

УДК 533.6.011

© 1997 г. А.Н. Крайко, Д.Е. Пудовиков

**О ПОСТРОЕНИИ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОФИЛЕЙ,
ОПТИМАЛЬНЫХ В СВЕРХ- И ГИПЕРЗВУКОВОМ
ПОТОКЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ
ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ**

Развит простой и точный подход к построению симметричных профилей, оптимальных при обтекании сверх- и гиперзвуковым потоком с присоединенным скачком. Кроме габаритных ограничений оптимизируемые тела могут удовлетворять произвольным изопериметрическим условиям. Развитый подход опирается на модификацию метода "скачок – волна разрежения" ("shock-expansion method" – SEM). Модифицированный SEM – MSEM в отличие от SEM не приводит к физически бессмысленному результату – конечному изменению параметров течения при изменении наклона контура только в передней точке тела. Это делает MSEM пригодным к решению двумерных вариационных задач газовой динамики, сводя любую из них к некоторому обобщению задачи Лагранжа для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Возможности развитого подхода иллюстрируются примерами профилей, реализующих минимум коэффициента волнового сопротивления C_x . Профили, построенные в рамках MSEM, сравнивались с получающимися в рамках ньютоновской модели и линейной теории и с клиньями, а C_x , найденные для них по указанным приближенным моделям и по MSEM, – с результатами численного интегрирования уравнений Эйлера.

Число вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики, решенных точно даже в приближении идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа, невелико. Это – плоские и осесимметричные задачи, допускающие переход к контрольному контуру (КК). Для профилей из силовых характеристик, оптимизируемых или задаваемых в качестве изопериметрических условий, через КК выражаются волновое сопротивление, подъемная сила, качество и момент сил давления. Из геометрических условий перенос на КК допускают лишь ограничения на габариты. Кроме возможности переноса на КК условий задачи и оптимизируемого функционала для применения метода контрольного контура (МКК) необходима гладкость искомым образующих. К сожалению, почти всегда оптимальные образующие тел, обтекаемых с присоединенной ударной волной, имеют внутренние изломы [1].

Есть два способа преодоления перечисленных ограничений. Первый предполагает лобовое применение не прямых и прямых методов вариационного исчисления в приближении уравнений течения идеального газа, уравнений Навье – Стокса и т.п. В подобной точной постановке не прямые методы, будучи полезными при установлении структуры оптимальных конфигураций, вряд ли смогут стать рабочим инструментом решения широкого круга вариационных задач газовой динамики. Прямые методы, особенно те, в которых сопряженная задача непрямого метода используется как "ускоритель" поиска оптимума, уже сейчас демонстрируют свои возможности при построении профилей, крыльев и комбинации крыло – фюзеляж, оптимальных в околозвуковом потоке [2–6].

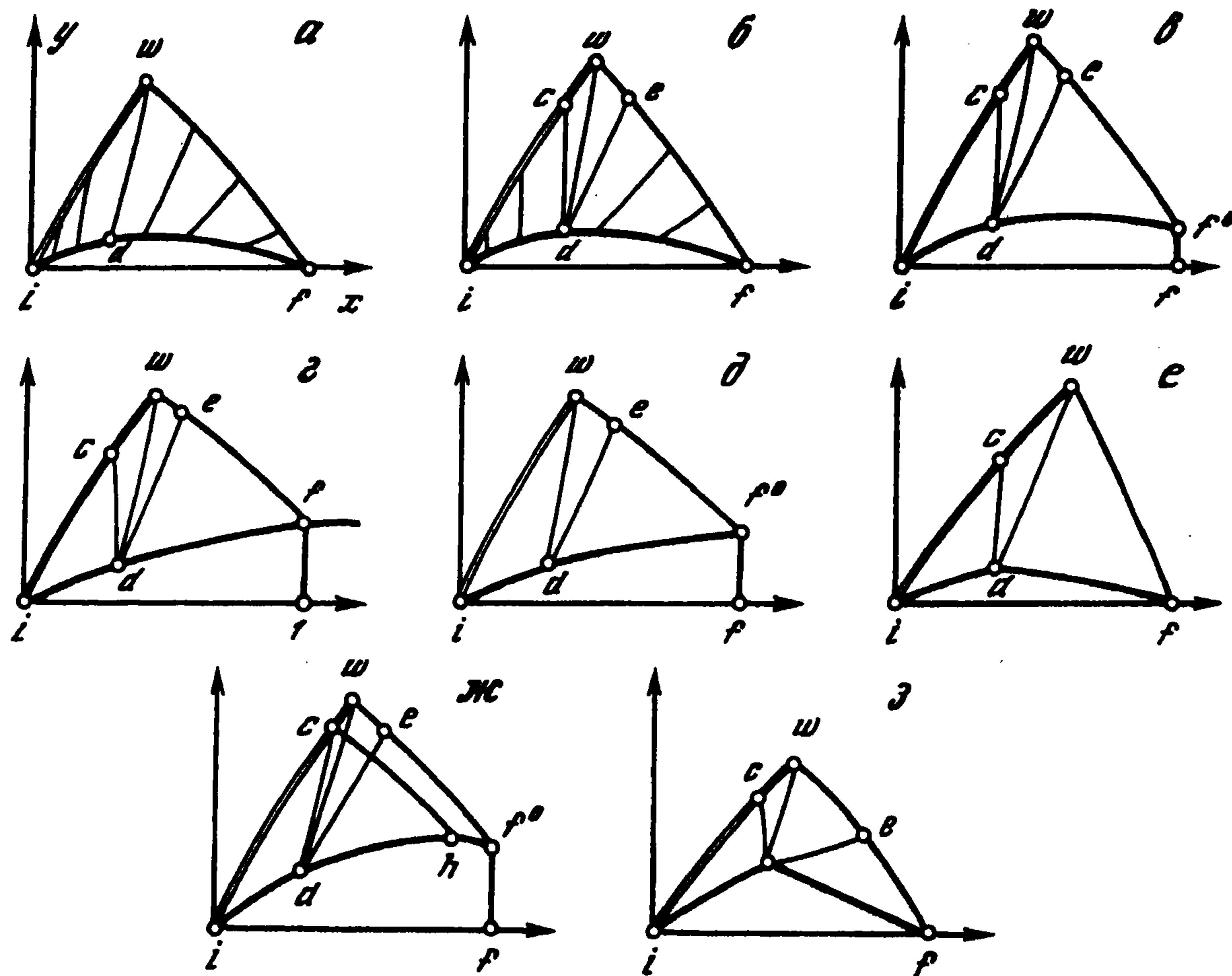
В сверхзвуковой газовой динамике прямые методы не получили широкого распространения в силу двух обстоятельств. Во-первых, в них требуется многократный расчет обтекания целого семейства неоптимальных образующих. Поэтому затраты на построение оптимальных плоских и осесимметричных тел в задачах, допускающих переход к КК в прямых методах намного больше, чем при использовании алгоритмов, основанных на МКК

[7]. Во-вторых, эти затраты еще более возрастают, если не учитываются особенности рассчитываемых течений, например, если расчет сверхзвукового потока ведется не "маршем", а "псевдоустановлением". Из-за этого в [8] сверхзвуковой контур плоского несимметричного сопла максимальной тяги строится за час работы центрального процессора суперкомпьютера Cray Y-MP. В рамках МКК та же задача решается на PC-AT 486 за доли минуты.

