

УДК 533.6.011

© 1997 г. А.И. Рылов

О НОВЫХ СВОЙСТВАХ ЭЛЛИПСА БУЗЕМАНА

Рассматривается комбинация эллипса Буземана, вписанной окружности единичного радиуса и окружности с тем же центром, радиус которой равен $\sqrt{2}$. Для сверхзвуковых плоских потенциальных течений газа показано, что при движении вдоль произвольной характеристики значения углов наклона вектора скорости, рассматриваемой характеристики и характеристики другого семейства с точностью до несущественных постоянных сомножителей и слагаемых, равны соответственно разности значений площадей эллиптического и кругового ($R = 1$) секторов, разности значений площадей эллиптического и кругового ($R = \sqrt{2}$) секторов, площади эллиптического сектора. При этом прямолинейные стороны секторов образованы малой полуосью эллипса и радиус-вектором, который отвечает рассматриваемой скорости. Указано на очевидную аналогию с одним из законов Кеплера. Отмечено, что наличие точки пересечения эллипса и второй из рассмотренных окружностей иллюстрирует известный результат С.А. Христиановича о точках перегиба характеристик с монотонным распределением скорости. Показано, как комбинация эллипса и вписанной окружности иллюстрирует упрощение условий совместности и уравнения Дарбу для транс- и гиперзвуковых течений.

1. Рассмотрим сверхзвуковые плоские потенциальные течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа с показателем адиабаты κ . Как известно [1–3], эллипс Буземана (фиг. 1) дает графическое представление зависимости приведенной скорости λ от угла Маха α . На фиг. 1 значению λ отвечает модуль радиус-вектора oL , угол α отсчитывается от большой полуоси по часовой стрелке. Здесь и далее $\lambda = q/c_*$, q – модуль вектора скорости, c – скорость звука, c_* – критическая скорость, $M = q/c = 1/\sin \alpha$ – число Маха. При этих обозначениях большая и малая полуоси соответственно равны: $od = k = \sqrt{(\kappa + 1)/(\kappa - 1)}$, $oc = 1$. Отметим также, что использование дополнительной вертикали, параллельной большой полуоси и проходящей через точку c (фиг. 1), дает наглядную информацию о соотношении между приведенной скоростью, числом Маха и значением $m = \sqrt{M^2 - 1}$, которым на фиг. 1 отвечают соответственно отрезки oL , oM , cM .

Но свойства эллипса Буземана далеко не исчерпываются приведенными фактами. Как оказывается, комбинация данного эллипса с двумя окружностями, радиусы которых равны 1 и $\sqrt{2}$, а центры совпадают с центром эллипса (фиг. 2), дает наглядную информацию о зависимости углов наклона вектора скорости θ и характеристик первого ($\mu^+ = \theta + \alpha$) и второго ($\mu^- = \theta - \alpha$) семейств от α , λ , M и друг от друга при движении вдоль произвольной характеристики первого или второго семейства.

Далее удобнее использовать функции $h(M)$, $f(M)$ и $g(M)$, через которые углы θ , μ^+ и μ^- на характеристиках соответственно первого и второго семейства выражаются следующим образом:

$$\theta = \theta_c + h(M), \quad \mu^+ = \theta_c + \frac{\pi}{2} + g(M), \quad \mu^- = \theta_c - \frac{\pi}{2} + f(M)$$

