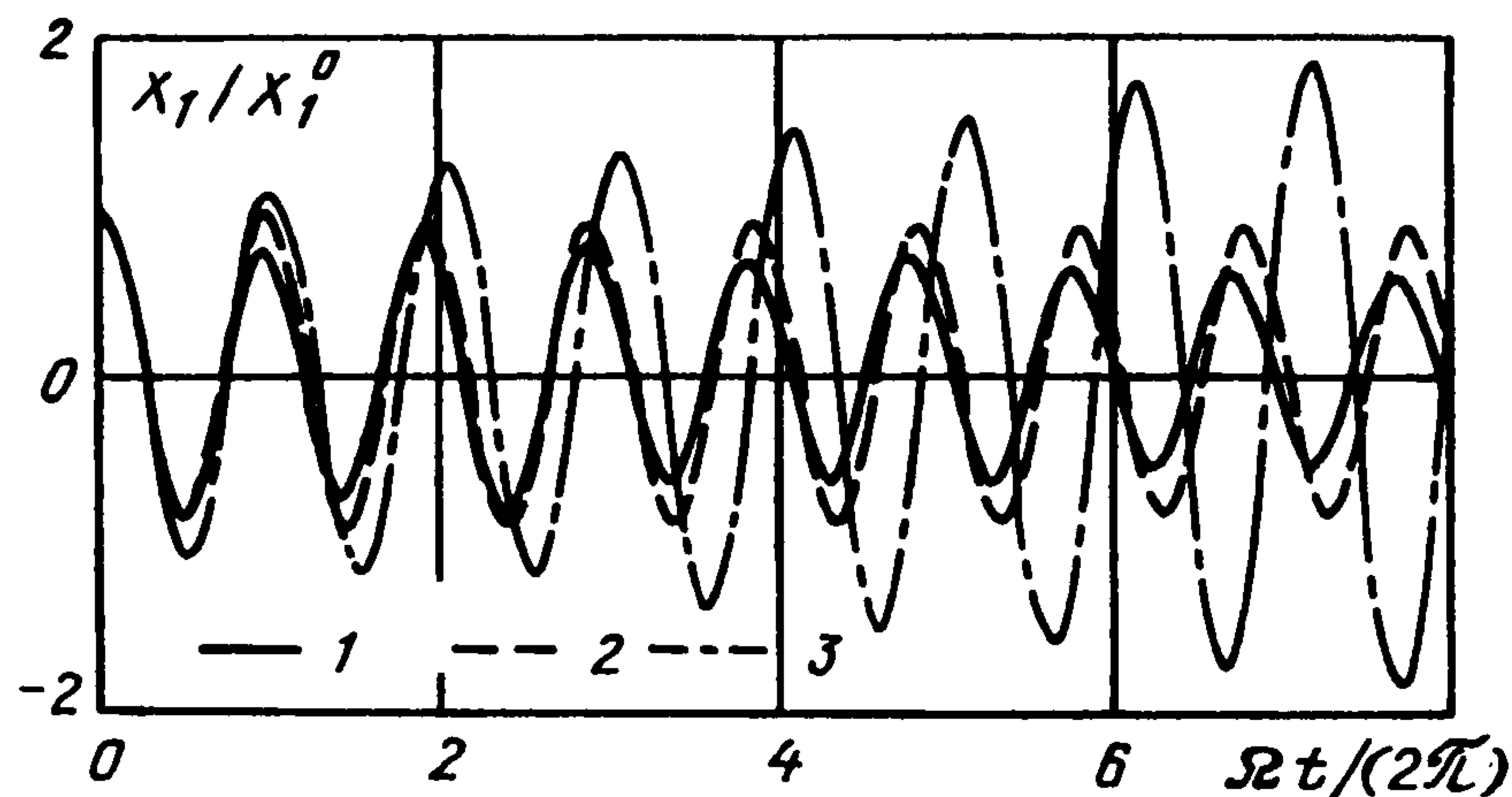
с начальными условиями

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

Точка сверху означает дифференцирование по t , M_{jk} и C_{jk} – диагональные матрицы масс и коэффициентов восстанавливающих сил, причем $M_{11} = M_{22} = M$, $C_{11} = \lambda_1$,

$C_{22} = \lambda_2$, $M = \pi \rho_0 a^2$ – погонная масса цилиндра, ρ_0 – плотность материала, из которого он изготовлен, и λ_1, λ_2 – коэффициенты жесткости горизонтальной и вертикальной пружин соответственно, ядро $Q_{jk}(t)$ – функция запаздывания.