В более сложных вариационных задачах сверхзвуковой газовой динамики, не допускающих перехода к КК, применению прямых методов необходимо предпослать анализ структуры оптимальной конфигурации, в чем наряду с непрямими методами особую роль играют различные приближенные модели. Для сверхзвуковых течений модели подобного типа [9, 10] дают давление на поверхности тела как функцию угла между нормалью к ней и вектором скорости набегающего потока. Использование таких "локальных" моделей сводит задачи построения оптимальных плоских и осесимметричных тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком, к задаче Лагранжа для систем, управляемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Локальные модели сформировали второй способ постановки и решения вариационных задач именно сверхзвуковой газовой динамики, ибо для до- и околозвуковых течений столь же простых моделей нет. Главный недостаток локальных подходов – ограниченные диапазоны чисел Маха набегающего потока M_∞ , при которых они дают близкие к точным значения параметров (в первую очередь, давления) на обтекаемом теле. Так, погрешности линейной теории быстро растут с ростом M_∞ и относительной толщины тела τ . Погрешность формулы Ньютона растет с уменьшением M_∞ и τ , оставаясь, однако, конечной и при $M_\infty \rightarrow \infty$.

Достоверность локальных моделей нельзя подтвердить, не выходя за их рамки. Последнее верно и тогда, когда разные локальные модели дают одинаковые образующие. Например, в задаче о головной части профиля минимального волнового сопротивления по формуле Ньютона (при $\tau \leq 1$), и по линейной теории умеренных сверхзвуковых скоростей оптимальная образующая – прямая ("клин"), причем для любых $M_\infty > 1$. Для той же задачи в рамках уравнений Эйлера оптимальная образующая также близка к прямой [1, 11–15], правда, теперь – только при $\tau < \tau^m$, где $\tau^m = \tau^m(M_\infty)$ – толщина клина, для которой число Маха за скачком равно единице. Если коэффициент отражения возмущений давления от головного скачка равен нулю [1, 11–15], а также при $\tau = \tau^m$ [15] прямолинейная образующая дает решение и в точной постановке. Другой пример удивительной работоспособности формулы Ньютона – обтекаемые с присоединенным скачком оптимальные обечайки тел вращения с протоком. Здесь обечайки, найденные в рамках уравнений Эйлера, во всех рассчитанных в [16] примерах в пределах лишь нескольких процентов по C_x лучше обечайек, построенных в ньютоновском приближении, причем для разных M_∞ , включая $M_\infty \approx 1,5$, когда значения C_x , найденные по формуле Ньютона, отличались от точных в несколько раз. Других вариационных задач аэродинамики сверхзвуковых течений, решенных в точной или близкой к точной (как в [15, 16]) постановке, до сих пор не было. По-видимому, из-за этого на отмеченную выше работоспособность модели Ньютона не обращалось должного внимания.

В свете сказанного трудно переоценить роль таких приближенных моделей, которые дали бы возможность с высокой точностью решать различные вариационные задачи газовой динамики без интегрирования уравнений Эйлера и т.п. Даже при применимости, например, только к плоским конфигурациям, обтекаемым равномерным сверхзвуковым потоком, они, помимо прочего, позволят продолжить тестирование локальных моделей, не ограниченных столь узкими рамками. Самый естественный претендент на подобную роль – метод "скачок – волна разрежения" (SEM). Хотя первая попытка его применения для построения оптимальных профилей была провозглашена еще в [17], он непригоден для этого. Дело в том, что в SEM давление на профиле, обтекаемом с присоединенным скачком, зависит от углов ϑ и ϑ_i наклона касательной соответственно в рассматриваемой и в передней точке i его образующей. Здесь и далее индексы i, \dots и ∞ метят параметры в точках i, \dots и в набегающем потоке. В вариационных задачах зависимость давления на профиле от ϑ_i приводит к физически бессмысленному результату – конечному изменению C_x при изменении наклона контура только в его передней точке. Автор работы [17], по-видимому, понимая абсурдность этого, при получении необходимых условий оптимальности не включал в выражение для приращения C_x внеинтегральный член, пропорциональный вариации ϑ_i . Такой выход из положения нельзя признать правильным.



Фиг 1.

Ниже предложен лишенный отмеченного порока модифицированный SEM – MSEM. Он сводит вариационные задачи построения профилей, обтекаемых сверхзвуковым потоком с присоединенным головным скачком, к некоторой обобщенной задаче Лагранжа для систем, управляемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Несмотря на это, получающаяся в MSEM краевая задача построения оптимальной образующей все еще достаточно сложна. Дальнейшее упрощение достигается разбиением ее решения на два этапа. На первом из них не учитывается "главный" излом искомого контура. Излом вводится на втором этапе с помощью процедуры, эквивалентной, но более простой, чем развитая в [15] при построении головных частей профилей заданных габаритов.

1. Модифицированный "shock-expansion method" (MSEM) и формулировка вариационной задачи. Распределение параметров на обтекаемой сверхзвуковым потоком образующей if зависит от формы только начального участка iw головного скачка. В свою очередь форма iw определяется формой начального участка id образующей тела, как показано на фиг. 1, *a* и *б*. На фиг. 1, *a* участок if гладкий, а на фиг. 1, *б* имеет излом в точке d . Образующая тела на фиг. 1 нарисована жирной линией, ударная волна – двойной, а C^+ и C^- -характеристики – тонкими линиями. Ось x декартовых координат xu направлена по вектору скорости набегающего потока V_∞ . Начало координат совмещено с точкой i . Если d – точка излома контура, то параметры на теле слева и справа от нее метятся индексами " d^- " и " d^+ " соответственно.

В SEM [13, 18–20] при определении параметров на if угол σ наклона скачка к оси x берется постоянным и равным его наклону в точке i . Благодаря этому течение за скачком – простая волна с прямолинейными C^+ -характеристиками, а любой параметр потока ω на теле в точке с наклоном ϑ касательной к оси x – функция ϑ и σ_i

$$\omega = \omega(\vartheta, \sigma_i) \quad (1.1)$$

Разумеется, SEM позволяет строить криволинейную ударную волну, однако ее криволинейность не влияет на распределения параметров на if и в ifw . Если K_σ и K_ϑ – кривизны

скачка и линии тока за ним, то [18] $K_\sigma = kK_\vartheta$ с коэффициентом k , который зависит от параметров набегающего потока и числа Маха M за скачком, т.е. от его интенсивности. Оставаясь всегда положительным, коэффициент k быстро растет и превышает единицу только в малой окрестности $M = 1$. Поэтому для выпуклых тел кривизна скачка на iw , как правило, меньше кривизны тела на id . Ведь для таких тел кривизна линий тока с удалением от тела убывает (по модулю). Например, на фиг. 1, б при конечных K_ϑ в окрестности точки w в самом изломе $K_\vartheta = -\infty$. Для вогнутых образующих рост K_ϑ с удалением от тела может компенсировать малость коэффициента k . Однако и для них, если дело не доходит до "градиентных катастроф" с образованием интенсивных вторичных скачков, угол наклона скачка iw будет меняться сильно только тогда, когда на id сильно изменяется ϑ . В прямых задачах обтекаемые тела не отличаются подобной "патологией". Поэтому для них SEM дает достаточно точные результаты.