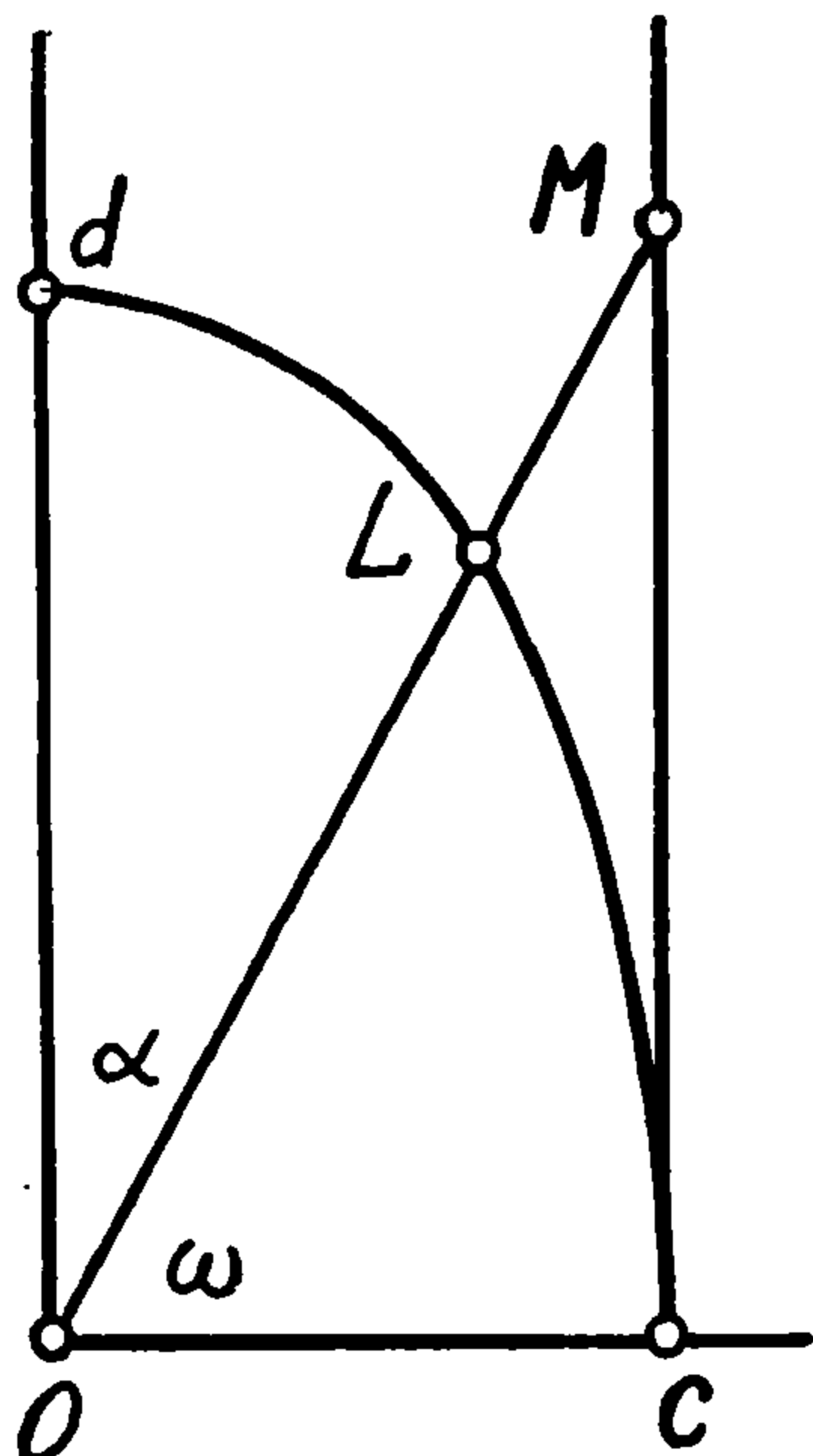
$$\theta = \theta_c - h(M), \quad \mu^+ = \theta_c + \frac{\pi}{2} - f(M), \quad \mu^- = \theta_c - \frac{\pi}{2} - g(M)$$

где θ_c – значение θ в звуковой точке рассматриваемой характеристики, а сами функции с использованием введенного выше отношения полуосей эллипса Буземана k записываются так:

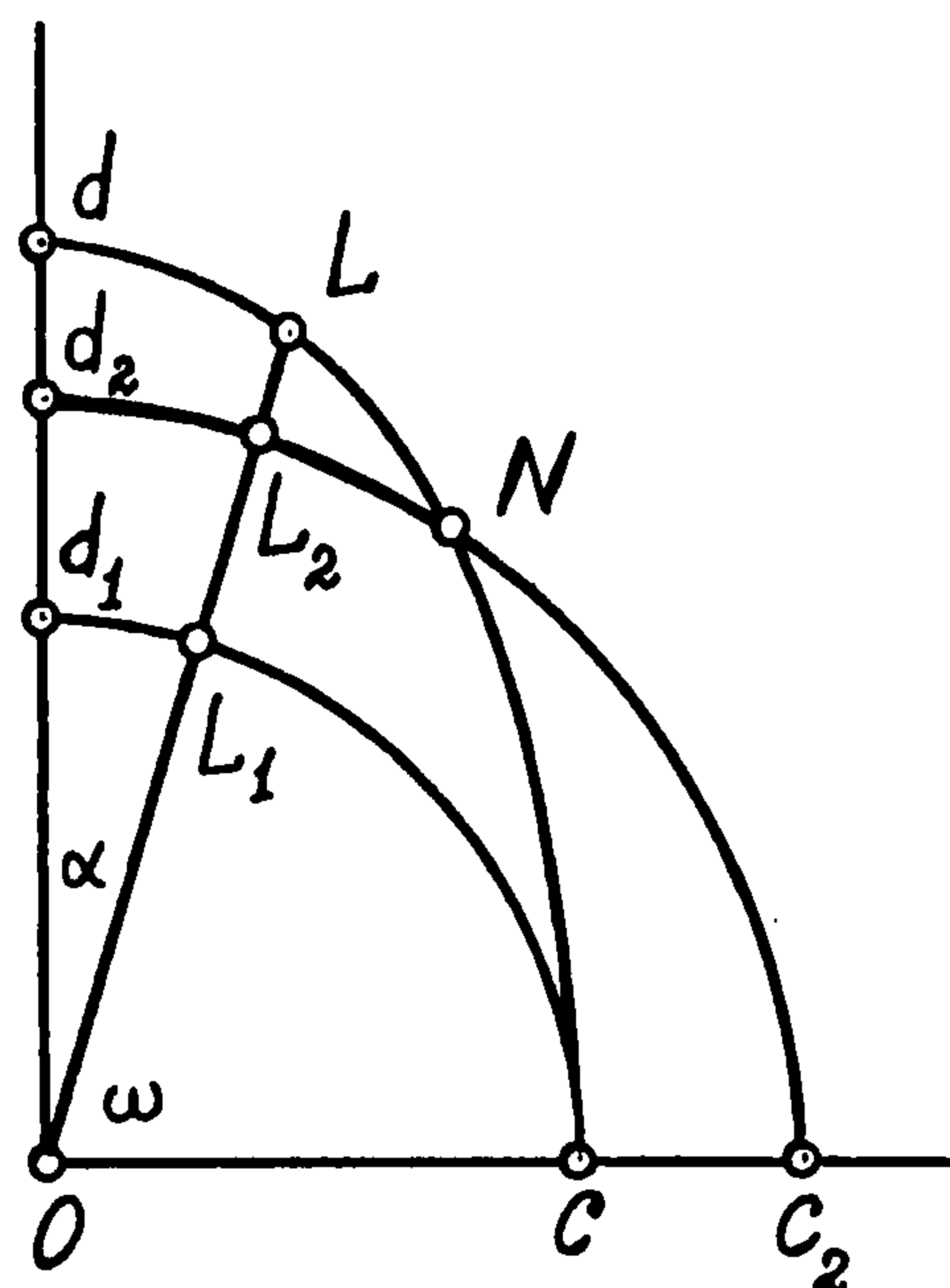
$$h(M) = k \operatorname{arctg}(k^{-1} \sqrt{M^2 - 1}) - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}$$

$$f(M) = h(M) + \omega, \quad g(M) = h(M) - \omega, \quad \omega = \pi/2 - \alpha$$

Рассмотрим также эллиптический и два круговых сектора, образованных малой полуосью oc и ее продолжением (фиг. 2), радиус-вектором oL и его продолжением и дугами эллипса (сектор Loc с площадью s) и окружностей $R = 1$ (сектор L_1oc с площадью s_1) и $R = \sqrt{2}$ (сектор L_2oc_2 с площадью s_2).



Фиг. 1



Фиг. 2

Теорема. Функции $h(M)$, $f(M)$ и $g(M)$ следующим образом выражаются через значения площадей отмеченных выше секторов:

$$h(M) = 2(s - s_1), \quad f(M) = 2s, \quad g(M) = 2(s - s_2)$$

Иными словами, функции $h(M)$ отвечает удвоенная площадь криволинейного треугольника LcL_1 , функции $f(M)$ – удвоенная площадь эллиптического сектора Loc , функции $g(M)$ – удвоенная разность площадей криволинейных треугольников LNL_2 и cNc_2 при $\lambda > \sqrt{2}$ и удвоенная отрицательная площадь криволинейного четырехугольника LL_2c_2c при $\lambda \leq \sqrt{2}$, когда oL проходит ниже точки N , в том числе и тогда, когда точка d_2 совпадает с точкой d или расположена ниже нее. Последнее имеет место при $\kappa \geq 3$.

