

УДК 532.5:534.1

© 1997 г. А.В. Марченко

РЕЗОНАНСНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ЛЕДОВОМ КАНАЛЕ

Исследуются свойства поверхностных волн малой амплитуды, распространяющихся в ледовом канале, в приближении мелкой воды. Ледяной покров моделируется или твердой крышкой или тонкой упругой пластиной, плавающей на поверхности жидкости. Показано, что ледовый канал является волноводом для поверхностных волн. Исследованы дисперсионные свойства собственных колебаний жидкости в канале. Найдены резонансные скорости движения нагрузки по поверхности канала, при которых амплитуда вынужденных колебаний жидкости неограниченно возрастает со временем. Показано, что собственные колебания высших гармоник распадно неустойчивы по отношению к волнам первой моды. Этот процесс описывается стандартными уравнениями нелинейного взаимодействия трех волн. На основе проведенных исследований делается заключение о возможности реализации критических режимов движения судна в ледовом канале.

Линейные неоднородности в ледяном покрове могут являться [1–6] волноводами, вдоль которых распространяются краевые изгибно-гравитационные волны. Этот вопрос был теоретически исследован в основном для прямолинейных трещин и гряд торосов. Было замечено [6], что сквозная трещина в ледяном покрове является предельным случаем канала при стремлении его ширины к нулю. Поэтому ледовый канал также является волноводом для изгибно-гравитационных волн. Волноводные свойства каналов в ледяном покрове ранее не изучались.

Обычно интерес к волноводным эффектам в гидродинамике связан с исследованиями изменения спектрального состава волн вблизи берега или захвата энергии поверхностных волн подводными препятствиями. В рассматриваемом случае наряду с этими явлениями представляют интерес вопросы о влиянии собственных колебаний в канале на движущееся в нем судно.

Известно [7], что волновое сопротивление судна в узком канале с твердыми стенками и с открытой поверхностью воды, зависит от скорости движения немонотонно. При этом в районе расположения судна, а также на некотором расстоянии перед ним формируется течение. Если скорость судна меньше первой критической скорости u_1 , течение направлено в сторону, противоположную движению судна. Если скорость судна больше второй критической скорости u_2 , то направления течения и движения судна совпадают. При скоростях $u_1 < u < u_2$ обтекание судна имеет сложный нестационарный характер.

Особые свойства сопротивления движению судов в канале связаны с наличием стенок. Отражения расходящихся от судна волн от стенок приводит к попаданию их на корпус судна, в результате чего происходит наложение волновых систем, влияющих на волновое сопротивление. В случае ледового канала стенки отсутствуют. Однако сплошной ледяной покров вне канала отражает волны подобно стенкам, так как обладает достаточно сильными упругими свойствами при изгибных деформациях.

Основная цель работы – показать аналогию между обычным каналом с твердыми стенками и ледовым каналом и оценить возможность критических режимов движения судна в ледовом канале.

1. Собственные колебания жидкости в ледовом канале. Ледяной покров – твердая крышка. Рассмотрим слой мелкой жидкости глубины H под твердой крышкой

("ледяной покров") с вырезом в виде бесконечной полосы ширины $2a$ с прямолинейными краями ("канал"). Линеаризованные уравнения движения жидкости имеют вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad |x| < a; \quad \Delta\varphi = 0, \quad |x| > a \quad (1.1)$$

Здесь η – возвышение поверхности жидкости в канале над горизонтальным положением равновесия, φ – потенциал скоростей, x , y и t – горизонтальные координаты и время.

Условием применимости приближения мелкой воды можно считать неравенство $H/a < 1/2$. Применение линейных уравнений (1.1) связано с малостью амплитуды изучаемых волн.

В безразмерных переменных, обозначаемых буквами со штрихами (далее штрихи опускаются)

$$t = \frac{a}{\sqrt{gH}} t', \quad x = ax', \quad y = ay' \quad (1.2)$$

уравнения (1.1) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \Delta \right) \varphi = 0, \quad |x| < 1; \quad \Delta\varphi = 0, \quad |x| > 1 \quad (1.3)$$

Решения уравнений (1.3) в областях $|x| > 1$ и $|x| < 1$ должны быть связаны условиями, вытекающими из закона сохранения массы и импульса

$$\lim_{\pm}^{\pm} \frac{\partial^N \varphi}{\partial x^N} = \lim_{\mp}^{\mp} \frac{\partial^N \varphi}{\partial x^N}, \quad N = 0, 1 \quad (1.4)$$

$$(\lim_{\pm}^+ = \lim_{x \rightarrow \pm 1 + 0}, \quad \lim_{\pm}^- = \lim_{x \rightarrow \pm 1 - 0})$$

Будем исследовать решения, соответствующие бегущим вдоль канала периодическим волнам:

$$\varphi = \varphi(x) e^{i(\gamma + ky)}, \quad k > 0; \quad \varphi \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

Из (1.3) находим решение

$$\varphi(x) = C_1 e^{inx} + C_2 e^{-inx}, \quad |x| < 1 \quad (1.6)$$

$$\varphi(x) = C_- e^{kx}, \quad x < -1; \quad \varphi(x) = C_+ e^{-kx}, \quad x > 1; \quad n^2 = \gamma^2 - k^2$$

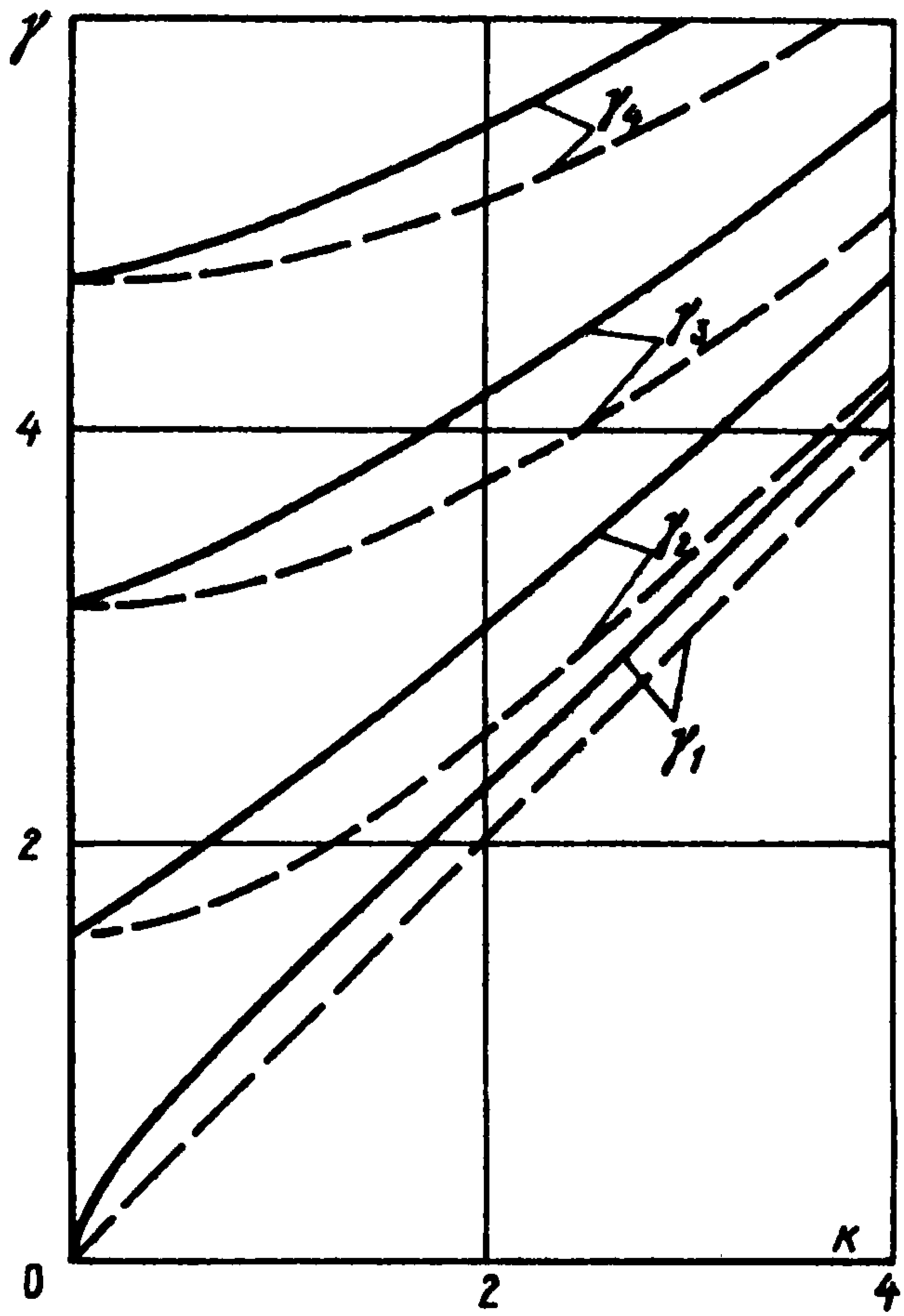
Подставляя содержащее четыре постоянные $C_{1,2}, C_{\pm}$ выражения (1.6) в (1.4), приходим к алгебраической системе четырех линейных однородных уравнений для определения $C_{1,2}, C_{\pm}$:

$$C_{\pm} e^{-k} = C_1 e^{\pm in} + C_2 e^{\mp in}, \quad \mp C_{\pm} e^{-k} = in(C_1 e^{\pm in} - C_2 e^{\mp in}) \quad (1.7)$$

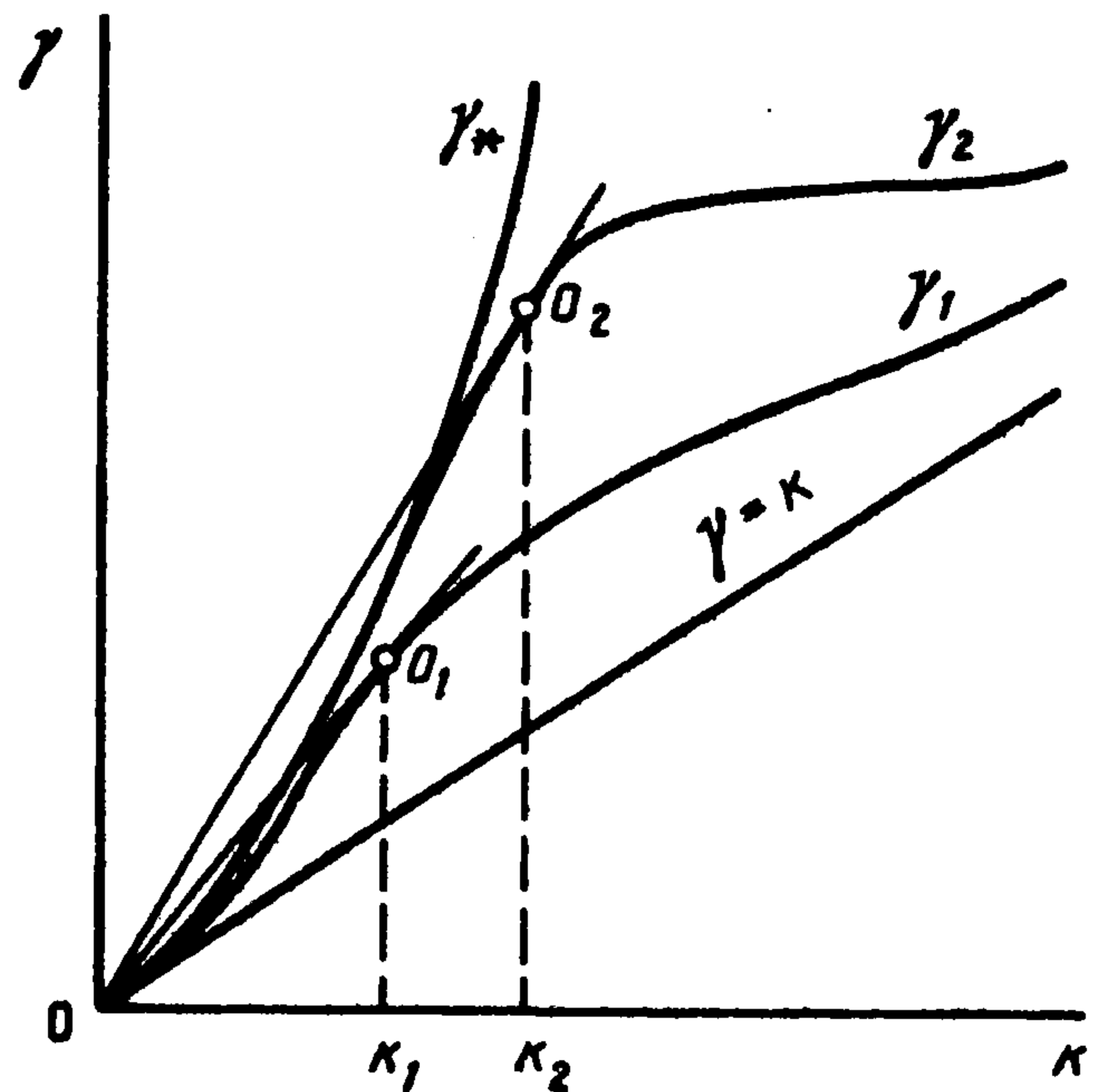
Эта система имеет решения, соответствующие симметричным и антисимметричным относительно плоскости $x = 0$ волнам. Для них соответственно выполняются равенства $C_+ = C_-$, $C_1 = C_2$ и $C_+ = -C_-$, $C_1 = -C_2$. Условием существования нетривиальных решений (1.7) является равенство нулю определителя, который представляется в виде произведения $\Delta_s(\gamma, k)\Delta_{as}(\gamma, k)$, где

$$\Delta_s = n \sin n - k \cos n, \quad \Delta_{as} = n \cos n + k \sin n \quad (1.8)$$

соответствуют определителям систем, вытекающих из (1.7) для симметричных и антисимметричных волн.



Фиг. 1



Фиг. 2

Дисперсионные кривые, соответствующие нетривиальным решениям, представлены на фиг. 1 сплошными линиями. Вследствие симметрии показан только первый квадрант плоскости k, γ . Четные j соответствуют симметричным волнам и нечетные – антисимметричным. Дисперсионные кривые имеют при $|k| \rightarrow 0$ асимптотику

$$\gamma_1 \approx \sqrt{k}, \quad \gamma_j \approx \frac{(j-1)\pi}{2} + \frac{k}{[(j-1)\pi]^2}, \quad j > 1 \quad (1.9)$$

При $k \rightarrow \infty$ все кривые асимптотически стремятся к прямой $\gamma = k$. В размерных переменных в пределе $a \rightarrow 0$ кривая γ_1 сливается с осью частот. Остальные кривые γ_i при этом уходят на бесконечность по γ .

Штриховыми линиями на фиг. 1 показаны дисперсионные кривые для собственных колебаний в канале с твердыми боковыми стенками, описываемые уравнениями $\sin n = 0$, $\cos n = 0$, для симметричных и антисимметричных волн. Эти соотношения легко получаются при подстановке первого соотношения (1.6) в граничные условия $\partial\phi/\partial x = 0$ при $|x| = 1$. В этом случае первая мода, соответствующая симметричной волне, совпадает с плоской волной, распространяющейся вдоль оси y в жидкости со свободной поверхностью.