Для образующих, получающихся в вариационных задачах, в силу зависимости в (1.1) параметров на теле от σ_i из необходимых условий оптимальности следует, что $\vartheta_i \neq \vartheta(0)$ при непрерывном $\vartheta(x)$ для $x > 0$. Несмотря на это, в SEM σ_i определяется по ϑ_i , а не по $\vartheta(0)$, хотя для таких тел значение угла наклона касательной в единственной точке тела не имеет никакого отношения к наклону головного скачка. От подобного порока SEM легко избавиться, если при определении параметров в ifw вместо σ_i взять средний угол наклона скачка на iw или связанное с ним отношение $\Sigma = x_w/y_w$, т.е. вместо (1.1) использовать формулу

$$\omega = \omega(\vartheta, \Sigma) \quad (1.2)$$

В отличие от σ_i на входящий в (1.2) параметр Σ влияет форма всего начального участка тела id , а при наличии в точке d выпуклого излома – и часть cdw пучка волн разрежения, возникающего при его обтекании. Это влияние проявляется следующим образом. Как и в SEM, в ifw реализуется простая волна с постоянными параметрами на каждой C^+ -характеристике. Благодаря этому в точке $x = \zeta$ и $y = \eta$ пересечения C^+ -характеристики со скачком известны все параметры потока, в частности, угол ϑ и давление p . По любому из них можно найти локальный наклон скачка. Хотя появляющийся произвол можно использовать для повышения точности построения головного скачка (в рамках SEM это делалось в [18]), далее его наклон будем находить по ϑ . В результате с учетом прямолинейности C^+ -характеристик и дифференциального уравнения скачка получим

$$L_{11} \equiv \zeta - x + c_1(\vartheta, \Sigma)(y - \eta) = 0, \quad L_{12} \equiv \zeta' - a_1(\vartheta)\eta' = 0 \quad (1.3)$$

$$c_1(\vartheta, \Sigma) = \text{ctg}(\vartheta + \alpha), \quad a_1(\vartheta) = \text{ctg}\sigma$$

Здесь штрихами обозначены производные по ординате y образующей тела, α – угол Маха, зависимости c_1 и a_1 от своих аргументов известны из формул простой волны, реализующейся за косым скачком с $x_w/y_w = \Sigma$, а y , x и ϑ – значения соответствующих переменных в точке образующей, принадлежащей той же C^+ -характеристике, что и рассматриваемая точка скачка iw , а далее C^- -характеристики wf . При наличии излома в точке d часть пучка может попадать на скачок. Тогда на его отрезке sw вместо (1.3)

$$L_{11} \equiv \zeta - x_d + c_1(\vartheta, \Sigma)(y_d - \eta) = 0, \quad L_{12} \equiv \dot{\zeta} - a_1(\vartheta)\dot{\eta} = 0 \quad (1.4)$$

с теми же, что и в (1.3), c_1 и a_1 , но с заменой в L_{12} дифференцирования по y дифференцированием по ϑ , метящему C^+ -характеристики пучка.

Если ζ и η – абсцисса и ордината точки C^- -характеристики wf , то аналогично (1.4) ее начальный и конечный участки we и ef определяются уравнениями

$$\begin{aligned} L_{21} &\equiv \zeta - x_d + c_1(\vartheta, \Sigma)(y_d - \eta) = 0, \quad L_{22} \equiv \dot{\zeta} - a_2(\vartheta, \Sigma)\dot{\eta} = 0 \\ L_{21} &\equiv \zeta - x + c_1(\vartheta, \Sigma)(y - \eta) = 0, \quad L_{22} \equiv \zeta' - a_2(\vartheta, \Sigma)\eta' = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$a_2(\vartheta, \Sigma) = \text{ctg}(\vartheta - \alpha)$$

Наконец, на образующей тела idf выполняется условие непротекания

$$L \equiv x' - \text{ctg} \vartheta = 0 \quad (1.6)$$

Если образующая тела задана, то расчет его обтекания проводится итерациями с Σ , найденным из предыдущего приближения. В первой итерации, как и в SEM, $\Sigma = \text{ctg} \sigma_i$. На каждой итерации параметры за эквивалентным косым скачком, в частности, давление $P = p(\Sigma)$, угол поворота потока $\Theta = \vartheta(\Sigma)$ и удельная энтропия $S = s(\Sigma)$ определяются из точных соотношений на ударной волне. После этого уравнения, определяющие все параметры потока как функции ϑ и Σ , записываются в форме

$$\vartheta - \Theta = \int \frac{p}{\rho A} dp, \quad 2h(p, S) + V^2 = 2H, \quad A = \rho V^2 \text{tg} \alpha \quad (1.7)$$

Здесь h и ρ – удельная энтальпия и плотность – известные функции p и S , V – модуль скорости и H – полная энтальпия. В силу (1.7)

$$\begin{aligned} p_\vartheta &\equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_\Sigma = A \\ p_\Sigma &\equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \Sigma} \right)_\vartheta = \frac{\Lambda}{A} [A(\Sigma)P' + \Theta'] - \frac{(\ln \Psi)'}{2(\kappa - 1)A} \int_{\ln P}^{\ln p} K(M) d \ln p \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$K(M) = \frac{4 + 2(\kappa - 2)M^2 - (\kappa - 1)M^4}{\kappa M^4 \sqrt{M^2 - 1}}$$

Здесь Λ – коэффициент отражения возмущений давления от эквивалентного скачка, $A(\Sigma)$ и Ψ – значения A из (1.7) и энтропийной функции $\Psi = \rho p^{-1/\kappa}$ за ним, штрихи означают дифференцирование по Σ , а формула для p_Σ записана для совершенного газа с показателем адиабаты κ .

Формулы и уравнения (1.3) – (1.8) после замены Σ на $\sigma_i = \sigma(\vartheta_i)$ позволяют в приближении SEM строить криволинейный скачок iw и C^- -характеристику wf . Несмотря на это, SEM и MSEM различаются принципиально. В SEM форма скачка iw и характеристики wf не влияют на распределение параметров в ifw и на образующей if . В MSEM течение в ifw зависит от отношения $\Sigma = x_w / y_w \equiv \zeta_w / \eta_w$, которое находится в процессе расчета течения, причем при разном влиянии на Σ начального (id) и конечного (df) участков образующей. Из-за этого в MSEM, как и в рамках уравнений Эйлера, в точке d оптимальная образующая в общем случае будет иметь излом. Правда, в MSEM из-за замены криволинейной ударной волны косым скачком со средним наклоном он будет единственным (по крайней мере в случаях, когда излом выпуклый), а в рамках уравнений Эйлера оптимальный контур имеет бесчисленное количество изломов и точек их сгущения [1]. Это отличие, однако, несущественно, так как во втором случае учет изломов, отличных от самого большого ("главного"), не имеет смысла [1, 14, 15]¹. Таким образом, MSEM, не страдая отмеченным выше пороком

¹ Согласно [15], при $\Lambda > 0$, когда величина изломов особенно мала, близкими по величине могут быть два излома.

