

УДК 533.2:534.1

© 1997 г. И.Ш. Ахатов, Н.К. Вахитова, Г.Я. Галеева,  
Р.И. Нигматулин, Д.Б. Хисматуллин

### О СЛАБЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В СФЕРИЧЕСКОМ ОБЪЕМЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается сферически-симметричная задача о колебаниях одиночного газового пузырька в центре сферической колбы, наполненной сжимаемой жидкостью, при вынужденном радиальном возбуждении стенки колбы. В длинноволновом приближении при малых числах Маха получена система дифференциально-разностных уравнений, обобщающая уравнение Релея – Ламба – Плессета. Эта система учитывает сжимаемость жидкости и пригодна для описания как свободных, так и вынужденных колебаний пузырька. Она включает обыкновенное дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению Херринга – Флинна – Гилмора, описывающее эволюцию радиуса пузырька, и уравнение с запаздыванием, связывающее давление на стенке колбы с изменением радиуса пузырька. Проводится анализ решений полученной системы дифференциально-разностных уравнений в линейном приближении и численно анализируются различные режимы слабых, но нелинейных колебаний пузырька при различных законах изменения давления или скорости жидкости на стенке колбы. Эти решения сравниваются с численными решениями полной системы уравнений в частных производных, описывающей радиальные движения сжимаемой жидкости вокруг пузырька.

**1. Постановка задачи.** Математическое исследование радиальных пульсаций газового пузырька в однородной жидкости ранее проводилось двумя способами. С одной стороны, предполагалось, что жидкость безгранична и несжимаема, а давление на бесконечности задано. В этом случае уравнение движения жидкости приводило к уравнению Релея – Ламба – Плессета [1–3]

$$a \frac{dw_a}{dt} + \frac{3}{2} w_a^2 = \frac{p_a - p_\infty}{\rho}, \quad w_a = \frac{da}{dt}, \quad p_a(a) = p_g(a) - \frac{2\Sigma}{a} \quad (1.1)$$

где  $\rho$  – плотность,  $\Sigma$  – поверхностное натяжение жидкости,  $w_a$  – радиальная скорость жидкости на поверхности пузырька,  $p_g$  – давление газа в пузырьке (а точнее, на его стенке),  $p_a$  – давление жидкости на стенке пузырька,  $p_\infty$  – давление вдали от пузырька (на бесконечности). С другой стороны, в окружающей пузырек безграничной жидкости учитывалась слабая сжимаемость в рамках так называемой схемы линейного или нелинейного акустического излучения. В этом случае в качестве уравнения радиального движения пузырька использовалось уравнение Херринга – Флинна – Гилмора [4]

$$a \frac{dw_a}{dt} + \frac{3}{2} w_a^2 = \frac{p_a - p_\infty}{\rho} + \frac{a}{\rho C} \frac{d(p_a - p_\infty)}{dt} \quad (1.2)$$

При этом учитывалось затухание колебаний за счет расходящихся от пузырька сферических акустических волн давления. Давление  $p_\infty$  интерпретировалось как давление жидкости вдали от пузырька, но не конкретизировался способ его вычисления.

На основе метода возмущений была развита [5] приближенная теория радиальных движений сферического пузырька в сжимаемой безграничной жидкости в предположении, что жидкость на бесконечности не возмущена. Получено "семейство" уравнений колебаний пузырька, включающее в себя уравнение (1.2) и уравнения других авторов [4] как частные случаи. Показано, что все эти уравнения "эквивалентны", так как обладают одним и тем же порядком точности по числу Маха. При этом использовалось утверждение, что колебания пузырька не оказывают влияние на внешнее акустическое поле давления в жидкости, т.е. падающая на пузырек волна отражается от него без изменений. Это позволило рассмотреть задачу о колебании пузырька отдельно от акустической задачи в жидкости, используя внешнее акустическое поле как заданную движущую силу, действующую на пузырек.

В настоящей работе рассматривается связанная задача о колебаниях ограниченного объема жидкости и газового пузырька. Показывается, что эта задача может быть приведена к уравнению, подобному уравнению Херринга – Флинна – Гилмора для радиуса пузырька, в котором движущее давление связано дифференциально-разностным уравнением с изменением радиуса пузырька и давлением на внешней границе жидкости (стенке колбы).

Рассмотрим сферически-симметричные радиальные движения жидкости в сферической колбе радиуса  $R$  вокруг находящегося в центре колбы сферического газового пузырька радиуса  $a$ , вызванные малыми сферически-симметричными перемещениями стенки колбы амплитуды  $\delta r$ . При этом будем полагать

$$a \ll R, \quad \delta r \ll R \quad (1.3)$$

Казалось бы, что в случае  $a \ll R$  в качестве давления вдали от пузырька можно использовать давление на стенке колбы  $p_R$ , т.е. считать, что  $p_\infty = p_R$ . Но это в общем случае неверно.

Во-первых, из-за конечной скорости распространения возмущений в жидкости (скорость звука в жидкости) имеется задержка времени  $t_d$  между возмущением на стенке колбы и приходом этого возмущения в окрестность и, в частности, на стенку пузырька, когда пузырек "почувствует" это возмущение:  $t_d \approx R/C$ , где  $C$  – скорость звука в жидкости. При  $R_F \approx 5$  см и  $C = 1500$  м/с имеем  $t_d \approx 33$  мкс, что при частотах внешнего возмущения  $f > 10$  кГц сравнимо с периодом колебаний этих возмущений (или больше него).

Во-вторых, возмущение, инициированное на внешней границе объема (на стенке колбы), из-за его сферического акустического схождения при проникании внутрь колбы, усиливается по закону  $r^{-1}$ , где  $r$  – радиальная координата, отсчитываемая от центра сферической колбы. Поэтому пузырек "почувствует" усиление возмущения по сравнению с его амплитудой на границе колбы  $r = R$ .