В предельном случае $\omega \rightarrow \infty$ поведение коэффициентов присоединенной массы и демпфирования можно получить из анализа соотношений (3.6). Для рассматриваемой задачи $a_{11} = a_{22} = a_0$, где a_0 – присоединенная масса кругового цилиндра в невесомой покоящейся двухслойной жидкости, $a_{12} = a_{21} = 0$. Недиagonalные коэффициенты демпфирования зависят от скорости потока, причем $b_{12} = -b_{21}$, $b_{11} = b_{22} = 0$.



Фиг. 2

При установившихся гармонических колебаниях цилиндра с частотой ω его движение по аналогии с механическим осциллятором удовлетворяет уравнениям (см., например, [10])

$$\sum_{k=1}^2 [M_{jk} + A_{jk}(\omega)] \ddot{x}_k + B_{jk}(\omega) \dot{x}_k + C_{jk} x_k = 0 \quad (j=1,2)$$

Подставляя в эти уравнения зависимости для траектории тела

$$x_k(t) = \text{Re}[\eta_k(\omega) e^{i\omega t}] \quad (k=1,2) \quad (4.2)$$

получим соотношения для определения комплексных амплитуд η_k

$$\sum_{k=1}^2 [(M_{jk} + A_{jk}) \omega^2 - i\omega B_{jk} - C_{jk}] \eta_k = 0 \quad (j=1,2) \quad (4.3)$$

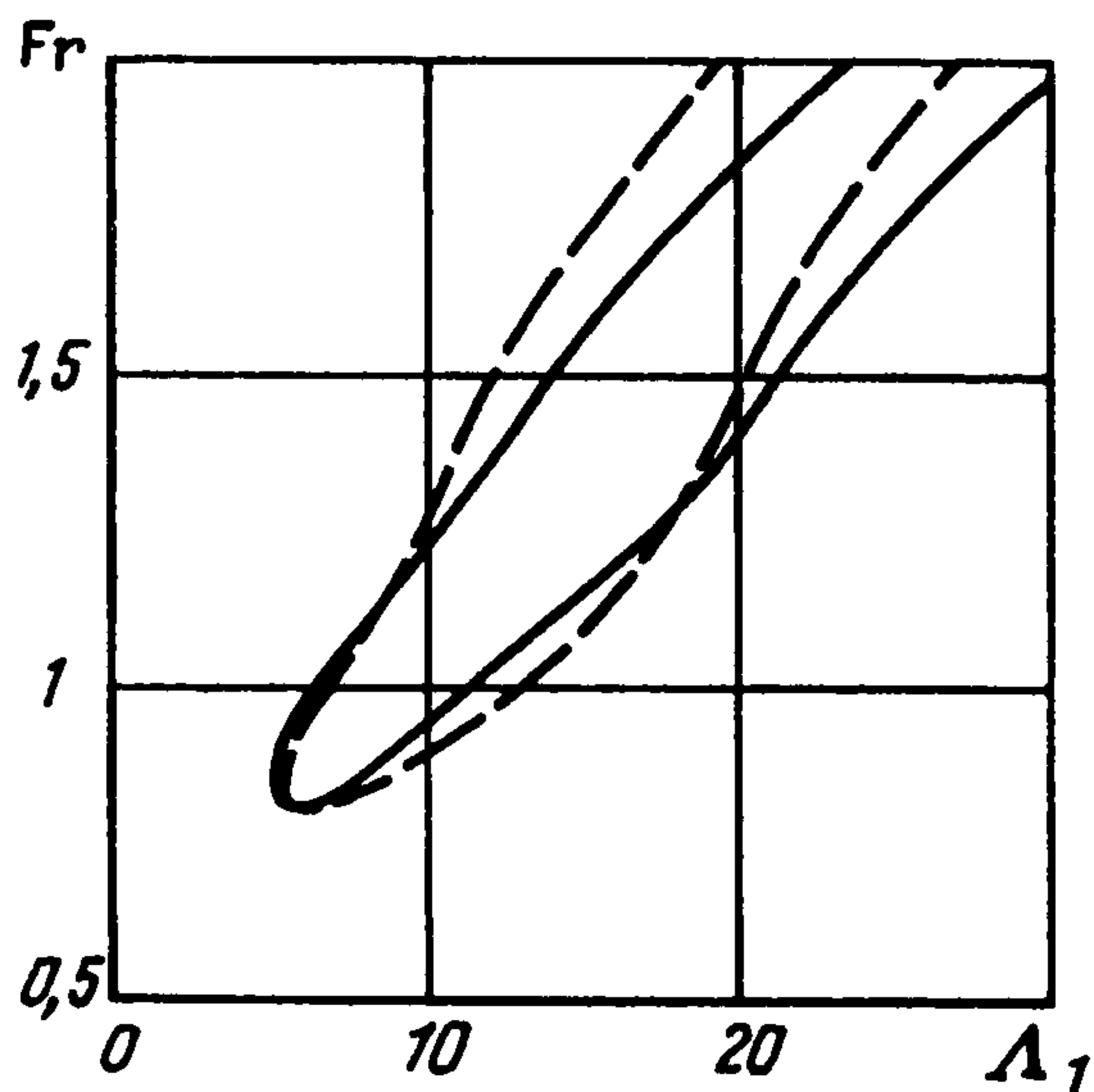
Наиболее просто исследовать поведение цилиндра, имеющего лишь одну степень свободы. Предположим, что вертикальные пружины отсутствуют и цилиндр колеблется только по горизонтальной оси x_1 , оставаясь на фиксированном расстоянии h от границы раздела. В этом случае система (4.3) сводится к одному уравнению