SEM, предсказывает столь тонкую особенность оптимальных образующих, как наличие у них внутреннего излома. Локальные модели, будучи существенно проще MSEM, не предсказывают такой особенности.

Как показано в [10, 17], в вариационных задачах построения оптимальных замкнутых тел особую роль играет ограничение на длину l , которую примем за линейный масштаб. Из-за этого ограничения искомая образующая может иметь участки краевого экстремума по x в виде переднего ($x \equiv 0$) или заднего ($x \equiv 1$) торца и даже обоих одновременно. Передний торец обтекается с отошедшей ударной волной и поэтому здесь не рассматривается. При наличии заднего торца $f^\circ f$ (фиг. 1, в) давление p^+ , действующее на него, предполагается известным и не зависящим от формы образующей if° , обтекаемой сверхзвуковым потоком, и от y . Для тела, симметричного относительно оси x , коэффициент волнового сопротивления C_x равен

$$C_x = \int_{y_i=0}^{y_f^\circ} p(\vartheta, \Sigma) dy - y_{f^\circ} p^+$$

Здесь p и p^+ отнесены к $\rho_\infty V_\infty^2$, а y , как и x , – к длине тела; C_x , а далее и другие интегральные характеристики определяются для верхней его половинки.

Наряду с заданием длины, профилируемое тело может удовлетворять N изопериметрическим условиям, которые возьмем такими

$$F^n = \int_{y_i=0}^{y_f^\circ} \Phi^n(p, \vartheta, x, y) dy - \int_{y_f=0}^{y_f^\circ} \varphi^n(p^+, x, y) dy, \quad n = 1, \dots, N$$

Здесь F^n – заданные постоянные, а Φ^n и φ^n – известные функции своих аргументов; как и в выражении для C_x , вторые интегралы отражают вклад возможного торца $f^\circ f$, при их записи до получения необходимых условий оптимальности не следует заменять x единицей, а y_f – нулем.

2. Необходимые условия оптимальности. Изопериметрические условия включаются в вариационную задачу с помощью вектора постоянных множителей Лагранжа μ с компонентами μ^1, \dots, μ^N . В результате при построении тела, реализующего, допустим, минимум C_x , последний заменится на

$$\chi = \int_{y_i=0}^{y_f^\circ} \Phi(p, \vartheta, x, y, \mu) dy - \int_{y_f=0}^{y_f^\circ} \varphi(p^+, x, y, \mu) dy$$

$$\Phi(p, \vartheta, x, y, \mu) = p + \sum_{n=1}^N \mu^n \Phi^n(p, \vartheta, x, y)$$

$$\varphi(p^+, x, y, \mu) = p^+ + \sum_{n=1}^N \mu^n \varphi^n(p^+, x, y)$$

При любом допустимом варьировании вариации C_x и χ совпадают. Далее составим функционал Лагранжа J . Для этого к χ добавим интегралы по y вдоль образующих $id_$ и d_+f и по ϑ в пучке волн разрежения (далее рассматриваются только такие изломы) от левых частей уравнений $L_{ik} = 0$ из (1.3) – (1.5), умноженных на переменные множители Лагранжа $\lambda_{ik}(y)$ или $\lambda_{ik}(\vartheta)$, а также от левой части условия непротекания (1.6), умноженного на переменный множитель $\lambda_0(y)$. При любом допустимом варьировании $\delta C_x = \delta J$.

Сказанное остается без изменений и тогда, когда if образует не изолированное тело, а его головную часть (фиг. 1, г) с заданными длиной $x_f = 1$ и ординатой концевой точки y_f . В этом случае выписанное выше выражение для C_x с заменой f° на f отличается от коэффициента волнового сопротивления на несущественную при определении оптимальной образующей константу $(p^+ - p_\infty)y_f$.

Варьируя изображенные на фиг. 1, *a-г* образующие *if*, придем к выражению

$$\begin{aligned}
\delta C_x = & X^d \Delta x_d + Y^d \Delta y_d + [\lambda_{12}(y) - \lambda_{12}(\vartheta)]_{d-} (\Delta \zeta - a_1 \Delta \eta)_{c=d-} + \\
& + [\lambda_{22}(\vartheta) - \lambda_{22}(y)]_{d+} (\Delta \zeta - a_2 \Delta \eta)_{e=d+} + X^{f^0} \Delta x_{f^0} + Y^{f^0} \Delta y_{f^0} + \\
& + H^\eta \Delta \eta_w + H^\Sigma \Delta \Sigma + \int_{y_i=0}^{y_d} (A^x \delta x + A^\vartheta \delta \vartheta + A^\zeta \delta \zeta + A^\eta \delta \eta) dy + \\
& + \int_{\vartheta_{d-}}^{\vartheta_w} (B^\zeta \delta \zeta + B^\eta \delta \eta) d\vartheta + \int_{\vartheta_w}^{\vartheta_{d+}} (C^\zeta \delta \zeta + C^\eta \delta \eta) d\vartheta + \\
& + \int_{y_d}^{y_{f^0}} (D^x \delta x + D^\vartheta \delta \vartheta + D^\zeta \delta \zeta + D^\eta \delta \eta) dy - \int_{y_f=0}^{y_{f^0}} A^+ \delta x dy
\end{aligned} \tag{2.1}$$

В правой части (2.1) коэффициенты при приращениях Δx_d , Δy_d и т.д. и при вариациях под знаками интегралов – функции координат образующей – x и y , скачка $i_w - \zeta$ и η и характеристики wf или $wf^0 - \zeta$ и η , угла ϑ и других параметров на образующей тела и в изломе d_{d+} , если он есть, давления p^+ , величины $\Sigma = \zeta_w / \eta_w$, а также постоянных и переменных множителей Лагранжа. Для головной части тела, когда $x_{f^0} \equiv x_f = 1$ и $y_{f^0} \equiv y_f$ заданы, (2.1) не содержит последнего интеграла и слагаемых с Δx_{f^0} и Δy_{f^0} . Индексы f^0 и f совпадают для головной части и для тел без торца. Если в точке d нет излома, то в правой части (2.1) исчезают четыре первых слагаемых и интегралы по ϑ .