Таким образом, для газового пузырька в конечном объеме сжимаемой жидкости уравнения Релея – Ламба – Плессета (1.1) и Херринга – Флинна – Гилмора (1.2), при выводе которых жидкость считалась безграничной, становятся непригодными.

Сферически-симметричная постановка задачи о радиальных движениях (поле радиальных скоростей  $w(r, t)$ ) сжимаемой жидкости вокруг сферического пузырька, включающая дифференциальные уравнения массы и импульса, баротропное уравнение состояния жидкости для давления  $p$  и плотности  $\rho$ , граничные условия на поверхности пузырька  $r = a$  и на стенке колбы  $r = R$ , может быть сформулирована следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial r} + \frac{2\rho w}{r} = 0, \quad \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho w \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad p = p(\rho) \quad (1.4)$$

$$r = R: p = p_R(t); \quad r = a: p = p_a(a) = p_g(a) - \frac{2\Sigma}{a}, \quad w = w_a = \frac{da}{dt} = a' \quad (1.5)$$

**2. Уравнения радиальных колебаний пузырька.** Можно показать, что пространство между поверхностью пузырька и внешней поверхностью колбы состоит из трех зон.

1°. Дальняя или внешняя зона, где сжимаемость жидкости существенна, но нелинейные силы инерции, возникающие из-за конвективных ускорений, пренебрежимо малы и движение жидкости имеет волновой характер.

2°. Окрестность пузырька или внутренняя зона, где жидкость можно считать несжимаемой и движение происходит только из-за сжатия и расширения пузырька, но нелинейные силы инерции, возникающие из-за конвективных ускорений, существенны.

3°. Промежуточная зона, где сжимаемость жидкости, так же как и нелинейные силы инерции, возникающие из-за конвективных ускорений, достаточно велики.

В первых двух зонах можно построить соответствующие асимптотические аналитические решения.

Во внешней, или дальней зоне вдали от пузырька ( $r^2 \gg a^2$ ) конвективные ускорения частиц жидкости достаточно малы:

$$w \frac{\partial w}{\partial r} \ll \frac{\partial w}{\partial t}$$

Эта оценка следует из оценок соответствующих ускорений:

$$w \frac{\partial w}{\partial r} \approx w_R^2 / \lambda_R, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \approx w_R / t_R \quad (\lambda_R = C t_R)$$

где  $\lambda_R, t_R$  – длина и период волнового возмущения в жидкости во внешней зоне, причем период  $t_R$  равен характерному периоду колебаний на стенке колбы. Отношение этих ускорений равно характерному числу Маха  $M_R$  движения стенки колбы, которое предполагается малым:

$$w \frac{\partial w}{\partial r} / (\frac{\partial w}{\partial t}) \sim w_R t_R / \lambda_R = w_R / C = M_R \ll 1$$

Тогда уравнения импульса и массы сплошной среды во внешней области ( $r \gg a$ ,  $w \approx w_{ex}$ ,  $p \approx p_{ex}$ ) сводятся к линейному волновому уравнению для внешней асимптотики потенциала скоростей  $\phi_{ex}$ , которое для сферически-симметричного движения может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \phi_{ex}}{\partial t^2} = C^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial r} \right)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\phi_{ex} = \frac{1}{r} \left[ \psi_1 \left( t - \frac{r}{C} \right) + \psi_2 \left( t + \frac{r}{C} \right) \right]$$

Здесь  $\psi_2$  характеризует падающую на пузырек волну,  $\psi_1$  – отраженную от пузырька волну.

При учете интеграла Коши – Лагранжа для потенциального нестационарного движения и малости возмущений во внешней зоне ( $r^2 \gg a^2$ ) связь внешних асимптотик давления  $p_{ex}$ , скорости  $w_{ex}$  и плотности  $\rho_{ex}$  с внешней асимптотикой потенциала  $\phi_{ex}$  будет следующей:

$$p_{ex} = p_0 - \rho_0 \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial t}, \quad w_{ex} = \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial r}, \quad \rho_{ex} = \rho_0 + \frac{p_{ex} - p_0}{C^2} \quad (2.1)$$

Во внутренней зоне или в области, прилегающей к пузырьку ( $r \sim (1 + 10)a$ ), т.е. в пограничном слое, который является тонким по сравнению с радиусом колбы, оценка с использованием уравнения сохранения массы (первое уравнение (1.4)) показывает следующее:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \frac{\delta \rho}{t_a}, \quad w \frac{\partial \rho}{\partial r} \approx w_a \frac{\delta \rho}{a}, \quad \rho \frac{\partial w}{\partial r} \approx \rho \frac{w_a}{a}, \quad \frac{\rho w}{r} \approx \frac{\rho w_a}{a} \quad (2.2)$$

Здесь  $t_a$  – характерное время волны плотности около пузырька,  $w_a = a'$  – характерная скорость движения жидкости на поверхности пузырька. Предполагая, что вблизи пузырька в течение характерного времени  $t_a$  смещения жидкости (за счет сжимаемости пузырька) сравнимы с радиусом пузырька  $a$ , можно записать так:

$$t_a \approx a / w_a$$

Для малых чисел Маха вблизи пузырька ( $M_a = w_a/C \ll 1$ ) это предположение соответствует длинным волнам плотности вблизи пузырька:  $\lambda_a \sim Ct_a \gg a$ .