$$(M + A_{11}) \omega^2 - i\omega B_{11} - \lambda_1 = 0 \quad (4.4)$$

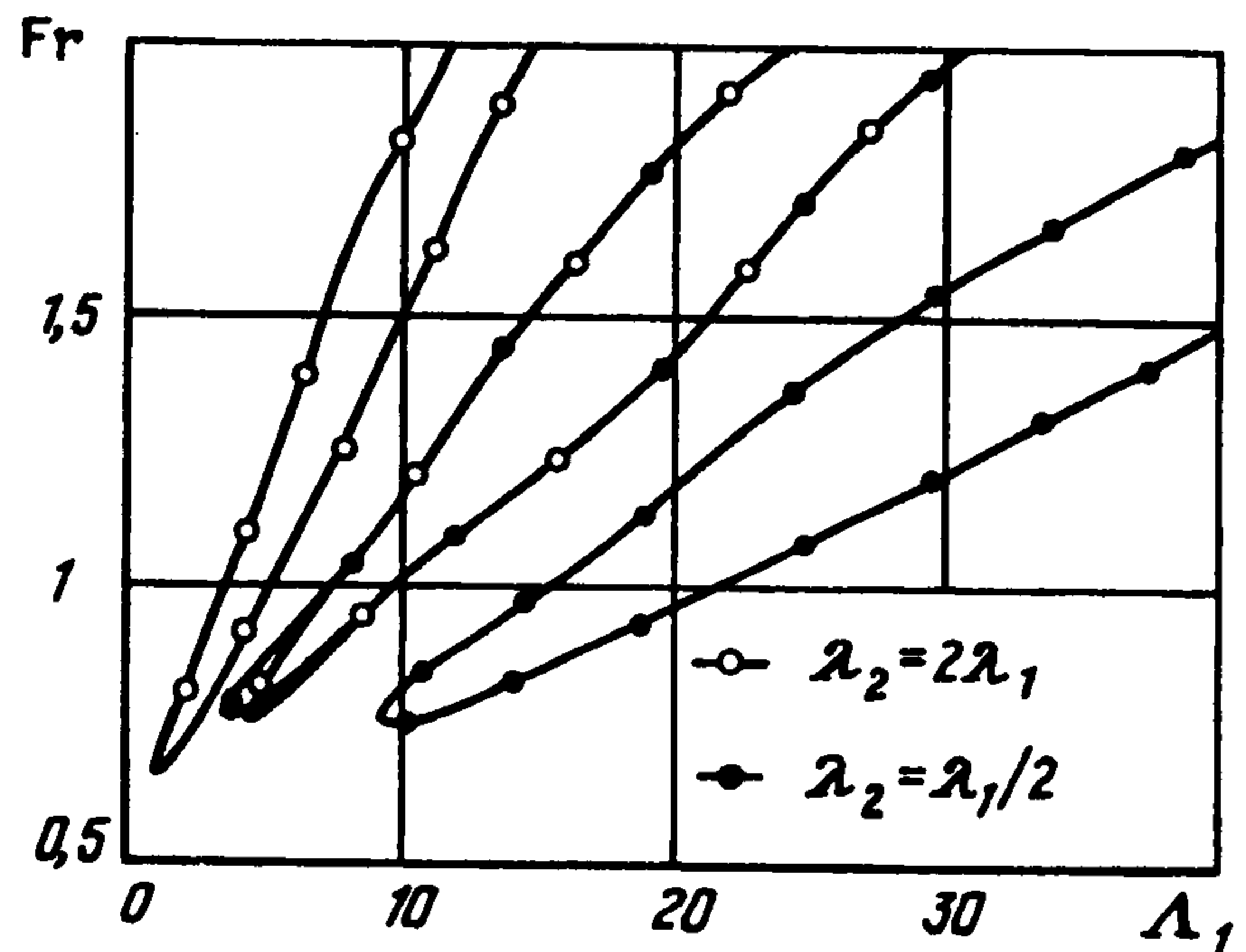
из которого следует, что установившиеся колебания возможны только при той частоте ω_* , когда $B_{11}(\omega_*) = 0$ и жесткость горизонтальной пружины равна