При варьировании любой, причем необязательно оптимальной образующей, изображенной на фиг. 1, *a-г*, пользуясь произволом в выборе множителей λ_{ik} , обратим в нули входящие в (2.1) коэффициенты при $\delta \zeta$ и $\delta \eta$. Это приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned}
\lambda_{12}'(y) = \lambda_{11}(y), \quad \lambda_{11}(y) &= \frac{\lambda_{12}(y) a_1'}{\text{ctg}(\vartheta + \alpha) - \text{ctg} \sigma}, \quad y \in [0, y_d] \\
\dot{\lambda}_{12}(\vartheta) = \lambda_{11}(\vartheta), \quad \lambda_{11}(\vartheta) &= \frac{\lambda_{12}(\vartheta) \dot{a}_1}{\text{ctg}(\vartheta + \alpha) - \text{ctg} \sigma}, \quad \vartheta \in [\vartheta_{d-}, \vartheta_w] \\
\dot{\lambda}_{22}(\vartheta) = \lambda_{21}(\vartheta), \quad \lambda_{21}(\vartheta) &= \frac{\lambda_{22}(\vartheta) \dot{a}_2}{\text{ctg}(\vartheta + \alpha) - \text{ctg}(\vartheta - \alpha)}, \quad \vartheta \in [\vartheta_w, \vartheta_{d+}] \\
\lambda_{22}'(y) = \lambda_{21}(y), \quad \lambda_{21}(y) &= \frac{\lambda_{22}(y) a_2'}{\text{ctg}(\vartheta + \alpha) - \text{ctg}(\vartheta - \alpha)}, \quad y \in [y_d, y_{f^0}]
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Дифференциальные уравнения, определяющие λ_{12} и λ_{22} на четырех интервалах изменения y и ϑ , допускают четыре произвола. Два из них получим, приравняв нулю зависящие от λ_{12} и λ_{22} множители в третьем и четвертом слагаемых из (2.1), т.е. положив

$$\lambda_{12}(y_d) = \lambda_{12}(\vartheta_{d-}), \quad \lambda_{22}(y_d) = \lambda_{22}(\vartheta_{d+}) \tag{2.3}$$

Производные от a_1 и a_2 по y и по ϑ различаются. Поэтому, в силу (2.3) и (2.2), $\lambda_{11}(y_d) \neq \lambda_{11}(\vartheta_{d-})$ и $\lambda_{21}(y_d) \neq \lambda_{21}(\vartheta_{d+})$. Еще два условия, необходимые для определения λ_{ik} , получим, положив в (2.1) $H^\eta = H^\Sigma = 0$. Это дает

$$[\lambda_{22} a_2 - \lambda_{12} a_1 + (\lambda_{12} - \lambda_{22}) \Sigma]_w = 0$$

$$\eta_w(\lambda_{22} - \lambda_{12})_w + \int_{\lambda_{12i}}^{\lambda_{12w}} (\eta - y)c_{1\Sigma} d\lambda_{12} + \int_{\lambda_{22w}}^{\lambda_{22f^0}} (\eta - y)c_{1\Sigma} d\lambda_{22} + \int_{\eta_w}^{\eta_{f^0}} \lambda_{22} a_{2\Sigma} d\eta = \varepsilon \equiv \int_{y_i=0}^{\eta_{f^0}} \Phi_p p_\Sigma dy \quad (2.4)$$

$$\Phi_p = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{\vartheta, x, y}, \quad \omega_\Sigma = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \Sigma} \right)_\vartheta, \quad \omega = p, a_2, c_1$$

Здесь, как и ранее, для головных частей и тел без торца $f^0 \equiv f$, в подынтегральных выражениях связь η с y или с ϑ устанавливается из расчета обтекания образующей if^0 в рамках MSEM, а связь y или ϑ с λ_{12} или λ_{22} – из решения сопряженной задачи для множителей λ_{ik} , которая наряду с уравнениями для этих множителей из (2.2) включает условия (2.3) и (2.4). Относительно множителей λ_{ik} все уравнения и условия этой сопряженной задачи линейны и, кроме последнего условия из (2.4), однородны. Последнее становится однородным, если параметры набегающего потока и форма образующей if^0 таковы, что $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon = 0$ решение задачи для λ_{ik} , что будет важно далее, тривиально, т.е.

$$\lambda_{11} \equiv \lambda_{12} \equiv \lambda_{21} \equiv \lambda_{22} \equiv 0 \quad (2.5)$$

После выбора λ_{ik} в выражение (2.1) наряду с приращениями координат точек d и f^0 и вариаций x входят вариации ϑ на if^0 . Произвол в выборе еще неопределенного множителя λ_0 употребим для обращения в нуль коэффициентов при $\delta\vartheta$. В результате λ_0 определится конечными уравнениями

$$\lambda_0 = [(\eta - y)\lambda_{11}c_{1\vartheta} + \lambda_{12}a_{1\vartheta}\eta' - \Phi_\vartheta - \Phi_p p_\vartheta] \sin^2 \vartheta, \quad y \in [0, y_d]$$

$$\lambda_0 = [(\eta - y)\lambda_{21}c_{1\vartheta} + \lambda_{22}a_{2\vartheta}\eta' - \Phi_\vartheta - \Phi_p p_\vartheta] \sin^2 \vartheta, \quad y \in [y_d, y_{f^0}] \quad (2.6)$$

$$\Phi_\vartheta = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)_{p, x, y}, \quad \omega_\vartheta = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right)_\Sigma, \quad \omega = p, a_1, a_2, c_1$$

После этого в (2.1) остаются только слагаемые, пропорциональные приращениям $\Delta x_d, \Delta y_d, \Delta x_{f^0}$ и Δy_{f^0} и интегралы от δx на id, df^0 и $f^0 f$. При N изопериметрических условиях эти приращения и вариации не независимы. Их независимость достигается введением N компенсирующих точек k_n и определением постоянных множителей Лагранжа μ^1, \dots, μ^N из линейной системы, которая получится, если в точках k_n на id и df^0 положить соответственно

$$A^x \equiv \Phi_x - \lambda'_0 - \lambda_{11} = 0, \quad D^x \equiv \Phi_x - \lambda'_0 - \lambda_{21} = 0 \quad (2.7)$$

Выполнение этих равенств пока только в точках k_n позволяет при варьировании x в окрестности любой точки образующей if за счет одновременного варьирования x в окрестностях k_n сохранять значение всех N заданных в качестве изопериметрических условий функционалов. Так как благодаря выбору μ варьирование x в окрестностях точек k_n никак не проявляется в выражении для δC_x , то теперь δx на id, df^0 и $f^0 f$ можно считать независимыми. Следовательно, если образующая idf^0 реализует минимум C_x , то первое (второе) равенство из (2.7) должно выполняться на всем отрезке $id(df^0)$.