Из (1.6) видно, что решение для собственных колебаний в канале является суперпозицией плоских волн, распространяющихся в жидкости со свободной поверхностью в разных направлениях оси x . Видно, что дисперсионные кривые первых мод колебаний в ледовом канале и в канале с боковыми стенками сильно различаются только в низкочастотной области. Групповая скорость собственных колебаний в первом случае больше, чем во втором.

Ледяной покров – упругая пластина. Рассмотрим слой мелкой жидкости под упругой пластиной с вырезом в виде бесконечной полосы с прямолинейными краями. В без-

размерных переменных (1.2) уравнения движения жидкости записываются в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\varphi = 0, \quad |x| < 1; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta - D\Delta^3\right)\varphi = 0, \quad |x| > 1 \quad (1.10)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12\rho g(1-\nu^2)a^4}$$

Здесь E , ν , h – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина упругой пластины, ρ – плотность жидкости.

Решение (1.10) должно удовлетворять законам сохранения (1.4) и условиям равенства нулю перерезывающих сил и изгибающих моментов, действующих на кромки упругой пластины [1]

$$\lim_{\pm}^{\pm} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta = 0 \quad (1.11)$$

$$\lim_{\pm}^{\pm} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu' \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta = 0, \quad \nu' = 2 - \nu$$

Будем исследовать решения (1.10), (1.4), (1.11), удовлетворяющие условиям (1.5). Подставляя (1.5) в (1.10), находим, что при $|x| < 1$ решение дается формулами (1.6), а при $|x| > 1$ выполняется

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^3 C_j^{\pm} e^{\pm i\lambda_j x} \quad (1.12)$$

Знаки плюс и минус в (1.12) соответствуют областям $x > 1$ и $x < -1$. Числа $\lambda_j = \lambda_j(\gamma, k)$ корни дисперсионного уравнения $\gamma^2 = (k^2 + \lambda^2)[1 + D(k^2 + \lambda^2)^2]^2$, удовлетворяющие условию $\text{Im } \lambda_j > 0$. Это выполняется при $\gamma^2 < \gamma_*^2 = k^2(1 + Dk^4)$.

Для определения восьми неизвестных постоянных C_j^{\pm} , $C_{1,2}$ из (2.3), (3.5) вытекает система восьми однородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^3 C_j^{\pm} (\lambda_j^2 + \nu k^2)(\lambda_j^2 + k^2) e^{i\lambda_j} = 0 \quad (1.13)$$

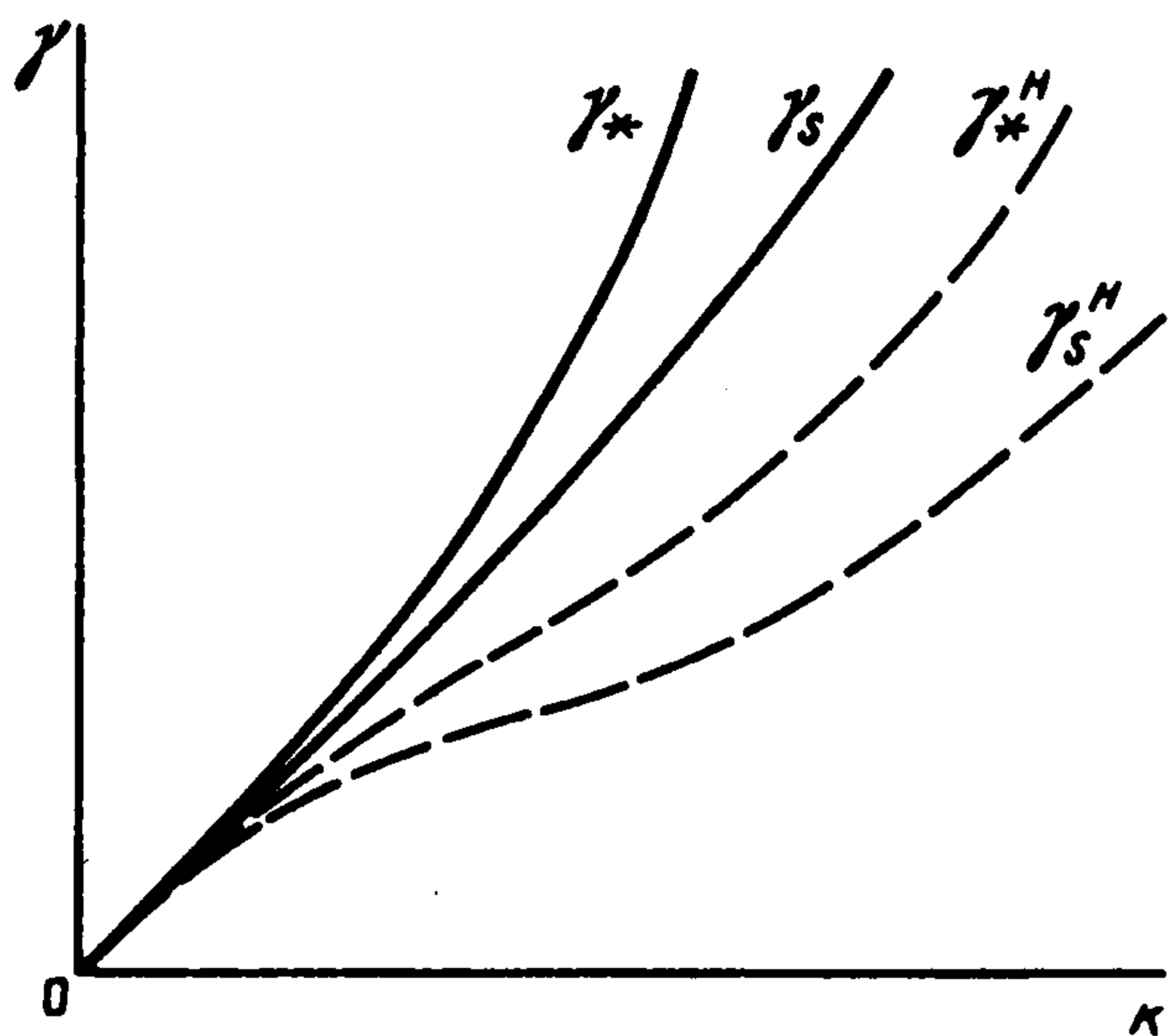
$$\sum_{j=1}^3 C_j^{\pm} \lambda_j (\lambda_j^2 + \nu' k^2)(\lambda_j^2 + k^2) e^{i\lambda_j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^3 C_j^{\pm} e^{i\lambda_j} = C_1 e^{\pm in} + C_2 e^{\mp in}$$