В итоге отношение слагаемых, связанных со сжимаемостью ( $\delta\rho$ ), к слагаемым, не связанным со сжимаемостью, равно относительному изменению плотности жидкости около пузырька, которое предполагается очень малым:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \frac{a}{\rho w_a} \approx \frac{\delta\rho}{\rho} \equiv \varepsilon_p \ll 1, \quad \frac{w_a \delta\rho}{a \rho w_a} \frac{a}{\rho} \approx \frac{\delta\rho}{\rho} \equiv \varepsilon_p \ll 1$$

Поэтому в области, прилегающей к пузырьку, или во внутренней зоне ( $\varphi = \varphi_{in}$ ) справедлива асимптотика для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r} \right) = 0$$

Решение этого уравнения при учете граничного условия на стенке пузырька ( $r = a$ :  $w = w_a = a'$ ) имеет вид

$$\varphi_{in} = -a'a^2 / r \quad (2.3)$$

Интеграл Коши – Лагранжа в этом случае включает компоненту, соответствующую нелинейной силе инерции, и имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = F(t) \quad (2.4)$$

Этот интеграл при учете (2.3) приводит к уравнению Релея – Ламба – Плессета (1.1), где  $p_\infty$  – давление на "внутренней бесконечности":

$$r = R_i: p = p_\infty \quad (a \ll R_i \ll R) \quad (2.5)$$

Для получения уравнения радиального движения газового пузырька для данного возбуждения на стенке колбы ( $p_R = p_R(t)$ ) с учетом сжимаемости жидкости необходимо срастить асимптотические решения для внешней и внутренней зон в промежуточной зоне или на промежуточной бесконечности. Условие сращивания должно применяться для объемного расхода жидкости и для давления:

$$4\pi r^2 \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 4\pi r^2 \frac{\partial \varphi_{ex}}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow 0}, \quad p_{in} \Big|_{r \rightarrow \infty} = p_{ex} \Big|_{r \rightarrow 0} \quad (2.6)$$

Учитывая, что расход в случае несжимаемой жидкости зависит только от времени:

$$Q(t) = r^2 \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} \equiv a^2 \frac{da}{dt}$$

можно представить первое соотношение (2.6) в виде

$$Q(t) = r^2 \frac{\partial \varphi_{ex}}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = - \left[ \psi_1 \left( t - \frac{r}{C} \right) + \psi_2 \left( t + \frac{r}{C} \right) \right] + \\ + \frac{r}{C} \left[ -\psi_1' \left( t - \frac{r}{C} \right) + \psi_2' \left( t + \frac{r}{C} \right) \right] \Big|_{r \rightarrow 0} \rightarrow -\psi_1(t) - \psi_2(t)$$

откуда следует связь между отраженной и падающей волнами

$$\psi_1 = -\psi_2 - Q \quad (2.7)$$

и асимптотика для потенциала скоростей в дальней зоне такова:

$$\varphi_{\text{ex}} = \frac{1}{r} \left[ \psi_2 \left( t + \frac{r}{C} \right) - \psi_2 \left( t - \frac{r}{C} \right) - Q \left( t - \frac{r}{C} \right) \right] \quad (2.8)$$

Используя интегралы Коши – Лагранжа (первое выражение (2.1) и (2.4)) и асимптотики для потенциалов скоростей (2.1) и (2.3), можно найти асимптотики распределений давления во внешней и внутренней зонах

$$p_{\text{ex}} = p_0 - \rho \frac{\partial \varphi_{\text{ex}}}{\partial t} = p_0 - \frac{\rho}{r} \left[ \psi_2' \left( t + \frac{r}{C} \right) - \psi_2' \left( t - \frac{r}{C} \right) - Q' \left( t - \frac{r}{C} \right) \right] \quad (2.9)$$

$$p_{\text{in}} = p_a(a) - \rho \left( aa'' + \frac{3}{2} (a')^2 \right) + \frac{\rho}{r} (a^2 a')' - \frac{\rho}{2} \frac{a^4 (a')^2}{r^4} \quad (2.10)$$

Внутренняя асимптотика ( $r \rightarrow 0$ ) внешнего решения  $p_{\text{ex}}$  в (2.9) может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{\text{ex}}|_{r \rightarrow 0} &= p_0 - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho}{r} \left[ \psi_2' \left( t + \frac{r}{C} \right) - \psi_2' \left( t - \frac{r}{C} \right) - Q' \left( t - \frac{r}{C} \right) \right] = \\ &= p_0 - \frac{2\rho \psi_2''(t)}{C} + \frac{\rho Q'(t)}{r} + \frac{\rho Q''(t)}{C} \quad (Q' \equiv (a^2 a')') \end{aligned} \quad (2.11)$$

Оценивая пределы двух последних асимптотик согласно второму соотношению (2.6), получим длинноволновое приближение уравнения радиальных колебаний в сжимаемой жидкости

$$aa'' + \frac{3}{2} a'^2 = \frac{p_a(a) - p_0}{\rho} + \frac{1}{C} [2\psi_2''(t) + Q''(t)] \quad (2.12)$$

Замечательно, что имеется совпадение члена  $\rho Q'(t)/r \equiv \rho (a^2 a')'/r$  как в выражении для  $p_{\text{ex}}$ , так и в выражении для  $p_{\text{in}}$  (сравните (2.10) и (2.11)), что дает возможность срастить асимптотики.

Давление на стенке колбы может быть выражено при учете внешней асимптотики (2.9)

$$p_F = p_0 - \frac{\rho}{R} \left[ \psi_2' \left( t + \frac{R}{C} \right) - \psi_2' \left( t - \frac{R}{C} \right) - Q' \left( t - \frac{R}{C} \right) \right] \quad (2.13)$$

Член  $Q''(t)/C$  отвечает за влияние пузырька на отраженную волну, включает в себя третью производную  $a'''(t)$  и в длинноволновом приближении достаточно мал. Действительно, компоненты уравнения (2.12) могут оцениваться аналогично (2.2):

$$aa'' \sim (a')^2 \sim \frac{a^2}{t_a^2}, \quad \frac{1}{C} Q''(t) \equiv \frac{1}{C} (a^2 a')'' \sim \frac{a^3}{t_a^3 C} \quad (2.14)$$

а их отношение определяется малым параметром в случае предложенного длинноволнового режима и режима при малом числе Маха во внутренней зоне (около пограничного слоя пузырька):

$$\frac{Q''/C}{aa''} \sim \frac{Q''/C}{Q'/a} \sim \frac{a}{t_a C} \sim \frac{a}{\lambda_a} \sim \frac{a'}{C} \ll 1 \quad \left( \frac{a}{\lambda_a} \equiv \varepsilon_a, \frac{a'}{C} \equiv M_a \right) \quad (2.15)$$