Аналогично, если излом обеспечивает минимум C_x , то необходимые условия оптимальности, определяющие его величину и положение C^+ -характеристики dw в пучке

волн разрежения, примут вид

$$X^d \equiv \lambda_{0d} - \lambda_{0d+} + \lambda_{12d-} - \lambda_{12w} + \lambda_{22w} - \lambda_{22d+} = 0 \quad (2.8)$$

$$Y^d \equiv (\Phi_- - \Phi_+ + \lambda_{0+}x'_+ - \lambda_{0-}x'_-)_d + \int_{\lambda_{12d-}}^{\lambda_{12w}} c_1 d\lambda_{12} + \int_{\lambda_{22w}}^{\lambda_{22d+}} c_1 d\lambda_{22} = 0$$

Для головных частей плоских тел уравнения и условия сопряженной задачи (2.2)–(2.4) и (2.6) для λ_{ik} и λ_0 и условия оптимальности (2.7) и (2.8), по крайней мере в принципе, позволяют строить образующие, которые, удовлетворяя N изопериметрическим условиям, реализуют минимум S_x при обтекании сверхзвуковым потоком с присоединенной ударной волной. Для замкнутых тел фиксированной длины условия оптимальности в точке f° , совпадающей или не совпадающей с f , получаются так же, как в [10], и сводятся к неравенствам

$$Y^{f^\circ} \equiv (\Phi - \varphi - \lambda_0 \operatorname{ctg} \vartheta - \lambda_{12} a_1)_{f^\circ} \geq 0, \quad X^{f^\circ} \equiv \lambda_{0f^\circ} + \lambda_{12f^\circ} \leq 0 \quad (2.9)$$

Нарушение первого неравенства (2.9) в точке $f^\circ = f$ тела без торца указывает на необходимость его введения. При этом оптимальный размер торца определяется тем же условием со знаком равенства. Все величины в нем (кроме φ) – предельные значения при подходе к f° слева. Для тела без торца выполнение второго неравенства (2.9) указывает на то, что при уменьшении длины тела S_x растет. Для тел с торцом то же неравенство есть условие того, что торец $f^\circ f$ является участком краевого экстремума. Как и в [10], еще одно условие того, что торец – участок краевого экстремума по x , принимает вид: $A^+ = \varphi_x(p^+, 1, y, \mu) \geq 0$.

3. Двухэтапное построение оптимальной образующей. Выведенные в рамках MSEM уравнения и условия оптимальности, будучи несравненно проще того, к чему в подобных вариационных задачах привели бы уравнения Эйлера, тем не менее, все еще достаточно сложны. В то же время опыт, накопленный при выполнении работы [15], подсказывает, что процесс построения конфигураций, близких к оптимальным, можно существенно упростить практически без ущерба для их качества. Такая возможность открывается благодаря малости величины ε , стоящей в правой части второго условия из (2.4), а малость ε есть следствие малости производной p_Σ из (1.8). С учетом этого разобьем задачу построения оптимальной образующей на два этапа. На первом положим $\varepsilon = 0$, что, как будет показано ниже, даст образующую без излома. На втором этапе введение излома проведем в рамках упрощенного варианта подхода, развитого в [15], и с учетом установленных там особенностей ориентации возникающего при обтекании излома пучка волн разрежения.

На первом этапе, положив $\varepsilon = 0$, придем к равенствам (2.5), а затем – к существенному упрощению всех условий оптимальности. Прежде всего вместо разных уравнений (2.6), определяющих $\lambda_0(y)$ на id и df° , и разных условий оптимальности из (2.7) теперь всюду на if°

$$\lambda_0 = -(\Phi_\vartheta + \Phi_p p_\vartheta) \sin^2 \vartheta, \quad \Phi_x - \lambda'_0 = 0 \quad (3.1)$$

Далее, из (2.5) и первого условия (2.8) следует, что множитель λ_0 в точке d непрерывен, а второе условие (2.8) дает, что в той же точке

$$\Phi_{d-} - \Phi_{d+} + \lambda_{0d}(x'_+ - x'_-)_d = 0 \quad (3.2)$$

Первое уравнение из (3.1) справедливо, в частности, слева и справа от точки d , а множитель λ_0 непрерывен в этой точке. Поэтому в d непрерывна и правая часть этого уравнения. Отсюда и из (3.2) следует, что образующая if , отвечающая $\varepsilon = 0$, гладкая.

При этом условия, определяющие образующую замкнутого тела без торца (головной части) и участка образующей if^o и y_f тела с торцом, а также условия для замкнутого тела в точке f^o , совпадающей или не совпадающей с точкой f , по форме не отличаются от полученных в [10] для локальных моделей. Отличие состоит в том, что в [10] все параметры – функции только ϑ , а $p_\vartheta = dp/d\vartheta$. Здесь же все параметры – функции ϑ и Σ , а $p_\vartheta = (\partial p/\partial \vartheta)_\Sigma = A$ с $A(p, \Sigma)$ из (1.8) и с Σ , зависящим от формы if^o . Поэтому теперь гладкая образующая if или ее участок if^o определяются итерациями. На каждой итерации сама образующая с торцом или без него строится так же, как в [10], а $\Sigma = x_w/y_w$ берется из предыдущей итерации. Одновременно строится ударная волна и C^- -характеристики, и находится та из них, которая приходит в точку f или f^o . Последняя определяет координаты точки w , а по ним $\Sigma = x_w/y_w$ для новой итерации.

На втором этапе в построенную гладкую образующую вводится излом. Его введение выполняется не в рамках сопряженной задачи для λ_{ik} с $\epsilon \neq 0$. Поэтому построенную образующую назовем "квазиоптимальной" в приближении MSEM. В том же смысле "квазиоптимальны" (в рамках уравнений Эйлера) и образующие с изломом из [15].

Для построенных в [15] "квазиоптимальных" образующих головных частей точки s и w совпадают. В [15] конфигурации с пучком волн разрежения в точке d отвечают $\Lambda < 0$. При $\Lambda < 0$ волны разрежения отражаются от скачка как волны сжатия. Ясно, что для головной части с $\vartheta_f > 0$ попадание волн сжатия на концевой участок образующей увеличивало бы C_x . Поэтому квазиоптимальные образующие из [15] обтекаются так, как показано на фиг. 1,д, давая почти все уменьшение C_x по сравнению с образующей без излома.

В рассматриваемых задачах ϑ_f или ϑ_{f^o} могут быть любого знака. В соответствии с этим пучок ориентируется, как показано на фиг. 1,д–ж. Если в концевой точке обтекаемого сверхзвуковым потоком участка образующей $\vartheta > 0$, то пучок ориентируется, как на фиг. 1,д. Если в достаточно большой окрестности той же точки $\vartheta < 0$, то, наоборот, выгодно, чтобы он при $\Lambda < 0$ отражался от головного скачка целиком (фиг. 1,е). "Квазиоптимальное" разбиение пучка в случае малых отрицательных ϑ в концевой точке, когда уже вблизи нее угол ϑ становится положительным, проводится по схеме фиг. 1,ж, на которой $\vartheta_h = 0$. Схемы фиг. 1,е–ж назовем "тестируемыми" (ТС). Чтобы из ТС с той же точностью, что и в [15], выбрать оптимальную, поступим следующим образом.

Пусть построена гладкая образующая, удовлетворяющая всем уравнениям и условиям задачи, и пусть ϑ_i – угол наклона касательной в ее передней точке. Дадим два положительных приращения этого угла $\Delta\vartheta_{i1}$ и $\Delta\vartheta_{i2}$ и с помощью тех же уравнений и условий построим в классе ТС еще две образующие if или if^o , но уже с изломом в точке d . Выполнение для этих образующих изопериметрических условий обеспечим за счет подбора μ .