Доказательство. Помимо плоскости эллипса рассмотрим плоскость w , проходящую через малую полуось эллипса и составляющую с плоскостью эллипса угол φ , для которого $\cos \varphi = k^{-1}$. При таком выборе φ проекцией эллипса на плоскость w является круг единичного радиуса, а проекцией эллиптического сектора Loc – круговой сектор с

углом β и с площадью s_w , такими, что $\operatorname{tg} \beta = k^{-1} \operatorname{tg} \omega$, $s_u = \beta / 2 = k^{-1} s$. Отсюда следует, что $2s = k \operatorname{arctg} (k^{-1} \operatorname{tg} \omega)$. Учитывая, что $\omega = \pi / 2 - \alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}$, $2s_1 = \omega$, а также формулу для $h(M)$, окончательно получим $h(M) = 2(s - s_1)$, что и доказывает первое из утверждений теоремы. С учетом определения функций $f(M)$ и $g(M)$ и равенства $s_2 = 2s_1$ легко доказываются и два оставшихся утверждения.

Отметим некоторые следствия теоремы.

1°. Уместно указать на аналогию с одним из законов Кеплера, в основе которого также лежит анализ изменения площади некоторой секториальной вырезки из эллипса, с той лишь разницей, что в законе Кеплера фокус сектора совпадает с фокусом эллипса [4]. Для более глубокой аналогии с законом Кеплера первое, самое существенное из соотношений теоремы может быть переформулировано так: при движении вдоль произвольной характеристики равным приращениям угла наклона вектора скорости θ отвечают равные приращения площадей криволинейных четырехугольников, ограниченных дугами эллипса Буземана и вписанной окружности и соответствующими радиус-векторами.

2°. Из первого соотношения теоремы следует выражение для приращений $d\theta = \mp(\lambda^2 - 1)d\alpha$, вычисленных вдоль характеристики, которое, очевидно, эквивалентно более известному выражению $d\theta = \pm\sqrt{M^2 - 1} d \ln \lambda$ [1-3, 5, 6]. Здесь и далее верхний (нижний) знак относится к характеристике первого (второго) семейства.

3°. Третье соотношение теоремы наглядно иллюстрирует и уточняет результат [3, 5], говорящий о том, что при движении вдоль любой характеристики производная от угла ее наклона $d(\theta \pm \alpha)/d\lambda$ обращается в нуль и меняет знак при $\lambda = \sqrt{2}$, при этом в дополнение к [3, 5] отметим, что последнее равенство не зависит от κ в отличие от соответствующего равенства для $M = 2/\sqrt{3-\kappa}$ [3, 5]. Естественно, сказанное имеет смысл лишь при $\kappa < 3$, когда существуют точки пересечения эллипса Буземана и окружности $R = \sqrt{2}$.

2. Рассмотрим связь геометрии эллипса Буземана с упрощениями условий совместности и уравнения Дарбу в обоих предельных случаях, при $\omega = \pi/2 - \alpha \ll 1$ и при $\alpha \ll 1$. Действительно, как показано выше, значение s_c площади криволинейного треугольника LcL_1 прямо связано с функцией $h(M)$, а именно: $h(M) = 2s_c$. В свою очередь из того, что дуги эллипса и окружности, касающиеся в точке c , являются кривыми второго порядка, следует, что при $\omega \ll 1$ $s_c \sim \omega^3$ и после простых геометрических вычислений при $\omega \ll 1$ получаем следующие равноправные формы записи условий совместности:

$$\theta \mp h(M) = \theta \mp 2s_c = \theta \mp \frac{2}{3} \frac{\omega^3}{\kappa + 1} = \theta \mp \frac{2}{3} \frac{(M^2 - 1)^{3/2}}{\kappa + 1} = \text{const} \quad (2.1)$$

Последние из соотношений (2.1) известны как условия совместности трансзвуковых течений [7].

Во втором предельном случае при $\alpha \ll 1$ для записи условий совместности целесообразно использовать значение площади s_d криволинейного четырехугольника dLL_1d_1 , заключенного между радиус-вектором, дугами эллипса и вписанной окружности и большой полуосью. Сразу видно, что $s_\alpha = \alpha/(\kappa - 1)$ при $\alpha \ll 1$, отсюда следует такая цепочка равноправных условий совместности для $\alpha \ll 1$

$$\theta \mp (h(M) - h(\infty)) = \theta \pm 2s_d = \theta \pm \frac{2\alpha}{\kappa - 1} = \theta \pm \frac{2}{M(\kappa - 1)} = \text{const} \quad (2.2)$$

Последние из соотношений (2.2) хорошо известны в теории гиперзвуковых течений [6].