Учитывая соотношения

$$\frac{Q'}{a} \equiv aa'' + 2a'^2, \quad aa'' + \frac{3}{2}a'^2 \equiv \frac{Q'}{a} - \frac{1}{2}a'^2$$

уравнение (2.12) перепишем в виде

$$\frac{Q'}{a} - \frac{1}{2}a'^2 = \frac{p_a(a) - p_{ef}}{\rho} + \frac{1}{C}Q''(t), \quad p_{ef} = p_0 - \frac{2\rho}{C}\Psi_2'' \quad (2.16)$$

Если предположить в соответствии с (2.15), что член  $Q''(t)/C$  мал, то первое уравнение (2.16) существенно упростится:

$$Q' = a \left[ \frac{1}{2}a'^2 + \frac{p_a(a) - p_{ef}}{\rho} \right] (1 + O(\epsilon_a))$$

Дифференцируя это равенство по времени, получим длинноволновое приближение при малых числах Маха для  $Q''(t)/C$

$$\frac{Q''}{C} (1 + O(\epsilon_a)) = \left[ aa'' + \frac{a'^2}{2} + \frac{p_a(a) - p_{ef}}{\rho} \right] \frac{a'}{C} + \frac{a}{C} \frac{d}{dt} \left[ \frac{p_a(a) - p_{ef}}{\rho} \right] \quad (2.17)$$

Компоненты правой части этого уравнения могут оцениваться аналогично (2.14) как первого порядка малости по сравнению с основными членами уравнения (2.12):

$$\left[ aa'' + \frac{a'^2}{2} + \frac{p_a(a) - p_{ef}}{\rho} \right] \frac{a'}{C} \sim \frac{a}{C} \frac{d}{dt} \left[ \frac{p_a(a) - p_{ef}}{\rho} \right] \sim \frac{\Delta p}{\rho} \epsilon_a$$

и неявный остаточный член имеет второй порядок малости по сравнению с основными членами уравнения (2.12):

$$\frac{Q''}{C} O(\epsilon_a) = \frac{\Delta p}{\rho} (\epsilon_a)^2$$

Пренебрегая величинами порядка  $\epsilon_a^2$  по сравнению с единицей (длинноволновый режим и режим малого числа Маха в пограничном слое около пузырька) и подставляя выражение (2.17) в уравнение (2.12), имеем

$$\left(1 - \frac{a'}{C}\right) aa'' + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{a'}{3C}\right) a'^2 = \left(1 + \frac{a'}{C}\right) \frac{p_a(a) - p_{ef}}{\rho} + \frac{a}{C} \frac{d}{dt} \left[ \frac{p_a(a) - p_{ef}}{\rho} \right]$$

В итоге эволюция радиуса пузырька в слабосжимаемой жидкости ( $\epsilon_p \equiv \Delta p/\rho \ll 1$ ), возбуждаемой радиальными перемещениями стенок колбы, в длинноволновом режиме ( $\epsilon_a \equiv a/\lambda_a \ll 1$ ) и при малом числе Маха ( $M_a \equiv a'/C \sim \epsilon_a \ll 1$ ) описывается следующей системой уравнений:

$$aa'' + \frac{3}{2}a'^2 = \frac{p_a(a) - p_{ef}}{\rho} + \frac{a}{C} \frac{d}{dt} \left( \frac{p_a(a) - p_{ef}}{\rho} \right), \quad p_{ef} = p_0 - \frac{2\rho}{C}\Psi_2'' \quad (2.18)$$

$$p_R(t) = p_0 - \frac{\rho}{R} \left[ \Psi_2' \left( t + \frac{R}{C} \right) - \Psi_2' \left( t - \frac{R}{C} \right) - Q' \left( t - \frac{R}{C} \right) \right]$$

Эта система замкнута для данного уравнения состояния газа в пузырьке с поверхностным натяжением  $p_g = p_g(a)$ , начальных условий  $t = 0$ :  $a = a_0$ ,  $a' = a'_0$  и данного возбуждения на стенке колбы, в частности, давления на стенке колбы  $p_R = p_R(t)$ .

В итоге, используя упрощенное выражение (2.17) для  $Q''$  в длинноволновом приближении при малых числах Маха, можно переписать систему уравнений (2.18) в

виде системы дифференциально-разностных уравнений с рекуррентной формулой для  $p_{ef}(t)$ :

$$\begin{aligned}
 aa'' + \frac{3}{2}a'^2 &= \frac{p_a(a) - p_{ef}(t)}{\rho_0} + \frac{a}{C} \frac{d}{dt} \left( \frac{p_a(a) - p_{ef}(t)}{\rho_0} \right) \\
 p_{ef} \left( t + \frac{R}{C} \right) &= p_{ef} \left( t - \frac{R}{C} \right) + \frac{2R}{C} p'_R(t) - \frac{2a}{C} \frac{d}{dt} (p_a(a) - p_{ef}) \Big|_{t-R/C} \\
 p_a(a) &= p_g(a) - \frac{2\Sigma}{a}, \quad p_g(a) = \left( p_0 + \frac{2\Sigma}{a_0} \right) \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Система уравнений (2.19) впервые была предложена [6] для описания медленной (при малых числах Маха) стадии изменения радиуса газового пузырька в экспериментах по сонолюминесценции (колебания пузырька под действием мощного акустического поля, сопровождающиеся свечением газа).

Экспериментальная проверка предложенной модели потребует одновременного измерения как динамики размера газового пузырька, так и величины давления жидкости на стенке колбы.

Следует отметить, что, вообще говоря, сферическая симметрия задачи нарушается за счет сил плавучести. Однако расчеты показывают, что смещение пузырька вверх (всплытие) очень незначительно по сравнению с размером колбы (составляет несколько радиусов пузырька). Вопрос об устойчивости положения пузырька в центре колбы изучен ранее [9].