После того как в дополнение к $C_x \equiv C_{x0}$ гладкой образующей определены C_x двух негладких образующих из класса ТС, с той же точностью, что и в [15], найдем коэффициенты b_1 и b_2 квадратичной зависимости $\Delta C_x \equiv C_x - C_{x0}$ от $\Delta\vartheta_i$

$$\Delta C_x = b_1(1 + b_2\Delta\vartheta_i)\Delta\vartheta_i \quad (3.3)$$

В силу этого, при $b_1b_2 > 0$ для величины $\Delta\vartheta_i^m$, реализующей минимум C_x , и отвечающего ей ΔC_x^m имеем

$$\Delta\vartheta_i^m = -\frac{1}{2b_2}, \quad \Delta C_x^m = -\frac{b_1b_2}{4b_2^2} < 0 \quad (3.4)$$

Завершая изложение развитого способа профилирования квазиоптимальных плоских тел, предостережем читателя от переоценки достоинств MSEM. В частности, для обте-

каемого гиперзвуковым потоком тела, изображенного на фиг. 1,з, SEM даст более правильное значение C_x , чем MSEM, так как для такого тела основной вклад в C_x вносит участок id , на котором SEM определяет p точно, а в MSEM неточно. С другой стороны, по той же причине, например, при заданной площади продольного сечения квазиоптимальное тело, как и в [10], имеет массивную кормовую часть и задний торец, уменьшающие ϑ и p на обтекаемой поверхности. Для таких тел, определяя C_x , важно достаточно точно вычислять p по большей части образующей if° , что и дает MSEM. Разумеется, в связи с вариационными задачами главное достоинство MSEM состоит в исключении присущего SEM сингулярного влияния на C_x угла наклона касательной в единственной точке i . К недостаткам MSEM можно было бы отнести нефизичное обратное влияние формы участка df° на ударную волну, точнее, на положение на ней точки w , а следовательно, и на величину Σ . В полной системе уравнений и условий сопряженной задачи и условий оптимальности разд. 2 это влияние проявляется через множители λ_{ik} , входящие, например, в условия (2.9). Однако, в двухэтапном методе построения квазиоптимальной образующей этот недостаток благополучно исчезает. Благодаря этому, в частности, условия в точке f° или f становятся локальными и точными, совпадая с получающимися с помощью "локального варьирования" [1] в приближении уравнений Эйлера.

4. Примеры построения оптимальных профилей. В качестве примера рассмотрим замкнутые тела, реализующие минимум C_x при заданных длине и площади продольного сечения

$$F = \int_{y_i=0}^{y_{f^\circ}} (1-x)dy - \int_{y_f=0}^{y_{f^\circ}} (1-x)dy$$

В этом случае при одном постоянном множителе Лагранжа μ имеем

$$\Phi = p(\vartheta, \Sigma) + \mu(1-x), \quad \varphi = p^+ + \mu(1-x)$$

Уравнения и условия, которые в данной задаче определяют гладкую экстремаль if° на первом этапе и отрезки id и df° квазиоптимальной экстремали – на втором, совпадают с полученными для локальной модели, использующей формулы простой волны [10]. Для совершенного газа эти экстремали получаются интегрированием обыкновенного дифференциального уравнения

$$\ddot{y} \equiv \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu \operatorname{ctg} \alpha}{2\rho V^2 \cos^4 \vartheta} \zeta^{-1}, \quad \zeta = 1 + \frac{4(1-M^2) + (\kappa+1)M^4}{4 \operatorname{ctg}^3 \alpha} \operatorname{tg} \vartheta \quad (4.1)$$

в котором, в силу необходимых условий минимума C_x [10],

$$\mu \leq 0, \quad \zeta \geq 0 \quad (4.2)$$

В концевой точке $f^\circ \neq f$ или $f^\circ = f$ замкнутых тел должны выполняться условия

$$(p - p^+ + \rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \vartheta \cos \vartheta)_{f^\circ} \geq 0, \quad \sin^2 \vartheta_{f^\circ} \geq 0 \quad (4.3)$$

Для тела с торцом первое из них (со знаком равенства) определяет y_{f° , а второе вместе с первым неравенством из (4.2) – условия того, что торец – участок краевого экстремума. Отличие уравнений и условий (4.1)–(4.3) от внешне совпадающих с ними уравнений и условий из [10] состоит в том, что в (4.1)–(4.3) все параметры – функции ϑ и Σ , а не одного ϑ , как в [10].

В силу (4.1) и (4.2) кривизна оптимальной образующей замкнутых тел, как и в локальных моделях из [10], не знакопеременна (в крайнем случае при $\mu = 0$ равна нулю). Для оптимальных тел без торца отсюда следует, что при $F > 0$ они выпуклы, так как при $\ddot{y} \geq 0$ лежащая над осью x образующая не может соединять точки i и f , принадлежащие этой оси. Отсюда же, кстати, видно, что таким телам отвечают отрицательные μ . Для выпуклости оптимальных тел с торцом знакоопределенности \ddot{y}

Таблица 1

p^+	0		p_∞			$2p_\infty$			
	M_∞	6	12	6	12	18	6	12	18
$C_x^\circ \times 10^2$		1,189	0,785	0,892	0,708	0,663	0,579	0,639	0,638
$\Delta C_x, \%$		0,09	0,33	0,11	0,43	0,58	0,16	0,48	0,69
$\Delta C_{xN}, \%$				0,51	0,13	0,13	1,44	0,18	0,13
$\Delta C_{xL}, \%$		5,25	8,35	2,92	5,65	6,93	0,62	3,13	4,71
$\Delta C_{xW}, \%$		29,7	30,3	30,1	31,8	31,7	34,6	32,3	32,3
$\Delta C_{xD}, \%$		149	223	233	258	270	412	303	290
$\tau \times 10^3$		148	157	154	158	159	161	160	161
$y_f \times 10^3$		145	156	154	158	159	161	160	161
$x_d \times 10^3$		211	266	217	270	290	222	275	292
$y_d \times 10^4$		513	614	513	616	653	511	618	654
$\vartheta_i \times 10^3$		253	239	245	236	232	238	234	232
$-\Delta\vartheta_d \times 10^4$		90	170	97	158	170	92	150	164
$\vartheta_f \times 10^3$		-110	-67	-2	-9	-16	47	19	43

Таблица 2

p^+	$C_x \times 10^2$			$\delta C_x, \%$		
	$p_{opt}^+ = 0$	p_∞	$2p_\infty$	0	p_∞	$2p_\infty$
0	1,19	1,20	1,22	0	0,9	2,9
p_∞	0,90	0,89	0,90	0,9	0	0,9
$2p_\infty$	0,61	0,59	0,58	5,3	0,9	0

недостаточно. Ведь соединить точку i с точкой f^o , в которой $x_f = 1$, а $y_f > 0$, можно и выпуклой, и вогнутой образующей. Здесь решающая роль принадлежит первому неравенству из (4.2). Образующая оптимальной головной части в зависимости от величин y_f и F может быть выпуклой, вогнутой, и отрезком прямой.