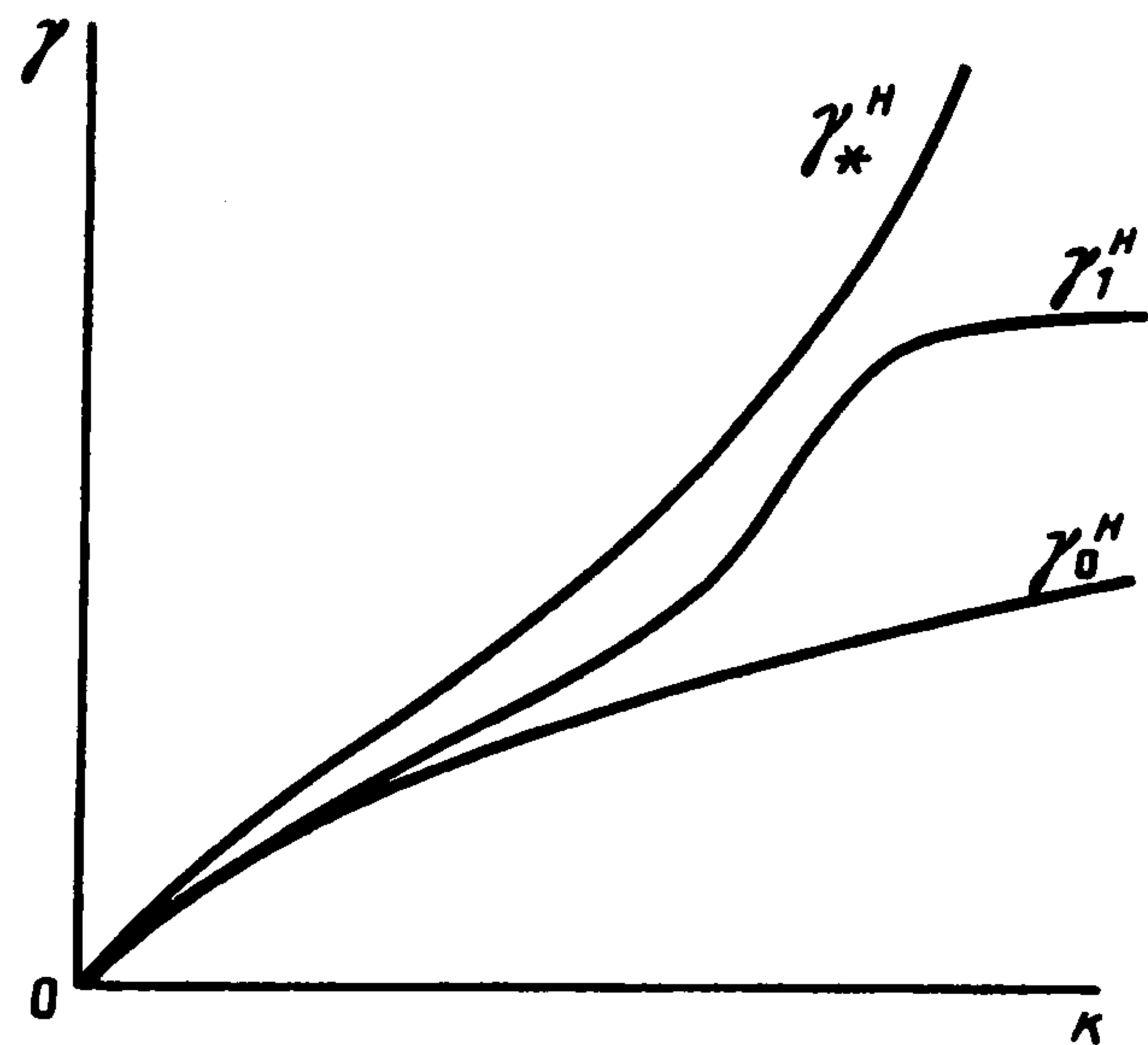
$$\sum_{j=1}^3 C_j^{\pm} \lambda_j e^{i\lambda_j} = \pm n(C_1 e^{\pm in} - C_2 e^{\mp in}) \quad (1.14)$$

Решения (1.13), (1.14) для симметричных и антисимметричных волн имеют вид $C_+ = C_-$, $C_j^+ = C_j^-$ и $C_+ = -C_-$, $C_j^+ = -C_j^-$ соответственно. Явный вид для определителей $\Delta_s(\gamma, k)$ и $\Delta_{as}(\gamma, k)$ матриц четвертого порядка, соответствующих симметричным и антисимметричным волнам, не приводится.

Численные исследования показывают, что дисперсионные кривые, описываемые уравнениями $\Delta_s = 0$ и $\Delta_{as} = 0$, имеют форму, представленную на фиг. 2, где четные и нечетные j соответствуют симметричным и антисимметричным волнам. Кривая γ_1



Фиг. 3



Фиг. 4

исходит из начала координат. Начало остальных кривых γ_j находится на кривой γ_* . Все кривые при $k \rightarrow \infty$ стремятся к прямой $\gamma = k$.

Легко понять, что в размерных переменных при $a \rightarrow 0$, начальные точки всех дисперсионных кривых при $j > 1$ уходят в бесконечность. Кривая γ_1 в этом предельном случае соответствует симметричной краевой волне, распространяющейся вдоль трещины в упругой пластине, плавающей на поверхности жидкости [1]. Дисперсионная кривая для этой краевой волны представлена на фиг. 3 линией γ_s .

Отметим, что указывалась [1] еще одна краевая волна, соответствующая антисимметричной моде. Это связано с тем, что в контактно-граничных условиях (1.11) положено $v = v'$ [1].

Рассмотрим жидкость конечной глубины H . В этом случае дисперсионные соотношения будут зависеть от безразмерного параметра a/H , который выше полагался равным нулю. Далее безразмерный параметр H/a будем обозначать H . Было показано [4], что дисперсионная кривая для симметричной краевой волны $\gamma_1(k)$, бегущей вдоль трещины в упругой пластине, имеет вид, представленный на фиг. 3 штриховой линией γ_s^H . В жидкости конечной глубины кривая γ_*^H представляет плоские волны, бегущие вдоль трещины. Антисимметричная краевая мода отсутствует.

Если безразмерная глубина жидкости достаточно мала, то область перегиба дисперсионных кривых γ_s^H , γ_*^H находится в области, соответствующей приближению мелкой воды. Поэтому дисперсионная кривая γ_s^H , описывающая первую моду симметричной волны в канале в жидкости конечной глубины, может иметь вид, представленный на фиг. 4. Видно, что γ_s^H имеет две точки перегиба. При $k \rightarrow \infty$ кривая γ_1 асимптотически стремится к дисперсионной кривой γ_0^H для волн в жидкости конечной глубины, где $(\gamma_0^H)^2 = k \operatorname{th}(kH)$. Начало остальных кривых для более высоких мод колебаний в канале будет находиться по-прежнему на кривой γ_* .

2. Резонансное возбуждение собственных колебаний. Рассмотрим задачу о возбуждении волн в канале, движущимся с постоянной скоростью V и осциллирующим полем давления $P(y - Vt, x)e^{i\omega t}$. Уравнения движения жидкости в движущейся со скоростью V координатной системе в безразмерной форме имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \eta + \Delta \varphi = 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \varphi + \eta + P(\xi, x) e^{i\omega t} = 0, \quad |x| < 1 \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \varphi + \eta + D \Delta^2 \eta = 0, \quad |x| > 1$$

$$\xi = y - Vt, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Предполагается, что движение начинается в момент $t = 0$ из состояния покоя

$$\eta = 0, \quad \varphi = 0, \quad t = 0 \quad (2.2)$$

При $t > 0$ в канале будут возбуждаться волны. В связи с тем что скорость волн конечна, в любой конечный момент времени область, занятая волнами, будет ограничена. Поэтому к функциям φ , η можно применять преобразования Лапласа по времени t и Фурье по координате ξ :

$$(\zeta, \psi)(l, k, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-lt + ik\xi} (\eta, \varphi)(t, \xi, x)$$

Фурье-образы ψ , ζ не должны иметь особенностей вблизи действительной оси k , и контур интегрирования можно деформировать в ее окрестности. В дальнейшем для анализа решения Фурье интегралы разбиваются в сумму, где каждое слагаемое соответствует волнам определенного типа. При этом подынтегральные функции могут иметь особенности на действительной оси k . Деформирование контура в общем решении [8] связано с выяснением асимптотического поведения вынужденных волн, распространяющихся со скоростью движения внешней нагрузки, при больших временах t .

Из (2.1), (2.2) находим

$$(l - ikV)\zeta + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\right)\psi = 0$$

$$(l - ikV)\psi + \zeta + D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\right)^2 \psi = 0, \quad |x| > 1 \quad (2.3)$$

$$(l - ikV)\psi + \zeta + \frac{P_f(k, x)}{l - i\omega} = 0, \quad |x| < 1$$

Далее ограничимся случаем, когда P_f не зависит от x .