**3. Амплитудно-частотная характеристика.** Построение амплитудно-частотной характеристики радиальных пульсаций пузырька предполагает линеаризацию системы уравнений (2.19) и получение для синусоидальных возмущений с частотой  $\omega$  зависимости амплитуд возмущения радиуса пузырька и эффективного давления от давления на стенке колбы и частоты.

Линеаризованная система уравнений для возмущений

$$\Delta a = a - a_0, \quad \Delta p_{ef} = p_{ef} - p_0, \quad \Delta p_R = p_R - p_0$$

имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta a''}{a_0} + \delta \frac{\Delta a'}{a_0} + \omega_0^2 \frac{\Delta a}{a_0} &= -\frac{p_0}{\rho_0 a_0^2} \left[ \frac{\Delta p_{ef}}{p_0} + \frac{\Delta a}{a_0} \frac{\Delta p'_{ef}}{p_0} \right] \\
 \frac{\Delta p_{ef}(t + R/C)}{p_0} &= \frac{\Delta p_{ef}(t - R/C)}{p_0} + \frac{2R}{C} \frac{\Delta p'_R(t)}{p_0} + \\
 &+ \frac{2\rho_0 a_0^3 \omega_0^2}{p_0 C} \frac{\Delta a'(t - R/C)}{a_0} + \frac{2a_0}{C} \frac{\Delta p'_{ef}(t - R/C)}{p_0}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\omega_0^2 = \frac{p_0}{\rho_0 a_0^2} [3\gamma + (3\gamma - 1)\sigma], \quad \delta = \omega_0^2 \frac{a_0}{C}, \quad \sigma = \frac{2\Sigma}{p_0 a_0}$$

В предположении синусоидальности возмущений

$$\frac{\Delta p_R(t)}{p_0} = P_R e^{i\omega t}, \quad \frac{\Delta p_{ef}(t)}{p_0} = P_{ef} e^{i\omega t}, \quad \frac{\Delta a(t)}{a_0} = A e^{i\omega t}$$

линеаризованную систему (3.1) можно свести к уравнениям

$$A = -\frac{p_0}{\rho_0 a_0^2} \frac{1 + i\omega a_0 / C}{\omega_0^2 + i\delta\omega - \omega^2} P_{ef}$$

$$P_{ef} \sin\left(\frac{\omega R}{C}\right) = \frac{\omega R}{C} P_R + \frac{a_0 \omega}{C} \exp\left(-\frac{i\omega R}{C}\right) \left(\frac{\rho_0 a_0^2 \omega_0^2}{p_0} A + P_{ef}\right) \quad (3.2)$$

Вводя безразмерные переменные

$$x = \frac{\omega R}{C}, \quad \varepsilon = \frac{a_0}{R}, \quad \Gamma = 3\gamma + (3\gamma - 1)\sigma, \quad E = \frac{\rho_0 C^2}{p_0 \Gamma}$$

и подставляя первое уравнение (3.2) во второе, получим выражения для отношений амплитуд возмущений

$$\frac{A}{P_{ef}} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{1 + i\varepsilon x}{1 + i\varepsilon x - E\varepsilon^2 x^2}$$

$$\frac{P_{ef}}{P_R} = x \left[ \sin x + \exp(-ix) \frac{E\varepsilon^3 x^3}{1 + i\varepsilon x - E\varepsilon^2 x^2} \right]^{-1} \quad (3.3)$$

$$\frac{A}{P_R} = A_R(x) =$$

$$= -\frac{x(1 + i\varepsilon x)}{\Gamma} [(1 + i\varepsilon x - E\varepsilon^2 x^2) \sin x + E\varepsilon^3 x^3 \exp(-ix)]^{-1}$$