$$\lambda_1 = \omega_*^2 [M + A_{11}(\omega_*)] \quad (4.5)$$

Следуя гипотезе гармоничности, широко используемой в теории аэроупругости, заменим в коэффициентах уравнения (4.4) вещественное значение ω комплексной величиной $\omega + i\xi$, полагая $|\xi| \ll 1$. Гидродинамические нагрузки по-прежнему являются функциями вещественного аргумента. Согласно представлению (4.2) при $\xi > 0$ колебания затухают, а при $\xi < 0$ – нарастают. Разделяя получившееся уравнение на



Фиг. 3



Фиг. 4

мнимую и действительную части, получим $2\xi = \omega B_{11}/(M + A_{11})$. Следовательно, зафиксировав жесткость горизонтальных пружин и варьируя скорость набегающего потока в нестационарной задаче о развитии колебаний тела после его начального отклонения, получим затухающие колебания при достаточно малых числах Фруда, выход на режим установившихся колебаний с частотой ω_* при выполнении условия (4.5) и растущие колебания при дальнейшем увеличении скорости потока.

Результаты численного решения уравнений (4.1) конечно-разностным методом [14] в случае одной степени свободы представлены на фиг. 2 для двухслойной жидкости (параметры соответствуют фиг. 1) при различных числах Фруда $Fr = 1/2; 1; 2$ (кривые 1–3) для пружины с жесткостью $\Lambda_1 = \lambda_1/(\rho_2 \gamma g a) = 3$, $\rho_0 = \rho_2$, $\Omega = \sqrt{\lambda_1/(M + A_{11})}$, $a_{11}/(\pi \rho_2 a^2) = 0,9982$. При $Fr = 1/2$ значения B_{11} положительны и колебания затухают, значение $Fr = 1$ наиболее близко к нулевой изолинии коэффициента демпфирования на фиг. 1, случай $Fr = 2$ соответствует отрицательным значениям B_{11} и амплитуды колебаний растут.

Случай двух степеней свободы также анализируется с помощью гипотезы гармоничности. Подставим вместо ω значение $\omega + i\xi$ в (4.3) и приравняем нулю определитель этой линейной однородной системы. Разделение получившегося комплексного уравнения на вещественную и мнимую части приводит к системе нелинейных уравнений для определения ω и ξ

$$(\omega^4 - 6\omega^2\xi^2 + \xi^4)d_1 - \xi(3\omega^2 - \xi^2)d_2 - (\omega^2 - \xi^2)d_3 - \xi d_4 + \lambda_1\lambda_2 = 0 \quad (4.6)$$

$$4\xi(\omega^2 - \xi^2)d_1 + (\omega^2 - 3\xi^2)d_2 - 2\xi d_3 + d_4 = 0$$

где

$$d_1 = f_1 f_2 - A_{21} A_{12}, \quad d_2 = A_{21} B_{12} + A_{12} B_{12} - f_2 B_{11} - f_1 B_{22}$$

$$d_3 = \lambda_1 f_2 + \lambda_2 f_1 + B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21}, \quad d_4 = \lambda_1 B_{22} + \lambda_2 B_{11}$$

$$f_j = M + A_{jj} \quad (j = 1, 2)$$

Второе уравнение в (4.6) является полиномом третьей степени относительно ξ , и нетрудно определить его действительные корни для любого значения $\omega > 0$. После подстановки этих значений ξ в первое уравнение (4.6) получим уравнение для определения ω , которое может быть решено численно при фиксированных значениях Fr , λ_1 , λ_2 . Режимы, при которых найденному таким образом значению ω соответствует $\xi < 0$, считаются неустойчивыми.