Рассмотрим уравнение Дарбу для функции тока ψ на плоскости инвариантов Римана $\xi = \theta - h(M)$, $\eta = \theta + h(M)$, справедливое для сверхзвуковых плоских потенциальных течений

$$\psi_{\eta\xi} - G(\eta - \xi)(\psi_{\eta} - \psi_{\xi}) = 0, \quad G = \frac{M^4(\kappa + 1)}{8(M^2 - 1)^{3/2}} \quad (2.3)$$

Как оказывается, соотношения (2.1) и (2.2) и, в частности, асимптотические выражения для s_c при $\omega \ll 1$ и s_d при $\alpha \ll 1$ полезны для наглядной иллюстрации упрощений уравнения (2.3) при $\omega \ll 1$ и при $\alpha \ll 1$. Действительно, из (2.3) видно, что функция G обратно пропорциональна значениям s_c при $\omega \ll 1$ и s_d при $\alpha \ll 1$. В свою очередь при надлежащем выборе инвариантов Римана и s_c и s_d прямо пропорциональны их разности.

После простых вычислений при $\omega \ll 1$ имеем выражения для уравнения (2.3) и для инвариантов Римана

$$\psi_{\eta\xi} - \frac{1}{24s_c}(\psi_{\eta} - \psi_{\xi}) = \psi_{\eta\xi} - \frac{1}{6(\eta - \xi)}(\psi_{\eta} - \psi_{\xi}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\xi = \theta - 2s_c = \theta - \frac{2(M^2 - 1)^{3/2}}{3(\kappa + 1)}, \quad \eta = \theta + 2s_c = \theta + \frac{2(M^2 - 1)^{3/2}}{3(\kappa + 1)}$$

Второе из уравнений (2.4) известно как уравнение Эйлера–Трикоми для трансзвуковых течений [7].

Для $\alpha \ll 1$ в качестве инвариантов Римана, согласно (2.2), целесообразно взять ε и δ , задаваемые формулами

$$\varepsilon = \theta + 2s_d = \theta + \frac{2\alpha}{\kappa - 1}, \quad \delta = \theta - 2s_d = \theta - \frac{2\alpha}{\kappa - 1}$$

после чего уравнение (2.3) записывается так:

$$\psi_{\delta\varepsilon} - \frac{\kappa + 1}{8(\kappa - 1)s_d}(\psi_{\delta} - \psi_{\varepsilon}) = \psi_{\delta\varepsilon} + \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)(\delta - \varepsilon)}(\psi_{\delta} - \psi_{\varepsilon}) = 0 \quad (2.5)$$

Другим способом второе из уравнений (2.5) впервые было получено в [8].

И наконец выпишем уравнения (2.4) и (2.5) с использованием в качестве переменных соответственно $\theta, s = s_c$ и $\theta, z = s_d$

$$\psi_{\theta\theta} - \frac{1}{4}\psi_{ss} - \frac{1}{12s}\psi_s = 0 \quad (\omega \ll 1)$$

$$\psi_{\theta\theta} - \frac{1}{4}\psi_{zz} + \frac{\kappa + 1}{4(\kappa - 1)z}\psi_z = 0 \quad (\alpha \ll 1)$$

Сравнение этих уравнений говорит о том, что при подходе к звуковой линии

($s_c = s \rightarrow 0$) и к линии вакуума ($s_d = z \rightarrow 0$) характер особенностей существенно разный. С использованием других уравнений это отмечалось ранее [9].

Автор благодарит Т.В. и Ю.М. Вахромеевых, обсуждение с которыми ряда вычислительных аспектов закона Кеплера инициировали выполнение данной работы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (95-01-00958).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Busemann A.* Gasdynamik // Handbuch der experimentalphysik V. 4.1. Leipzig: Akad. Verlag, 1931. P. 341–460.
2. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 588 с.
3. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидродинамика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Краткий курс теоретической физики. Кн. 1. Механика. Электродинамика. М.: Наука, 1969. 271 с.
5. *Христианович С.А.* О сверхзвуковых течениях газа // Тр. ЦАГИ. 1941. № 543. 70 с.
6. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
7. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947. 192 с.
8. *Фалькович С.В.* Плоское движение газа при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 4. С. 459–464.
9. *Ладыженский М.Д.* О течениях газа с большой сверхзвуковой скоростью // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 2. С. 296–299.

Новосибирск

Поступила в редакцию
20.IX. 1996