Решение уравнений (2.3) при $|x| > 1$ дается формулами (1.12), где $\lambda_j = \lambda_j(l - ikV, k)$ – корни уравнения

$$(l - ikV)^2 + (k^2 + \lambda^2)[1 + D(k^2 + \lambda^2)^2] = 0$$

Решение уравнений (2.3) при $|x| < 1$ имеет вид

$$\psi(l, k, x) = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx} - \frac{P_f(l - ikV)}{(l - i\omega)m^2}, \quad m^2 = (l - ikV)^2 + k^2$$

Подставляя (1.12), (2.4) в уравнения (1.4), (1.11) получаем неоднородную систему восьми линейных алгебраических уравнений для определения постоянных $C_{1,2}$, C_j^\pm . Четыре уравнения совпадают с (1.13). Остальные уравнения имеют вид

$$\sum_{j=1}^3 C_j^\pm e^{i\lambda_j} = \psi|_{x=\pm 1}, \quad \sum_{j=1}^3 C_j^\pm e^{i\lambda_j} = \mp i \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=\pm 1} \quad (2.4)$$

Решение (1.13), (2.4) имеет форму

$$(C_{1,2}, C_j^\pm) = \frac{P_f(l - ikV)(E_{1,2}, E_j^\pm)}{\Delta(l - i\omega)m^2} \quad (2.5)$$

где $E_{1,2}, E_j^\pm, \Delta$ – функции от $l - ikV$ и k , $\Delta(l - ikV, k)$ совпадает с определителем системы уравнений (1.13), (1.14) после замены $l - ikV \rightarrow i\gamma$.

Совершая обратное преобразование Фурье и Лапласа, находим

$$\varphi = \frac{P_f}{i(2\pi)^{3/2}} \int_{-i\infty}^{i\infty} dl \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{(l - ikV)e^{lt - ik\xi}}{\Delta(l - i\omega)m^2} (E_1 e^{-mx} + E_2 e^{mx} + \Delta)$$

При $|x| > 1$ решение находится аналогичным образом.

Вычисление интегралов в (2.6) проводится по вычетам в плоскостях комплексных переменных l и k . Рассмотрим вычеты соответствующие нулям функции $\Delta(l - ikV, k)$. Нули Δ на комплексной оси l соответствуют собственным колебаниям в канале. Поэтому в окрестности каждого нуля можно записать

$$\Delta = (l - ikV + i\gamma_j(k))\Delta'$$

Обозначим часть решения (4.7), соответствующую вычету $l = l_j \equiv i(kV - \gamma_j(k))$, как φ_j . Из (4.7) находим

$$\varphi_j = \frac{P_f}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk (E_1 e^{-mx} + E_2 e^{mx})|_{l=l_j} \frac{\gamma_j \exp(i[(kV - \gamma_j)t - k])}{\Delta'(\gamma_j, k)(kV - \gamma_j - \omega)(\gamma_j^2 - k^2)} \quad (2.6)$$

Исследуем асимптотику интеграла (2.6) при больших временах t . Перепишем в окрестности $k = k_0$ выражение $kV - \gamma_j - \omega$ в виде

$$kV - \gamma_j - \omega = (k - k_0)(V - \gamma'_j(k_0)) + k_0V - \gamma(k_0) - \omega + O((k - k_0)^2)$$

$$\gamma'_j(k_0) = \left. \frac{\partial \gamma_j}{\partial k} \right|_{k=k_0}$$

Пусть внешнее поле давлений перемещается с групповой скоростью собственной моды волновода, имеющей волновое число k_0 в направлении y , т.е. выполняется равенство

$$V = \gamma'_j(k_0) \quad (2.7)$$

и частота колебаний внешнего давления удовлетворяет условию равенства частоты собственных колебаний внешнего поля давлений частоте волны в системе координат, связанной с движущейся нагрузкой:

$$\omega = \gamma(k_0) - k_0V \quad (2.8)$$

Из (2.7), (2.8) следует, что подынтегральное выражение в (2.6) имеет особенность в знаменателе типа $(k - k_0)^2$, а числитель пропорционален $\exp[i(k - k_0)^2 t]$. Главный вклад в асимптотику выражения (2.6) при больших временах t вносит интеграл типа (2.6), взятый по контуру C в окрестности $k = k_0$. Контур C в комплексной плоскости k состоит из двух полупрямых, подходящих к точке $k = k_0$ под углом $\pi/4$, и обходит точку $k = k_0$ по дуге полуокружности [8]. Было показано, что

$$\int_C f(z) \frac{e^{iz^2 t}}{z^2} dz = 2f(0)e^{-i\pi/4} (\pi t)^{1/2} + i\pi f'(0) + O(t^{-1/2})$$

Таким образом, интеграл φ_j при $t \rightarrow \infty$ пропорционален $\exp(i\omega t)\sqrt{t}$. Если скорость движения нагрузки совпадает с экстремальной фазовой скоростью собственных колебаний в канале, то интеграл (2.6) возрастает пропорционально \sqrt{t} и $\omega = 0$. В дальнейшем будем называть эти скорости резонансными. Волновые числа волн с минимальной фазовой скоростью обозначены на фиг. 3 буквами k_j . В этих точках резонансная скорость V совпадает с тангенсом угла наклона касательной, проведенной из начала координат к дисперсионным кривым γ_j (см. фиг. 2). Величины k_j функции одного безразмерного параметра D .

Видно, что в случае жидкости конечной глубины может появиться еще одна резонансная скорость, равная \sqrt{gH} , так как собственная волна, движущаяся с этой скоростью, имеет экстремальную фазовую скорость. Эта резонансная скорость будет минимальной. Таким образом, в отличие от сплошного ледяного покрова [8], когда имеются только две резонансные скорости, при движении нагрузки по поверхности канала в ледяном покрове имеется много резонансных скоростей.

Заметим, что условия (2.7), (2.8) могут выполняться при рассмотрении плоской задачи о движении колеблющейся нагрузки по поверхности слоя жидкости со свободной поверхностью. В этом случае амплитуда вынужденных колебаний будет также нарастать со временем пропорционально \sqrt{t} . В пространственном случае резонансные явления могут исчезать за счет двумерных дисперсионных эффектов.

3. Резонансные взаимодействия волн в канале. Выше было показано, что собственные колебания жидкости в канале имеют много ветвей дисперсионного соотношения. Представляет интерес изучить влияние нелинейных эффектов на возможные взаимодействия между волнами, соответствующими разным ветвям. Как будет видно из дальнейшего, для любой волны из высшей моды существуют волны первой моды, которым с течением времени передается энергия. Для простоты здесь будет рассмотрен случай канала в твердой крышке, плавающей на поверхности жидкости (разд. 1).