Результаты этого численного анализа представлены на фиг. 3 для случая $\lambda_1 = \lambda_2$. Сплошная кривая построена для параметров, соответствующих фиг. 1, штриховая

кривая – для однослойной жидкости со свободной поверхностью ($\varepsilon \rightarrow \infty$, $h/a = 2$). Область внутри сплошной кривой соответствует значениям Fg и Λ_1 , при которых имеет место радиационная неустойчивость для двухслойной жидкости; аналогично область внутри штриховой кривой – для однородной жидкости.

Результаты для двухслойной жидкости при не совпадающих коэффициентах жесткости горизонтальных и вертикальных пружин представлены на фиг. 4: для $\lambda_2 = 2\lambda_1$ и для $\lambda_2 = \lambda_1/2$. В каждом из этих случаев существуют две области значений параметров Fg и Λ_1 , при которых имеет место радиационная неустойчивость.

Несмотря на то, что используемое линейное приближение не может описать поведение цилиндра при колебаниях с произвольной амплитудой, оно полезно при определении наиболее опасных с точки зрения радиационной неустойчивости параметров данной колебательной системы.

Предложенный метод может быть распространен на случай жидкости конечной глубины, а также использован для исследования радиационной неустойчивости сферы, гидродинамические нагрузки для которой можно определить с помощью точечных мультиполей аналогично предложенному ранее подходу [15].

Автор благодарит В.Б. Курзина и коллектив его лаборатории за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Newman J.N.* The damping of an oscillating ellipsoid near a free surface // *J. Ship Res.* 1961. V. 5. N 3. P. 44–58.
2. *Стурова И.В.* Плоская задача о гидродинамической качке погруженного тела при наличии хода в двухслойной жидкости // *ПМТФ.* 1994. № 5. С. 32–44.
3. *Гапонов-Грехов А.В., Долина И.С., Островский Л.А.* Аномальный эффект Доплера и радиационная неустойчивость движения осцилляторов в гидродинамике // *Докл. АН СССР.* 1983. Т. 268. № 4. С. 827–831.
4. *Долина И.С.* Усиление колебательного движения тел в стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1984. № 4. С. 87–93.
5. *Абрамович Б.С., Мареев Е.А., Немцов Б.Е.* Неустойчивость колебаний движущегося осциллятора при излучении им поверхностных и внутренних волн // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1986. № 1. С. 168–171.
6. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Перемещение осциллятора под поверхностью тяжелой жидкости // *Изв. РАН. МТТ.* 1994. № 4. С. 39–46.
7. *Liu Y., Yue D.K.P.* On the solution near the critical frequency for an oscillating and translating body in or near a free surface // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 254. P. 251–266.
8. *Wu G.X.* The wave resistance and lift on a circular cylinder in stratified fluid // *J. Hydrodyn. Ser. B.* 1990. V. 2. N 4. P. 52–58.
9. *Wu G.X.* Radiation and diffraction of water waves by a submerged circular cylinder at forward speed // *J. Hydrodyn. Ser. B.* 1993. V. 5. N 4. P. 85–96.
10. *Ньюмен Дж.* Морская гидродинамика. Л.: Судостроение, 1985. 367 с.
11. *Морозов В.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В.* Математическое моделирование сложных аэроупругих систем. М.: Физматлит, 1995. 735 с.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред.: М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
13. *Liapis S., Beck R.F.* Seakeeping computations using time-domain analysis // *Proc. 4th Intern. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics.* Washington: Nat. Acad. of Sci., 1985. P. 34–54.
14. *Johansson M.* Transient motions of large floating structures. Göteborg: Chalmers Univ., 1986. 99 p.
15. *Wu G.X.* Radiation and diffraction by a submerged sphere advancing in water waves of finite depth // *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* 1995. V. 448. N 1932. P. 29–54.