Отсюда следует, что абсолютное значение  $A_R$  определяется выражением

$$|A_R| = \frac{x(1 + \varepsilon^2 x^2)^{1/2}}{\Gamma} \times$$

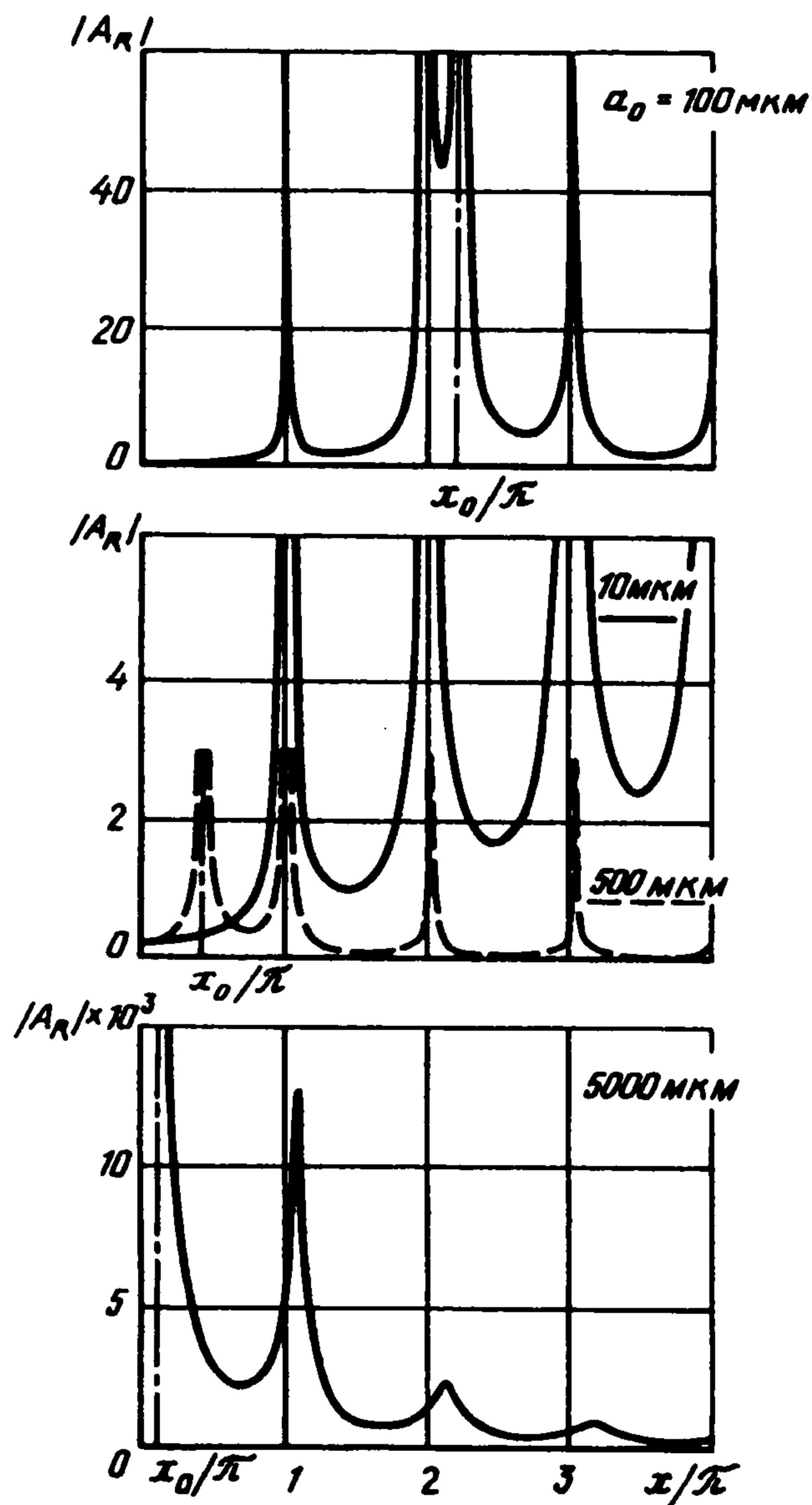
$$\times \{ [E\varepsilon^3 x^3 \cos x + (1 - E\varepsilon^2 x^2) \sin x]^2 + (1 - E\varepsilon^2 x^2)^2 \varepsilon^2 x^2 \sin^2 x \}^{-1/2} \quad (3.4)$$

Видно, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , когда влияние пузырька на динамику жидкости исчезает, решение задачи (3.3) вырождается в решение, соответствующее монохроматической стоячей сферической звуковой волне [7]

$$P_{ef} / P_R = x / \sin x$$

Величина  $P_{ef}$  равна амплитуде давления жидкости в центре колбы. Частоты  $\omega_k = k\pi C/R$  ( $x_k = k\pi$ ), при которых амплитуда давления жидкости в центре колбы стремится к бесконечности, соответствуют случаю "колбового" резонанса. Это означает, что отношение времени распространения волн от стенки колбы до центра и обратно ( $2R/C$ ) к периоду колебаний стенки колбы ( $2\pi/\omega_k$ ) равно целому числу  $k$ .

Типичные амплитудно-частотные функции (функции отклика)  $|A_R|$  (3.4) представлены на фиг. 1 для случая сферической колбы радиуса  $R = 5$  см, заполненной водой ( $C = 1500$  м/с,  $p_0 = 10^5$  Па,  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\Sigma = 0,073$  н/м), с газовым пузырьком ( $\gamma = 1,4$ ) радиуса  $a_0 = 10, 100, 500$  и  $5000$  мкм, помещенным в центр колбы. Первый "колбовый" резонанс соответствует частоте  $\omega_1 = 94,2$  кГц.



Фиг. 1

колбы, давление на стенке которой изменяется по заданному закону. В переменных Лагранжа  $(r_0, t)$  система (1.4) выглядит следующим образом:

$$\frac{\rho_0}{\rho} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{\partial r}{\partial r_0} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial r_0} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = w, \quad p = p(\rho) \quad (4.1)$$

Граничные и начальные условия имеют вид

$$p(R, t) = p_R(t), \quad p(a_0, t) = p_g(a) - 2\Sigma/a \quad (4.2)$$

$$r|_{t=0} = r_0, \quad p|_{t=0} = p_0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0, \quad w|_{t=0} = 0$$

Здесь  $\rho_0$  — плотность жидкости при давлении  $p_0$ ,  $r_0$  — лагранжева координата частиц жидкости, причем начало координат выбрано в центре пузырька и в начальный момент времени лагранжевы координаты совпадают с эйлеровыми. В качестве уравнения состояния жидкости (последнее уравнение (4.1)) можно использовать уравнение в акустическом приближении