Условия резонансного взаимодействия трех волн имеют вид

$$\gamma_a(k_3) = \gamma_b(k_2) + \gamma_c(k_3), \quad k_3 = k_1 + k_2 \quad (3.1)$$

где $\gamma_{a,b,c}(k)$ – ветви дисперсионного соотношения (1.8), которое удобно переписать в виде

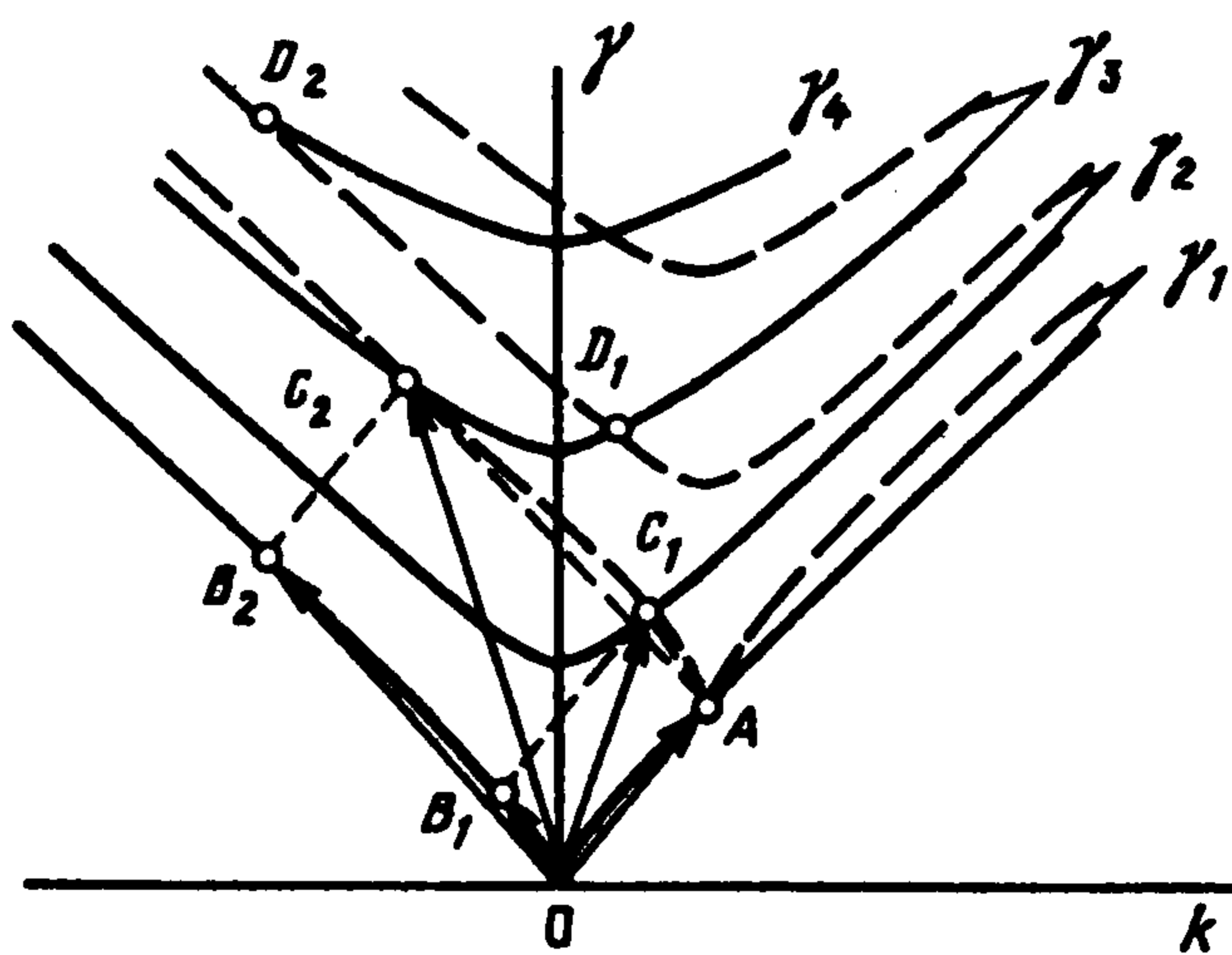
$$\Delta(\gamma, k) \equiv e^{-in}(|k| - in) + (-1)^\alpha e^{in}(|k| + in) = 0 \quad (3.2)$$

Четные α соответствуют симметричным, и нечетные – антисимметричным волнам.

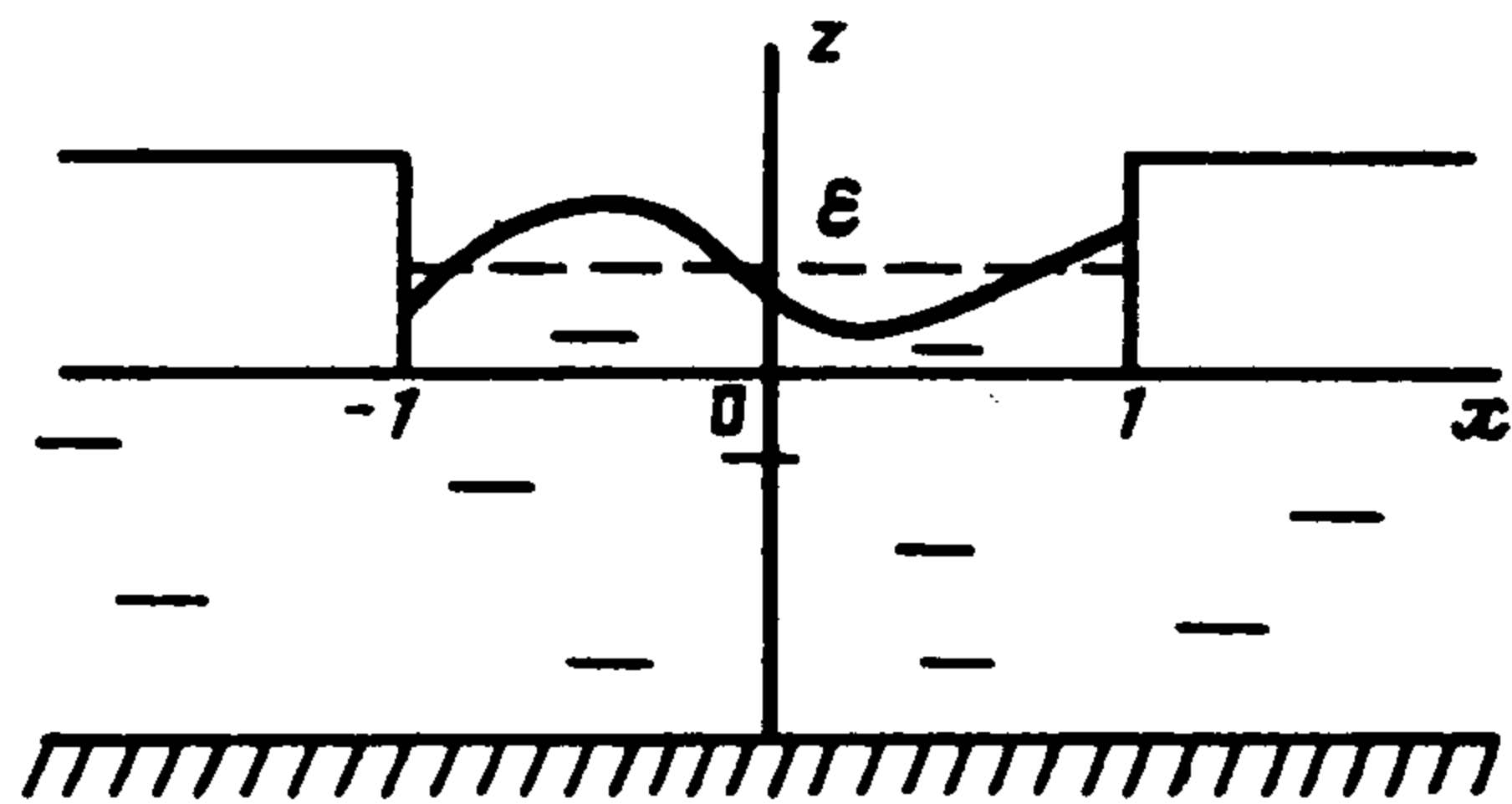
Резонансные триады легко построить графически с помощью известной процедуры [9]. Выберем произвольную точку A с координатами (γ_A, k_A) на дисперсионной кривой (ДК) первой моды, соответствующей симметричной волне. Будем изучать различные резонансные взаимодействия, в которых принимает участие волна (γ_A, k_A) . Для этого переместим начало координат в точку A и построим новые ДК, исходящие из точки A . На фиг. 5 они показаны штриховыми линиями. Пусть C_1, C_2, \dots – точки пересечения штриховой ДК первой ветви γ_1 со сплошными ДК. Проведем из начала координат прямую, параллельную AC_j , и пусть B_j – точка ее пересечения со сплошной ДК γ_1 . Очевидно, что $OB_j = AC_j$. Отсюда следует, что

$$\gamma_{C_j} = \gamma_A + \gamma_{B_j}, \quad k_{C_j} = k_A + k_{B_j} \quad (3.3)$$

Точки B_j, C_j имеют координаты (γ_{B_j}, k_{B_j}) и (γ_{C_j}, k_{C_j}) соответственно. Видно, что соотношения (3.3) аналогичны условиям (3.1). Таким образом, волна каждой высокочастотной моды распадно неустойчива по отношению к волнам первой низкочастотной моды, бегущим в разные стороны. Можно рассматривать резонансные взаимодействия и между волнами более высоких мод.