$$p = p_0 + C^2(\rho - \rho_0) \quad (4.3)$$

Уравнение состояния газа принимается в виде

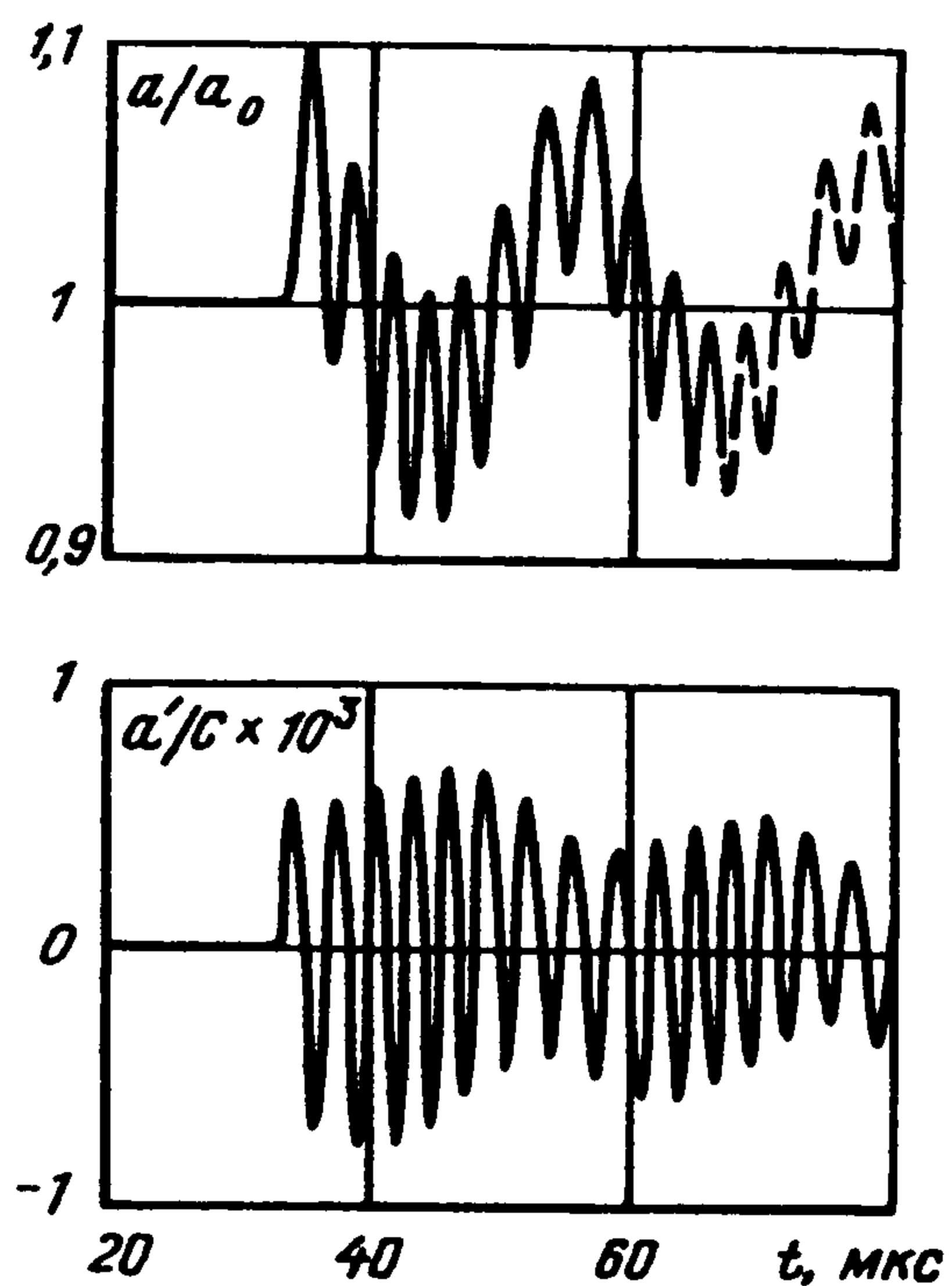
$$p_g(a) = \left(p_0 + \frac{2\Sigma}{a_0}\right) \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma} \quad (4.4)$$

Для мелких пузырьков, радиус которых очень мал по сравнению с радиусом колбы ( $\epsilon \ll 1$ ), резонанс (максимум  $|A_R|$ ) имеет место при  $\sin x \approx 0$ , или когда  $x \approx x_k = k\pi$ . Таким образом, пузырек практически не влияет на величину резонансной частоты. Влияние пузырька на резонансную частоту имеет место только тогда, когда частота колебаний колбы сравнима с резонансной частотой пузырька  $\omega_0$  (см. кривые для  $a_0 = 100$  мкм).

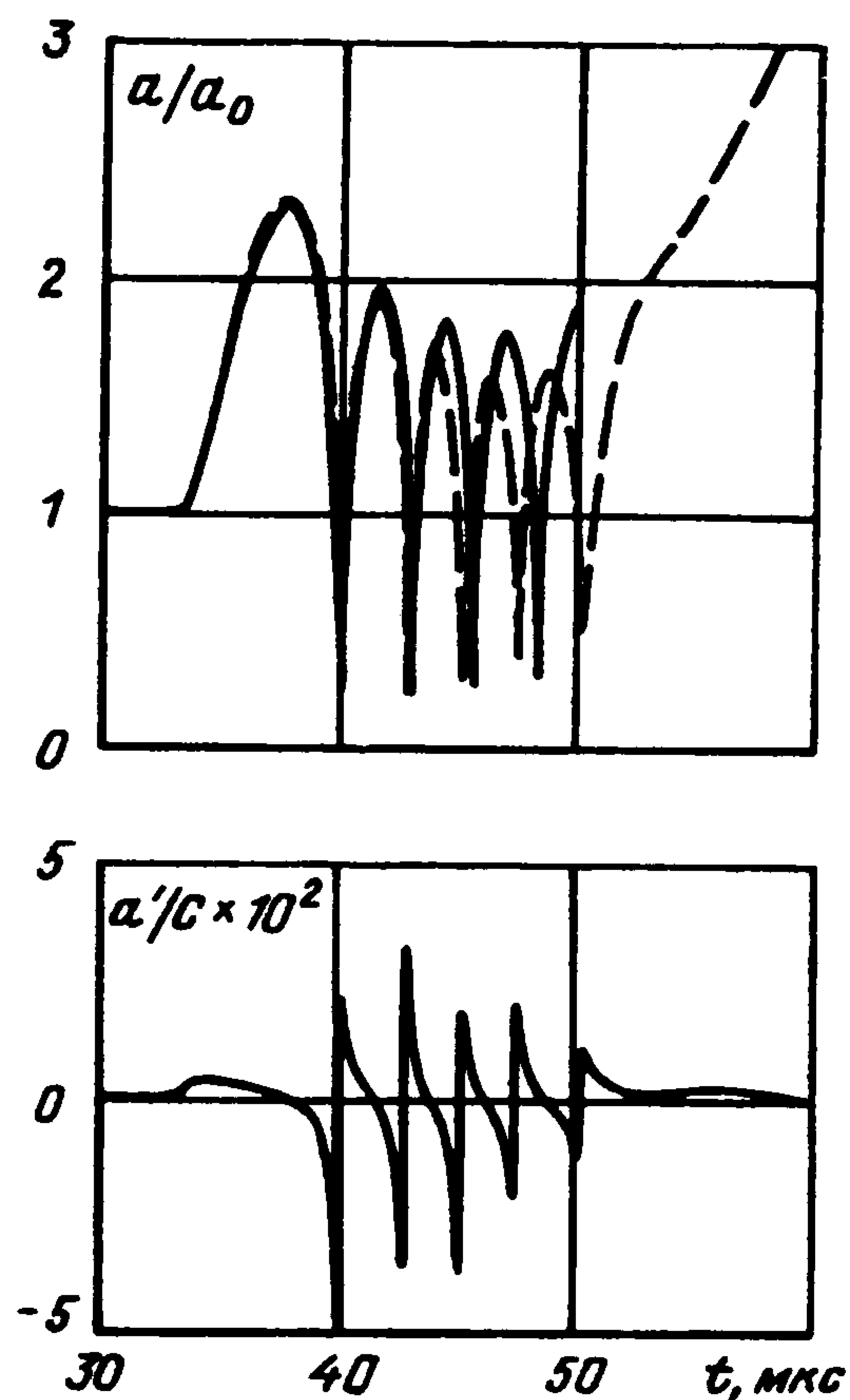
Примечательно, что вне зоны пузырькового резонанса чем меньше размер пузырька, тем выше значение функции отклика  $|A_R|$  (см. соответствующие кривые для  $a_0 = 10$  мкм и 500 мкм).

Для пузырьков достаточно большого радиуса, но все еще значительно меньших размера колбы, параметр  $\epsilon$  может оказывать существенное влияние на вид функции отклика, как на значения резонансных частот (они могут существенно отличаться от частот колбового резонанса), так и на величину функции отклика в области резонанса (случай  $a_0 = 5000$  мкм).

**4. Численное исследование полной системы уравнений.** Рассмотрим задачу (1.4), (1.5) о радиальных движениях сжимаемой жидкости вокруг газового пузырька, находящегося в центре



Фиг. 2



Фиг. 3

что соответствует адиабатическому поведению пузырька. Давление на границе  $R$  меняется по синусоидальному закону

$$p_R(t) = p_0(1 - P_R \sin \omega t) \quad (4.5)$$

Для удобства численного интегрирования задача была приведена к безразмерному виду (при  $\Sigma = 0$ )

$$V = \frac{\partial r^3}{\partial \bar{r}_0^3}, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = -\left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial \bar{r}_0}, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial \tau} = \bar{w}, \quad \bar{p} = 1 + \frac{C^2}{p_0 \rho_0} \left(\frac{1}{V} - 1\right)$$

$$\bar{p}\left(\frac{R}{a_0}, \tau\right) = p_R(\tau), \quad \bar{p}(1, \tau) = \bar{r}^{-3\gamma}(1, \tau)$$

$$\bar{r}|_{\tau=0} = \bar{r}_0, \quad \bar{p}|_{\tau=0} = 1, \quad \bar{w}|_{\tau=0} = 0, \quad V|_{\tau=0} = 1$$

где

$$V = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a_0}, \quad \bar{r}_0 = \frac{r_0}{a_0}, \quad \bar{w} = \frac{w}{C_*}, \quad \tau = \frac{C_*}{a_0} t \left(C_*^2 = \frac{p_0}{\rho_0}\right)$$

– безразмерные переменные.

На фиг. 2, 3 представлены результаты расчетов по разностной схеме [8] (сплошные линии) и по предложенной системе конечно-разностных дифференциальных уравнений (2.19) (штриховые линии) при  $a_0 = 10$  мкм,  $R = 5$  см,  $p_0 = 10^5$  Па,  $r_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $C = 1500$  м/с,  $\omega = \omega_3 = 2\pi \cdot 45$  кГц. Сравнение проводилось для зависимости радиуса пузырька от времени. При этом контролировалось число Маха по скорости стенки пузырька. Из представленных графиков видно, что для малых амплитуд "колбового" давления ( $P_R = 0.01$ , фиг. 3) числа Маха очень малы ( $|M| < 0.001$ ) и предложенная модель (2.19) дает практически точное совпадение с решением полной системы. С увеличением амплитуды внешнего давления в шесть раз ( $P_R = 0.06$ ) числа Маха возрастают в пятьдесят раз ( $|M| \approx 0.05$ ) и приближенное решение отходит от точного.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Lord Rayleigh*. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. // *Phil. Mag.* 1917. V. 34. № 200. P. 94–98.
2. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge Univ. Press, 1924. 687 p. = *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука. 1987. Т. 1, 464 с. = *Nigmatulin R.I.* Dynamics of multiphase media. Washington: Hemisphere. 1990. V. 1. 536 p.
4. *Knapp, R.T., Daily, J.W., Hammitt, F.G.* Cavitation New York: McGraw-Hill, 1970. 578 p. = *Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф.* Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
5. *Prosperetti A., Lezzi A.* Bubble dynamics in a compressible liquid. Pt 1. First-order theory. // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 168. P. 457–478.
6. *Нигматулин Р.И., Ахатов И.Ш., Вахитова Н.К.* О сжимаемости жидкости в динамике газового пузырька // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 6. С. 768–771.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
8. *Brode H.L.* Point source explosion in air // Research Memorandum RM 1824-AEC, RAND Corporation, Santa Monica, California, 1956. = *Брод Г.* Расчеты взрывов на ЭВМ. М.: Мир, 1976. 271 с.
9. *Akhatov I., Mettin R., Ohl C.D., Parlitz U., Lauterborn W.* Bjerknes force threshold for stable single bubble sonoluminescence // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 55. № 3B. P. 3747–3750.

Уфа

Поступила в редакцию  
29.XI.1996