Фиг. 5



Фиг. 6

Рассмотрим вывод уравнений нелинейного резонансного взаимодействия волновых пакетов. Нелинейные уравнения мелкой воды имеют в безразмерных переменных вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \nabla((\eta + 1) \nabla \varphi) + \Delta \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2} (\nabla \varphi)^2 + \eta = 0 \quad (3.4)$$

$$|x| < 1, \quad \varepsilon \ll 1$$

При $|x| > 1$ потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа. Малый параметр ε равен отношению глубины погружения пластины к характерному горизонтальному масштабу a , равному полуширине канала (фиг. 6).

Из закона сохранения массы следует

$$\lim_{\pm}^{\pm} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{\pm}^{\mp} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} (1 + \varepsilon + \varepsilon \eta) \right] \quad (3.5)$$

Из (3.5) и условия непрерывности давления на прямой $z = 0$ (фиг. 6) вытекает непрерывность потенциала скоростей φ при $|x| = 1$

$$\lim_{\pm}^{\pm} \varphi = \lim_{\pm}^{\mp} \varphi + O(\varepsilon^2) \quad (3.6)$$

(учитывалось, что скачок скорости частиц жидкости вдоль направления y при $|x| = 1$ порядка ε^2).

Из (3.4), (3.6) с точностью до $O(\varepsilon)$ получаем задачу для определения потенциала φ :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (1 + \varepsilon) \Delta \right) \varphi + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[(\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] = 0, \quad |x| < 1 \quad (3.7)$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad |x| > 1$$

$$\lim_{\pm}^{\pm} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{\pm}^{\mp} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(1 + \varepsilon - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right], \quad \lim_{\pm}^{\pm} \varphi = \lim_{\pm}^{\mp} \varphi \quad (3.8)$$

Решение (3.7) ищем в виде

$$\varphi = \sum_{j=1}^3 \varphi_j(T, Y, x) e^{i\theta_j} + \text{c.c.} + O(\varepsilon) \quad (3.9)$$

$$\theta_1 = \gamma_b t + k_1 y, \quad \theta_2 = \gamma_c t + k_2 y, \quad \theta_3 = \gamma_a t + k_3 y, \quad T = \varepsilon t, \quad Y = \varepsilon y$$

Величины $\gamma_{a,b,c}$ и $k_{1,2,3}$ удовлетворяют условиям (3.1).

В нулевом порядке по ϵ из (3.7), (3.8) следует

$$\varphi_j = \varphi_{j0}(T, Y)(e^{in_j x} + (-1)^{\alpha_j} e^{-in_j x}) + \epsilon \varphi_{j1} + O(\epsilon^2), \quad |x| < 1$$

$$\varphi_j = \Psi_j^\pm e^{\mp i k_j |x|} + \epsilon \varphi_{j1} + O(\epsilon^2), \quad |x| > 1 \quad (3.10)$$

$$n_1 = \sqrt{\gamma_b^2 - k_1^2}, \quad n_2 = \sqrt{\gamma_c^2 - k_2^2}, \quad n_3 = \sqrt{\gamma_a^2 - k_3^2}$$

Здесь $\alpha_j = 0$ для симметричных и $\alpha_j = 1$ для антисимметричных волн. Индексы и знаки плюс и минус во второй формуле (3.10) соответствуют областям $x > 1$ и $x < -1$.

В первом приближении по ϵ из (3.7) с использованием нулевого приближения (3.8) находим φ_{j1} и после подстановки выражений (3.10) в граничные условия (3.8) получаем

$$iL_j \varphi_{j0} = W_j N_j, \quad j = 1, 2, 3; \quad L_j = \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma} \Big|_{k=k_j} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial \Delta}{\partial k} \Big|_{k=k_j} \frac{\partial}{\partial Y}$$

$$N_1 = \varphi_{20}^* \varphi_{30}, \quad N_2 = \varphi_{10}^* \varphi_{30}, \quad N_3 = \varphi_{10} \varphi_{20}$$

Коэффициенты W_j выражаются через $\gamma_{a,b,c}$ и k_j , имеют громоздкий вид и здесь не приводятся. Анализ численных выражений W_j проводился численно для конкретных резонансных триад.

Отношение

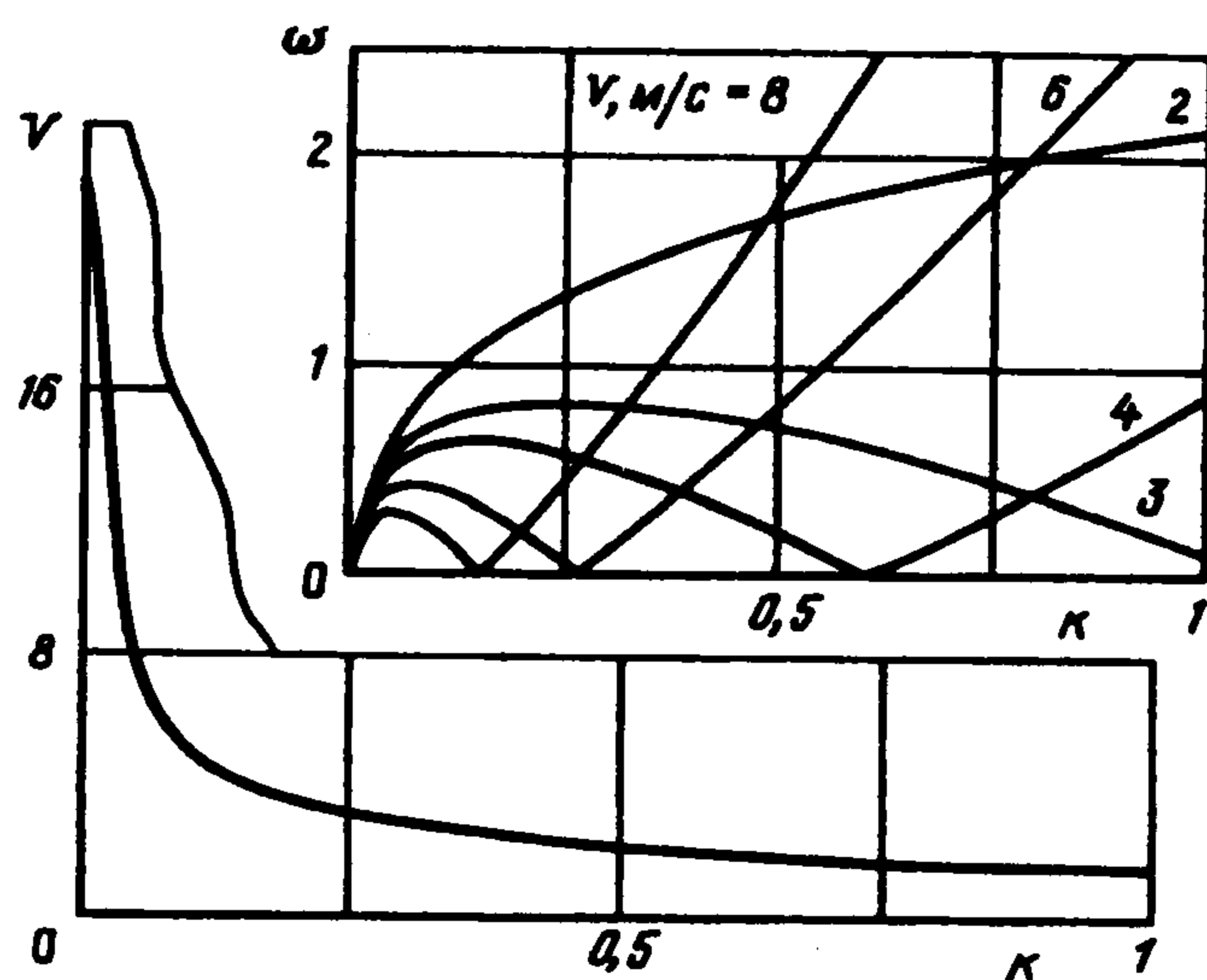
$$-\frac{\partial \Delta}{\partial k} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma} \right)^{-1} \Big|_{k=k_j} = c_j$$

равно групповой скорости волнового пакета φ_{j0} вдоль оси y . Таким образом, показано, что резонансное взаимодействие собственных колебаний в канале описывается стандартными уравнениями трехволнового взаимодействия, свойства решений которых хорошо изучены [10]. Было показано, что полный распад волны накачки φ_{30} происходит в случае, если ее групповая скорость $c_3 \in (c_1, c_2)$. В данной задаче этот случай реализуется, когда волны φ_{10} и φ_{20} бегут в разные стороны.

В уравнениях (3.7) дисперсия не учитывается, и поэтому может показаться, что волны должны опрокидываться. Однако из граничных условий (3.8) следует, что процессы генерации высших гармоник не являются резонансными, так как колебания с кратными частотами и волновыми числами вдоль оси y не являются собственными волнами канала. Поэтому опрокидывания волн в данном случае не происходит.

4. Заключение. Исследования, проведенные в данной работе, показывают, что имеется большая аналогия между собственными колебаниями жидкости в обычном канале и в ледовом канале. При движении судна в ледовом канале часть энергии излучается на бесконечность в виде изгибно-гравитационных волн и часть энергии судна идет на возбуждение собственных колебаний в канале. В предельном случае, когда жесткость ледяного покрова бесконечно большая (приближение твердой крышки), изгибно-гравитационные волны отсутствуют, и вся энергия судна расходуется на возбуждение собственных колебаний в канале и на трение.

В обычном канале критический режим движения наступает в результате взаимного влияния собственных колебаний. Можно ожидать, что в ледовом канале при увеличении скорости движения также должна появиться тенденция к понижению уровня жидкости вблизи судна и к формированию одиночной волны перед судном. По-видимому, одиночная волна будет представлять нелинейное образование из собственных колебаний первой моды. По аналогии с обычным каналом для критической скорости u_1 [7] примем оценку $0,55\sqrt{gH} < u_1 < \sqrt{gH}$. Полагая $H = 10$ м и $H = 50$ м, получаем оценки для первой критической скорости $5,4$ м/с $< u_1 < 10$ м/с и 12 м/с $< u_1 < 22$ м/с



Фиг. 7

соответственно. Характерная скорость движения судов в ледовых каналах не превышает 8 м/с. Отсюда видно, что критические режимы движения могут реализовываться только на очень небольших глубинах.

Отметим, что усиление волнового сопротивления при движении в канале может происходить в результате влияния собственных колебания корпуса корабля. Характерные периоды этих колебаний лежат в интервале от 1 до 10 с., т.е. $\omega \in (0, 6, 6) \text{ с}^{-1}$.

Используя формулы (2.7), (2.8), проведем оценки скоростей движения судна, при которых происходит нарастание амплитуды вынужденных волн первой моды собственных колебаний в канале. Было показано, что дисперсионная кривая первой моды мало отличается от дисперсионной кривой плоских волн, распространяющихся в жидкости со свободной поверхностью. Поэтому в (2.7), (2.8) для оценок положим $\gamma_j(k) \approx \gamma_0(k) = \sqrt{gk \operatorname{th}(kH)}$.

На фиг. 7 на плоскости V, k по вертикальной оси откладывается скорость движения V в м/с и по горизонтальной оси волновое число k в м^{-1} . Кривая линия на плоскости V, k соответствует групповой скорости плоской волны $\gamma'_0(k)$ при $H = 50$ м. Видно, что волновое число волны с групповой скоростью, меньшей 8 м/с, больше $0,04 \text{ м}^{-1}$.

На фиг. 7 на плоскости ω, k по вертикали откладывается частота ω в с^{-1} и по горизонтали волновое число k в м^{-1} . Кривые, показанные на фиг. 7 на плоскости ω, k , описываются уравнениями $\omega = |kV - \sqrt{gk \operatorname{th}(kH)}|$ при $H = 50$ м и разных значениях V . Видно, что при $k > 0,04 \text{ м}^{-1}$ всегда существуют скорости, меньшие 8 м/с, при которых частота $\omega \in (0, 6, 6) \text{ с}^{-1}$. Таким образом, показано, что всегда существуют скорости движения внешней нагрузки из диапазона возможных скоростей движения корабля и соответствующие им частоты из диапазона характерных частот колебаний корабля, при которых происходит резонансное возбуждение первой моды колебаний в канале.

Автор благодарит А.Г. Куликовского за замечания по результатам работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-010-1746) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-RFBR 95-0435).

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко А.В., Семенов А.Ю. Краевые волны в мелкой жидкости под упругой пластиной с трещиной // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 185–189.
2. Marchenko A.V. Spectrum of elastic gravity waves in the sea under the ice cover // Bull. Rus. Acad. Sci. Physics / Supplement. Physics of Vibrations. 1994. V. 58. № 4. P. 220–235.
3. Гольдштейн Р.В., Марченко А.В., Семенов А.Ю. Краевые волны в жидкости под упругой пластиной с трещиной // Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 3. С. 331–334.

4. *Марченко А.В., Семенов А.Ю.* Вычисления определенных интегралов в методе Винера – Хопфа суммированием рядов по вычетам // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35. № 3. С. 445–452.
5. *Марченко А.В.* Собственные колебания гряды торосов в упругом ледяном покрове, плавающем на поверхности бесконечно глубокой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 99–105.
6. *Goldstein R.V., Marchenko A.V.* Free vibrations of an elastic ice cover with cracks, channels and ice ridges // Proc. 13th Intern. Conf. on Port and Ocean Eng. under Arctic Condition (POAC'95). St.-Pb.: 1995. V. 1. P. 171–180.
7. *Войткунский Я.И.* Сопротивление движению судов. Л.: Судостроение, 1988. 287 с.
8. *Schulkes R.M.S.M., Sneyd A.D.* Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load // J. Fluid Mech. 1988. V. 186. P. 25–46.
9. *Ball F.K.* Energy transfer between external and internal gravity waves // J. Fluid Mech. 1964. V. 19. Pt. 3. P. 465–478.
10. *Kaup D.J.* The three-wave interaction – a nondispersive phenomenon // Stud. Appl. math. 1976b. V. 55. № 1. P. 9–44.
11. *Milinazzo F., Marvin Shinbrot, Evans N.W.* A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangular load // J. Fluid Mech. 1995. V. 287. P. 173–197.

Москва

Поступила в редакцию
21.XII.1995