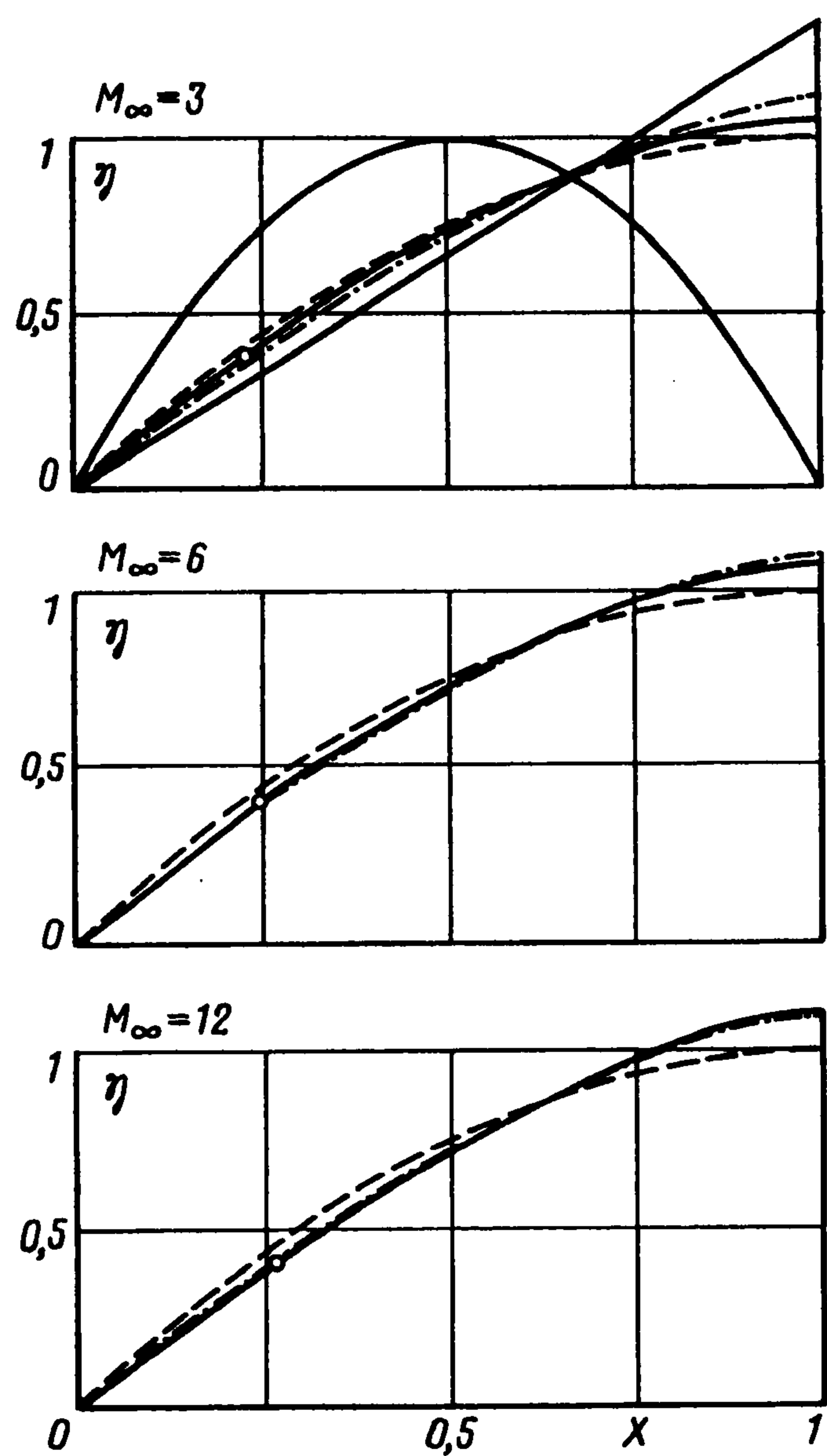
Квазиоптимальные образующие, получающиеся в данной задаче в рамках MSEM, сравним с оптимальными образующими, которые при тех же ограничениях строились в [10] с использованием линейной теории плоского сверхзвукового течения и модели Ньютона.

Типичные значения C_x тел минимального сопротивления, построенных в рамках разных моделей, дает табл. 1. В ней собраны результаты, полученные для тел с $F = (\text{tg}30^\circ)/6 = 1/(6\sqrt{3}) \approx 0,096$, обтекаемых потоком совершенного газа с $\kappa = 1,4$ при $p^+ = 0, p_\infty$ и $2p_\infty$. Так как F верхней половинки тела отнесена к квадрату длины, то выбранное значение отвечает достаточно толстым телам. Так, у симметричного относительно $x = 1/2$ тела с параболической образующей $\vartheta_i = 30^\circ, \vartheta_f = -30^\circ$, а максимальная относительная толщина $\tau_0 = y(1/2) \approx 0,144$. Для тел с торцом сечение максимальной толщины располагается при x , либо равных, либо близких к единице, а соответствующее значение τ близко к τ_0 . Вне зависимости от того, по какой модели осуществлялось профилирование, приведенные в табл. 1 значения C_x находились по MSEM.

Третья строка табл. 1 дает C_x° – коэффициент волнового сопротивления квазиоптимального тела с изломом, образующая которого строилась согласно второму этапу MSEM. В следующих строках приведены отличия (в процентах) от этой величины C_x тел с торцом, построенных в рамках первого этапа MSEM (ΔC_x), в приближении модели Ньютона (ΔC_{xN}) и линейной теории (ΔC_{xL}), клина той же продольной площади (ΔC_{xW}), а также псевдооптимального тела без торца (ΔC_{xD}), спрофилированного в линейном приближении

[21]. Ньютоновские оптимальные тела по причине, объясненной в [10], строились только для $p^+ \geq p_\infty$. Для всех тел $C_x > C_x^\circ$. Тем не менее ΔC_{xN} во всех рассчитанных примерах оказались весьма малы. Если малость ΔC_x вполне естественна, поскольку здесь, как и в [15], невелики углы излома, то малость ΔC_{xN} представляется удивительной, особенно в свете того, что в ряде случаев $C_{xN} < C_x$. То же самое наблюдается и для меньших M_∞ . Величины ΔC_{xL} также невелики. У клиньев с задним торцом $\Delta C_{xW} \approx 30\%$, а ΔC_{xD} псевдооптимальных тел без торца составляет сотни процентов.

В нижней части табл. 1 собраны некоторые геометрические характеристики квазиоптимальных тел с изломом, соответствующих верхней части той же таблицы. Это — их относительные толщины τ , координаты x_d, y_d и y_f , углы ϑ_i и ϑ_f и угол излома $\Delta\vartheta_d = \vartheta_{d+} - \vartheta_{d-}$. На фиг. 2 для $p^+ = p_\infty$ показаны гладкие образующие, построенные для $M_\infty = 3, 6$ и 12 в рамках разных моделей. По оси ординат отложено $\eta = y/\tau_0$. Сплошными, штриховыми и штрих-пунктирными кривыми даны образующие с торцом, построенные в приближении MSEM, линейной теории и модели Ньютона, соответственно. Точки на сплошных кривых дают положение изломов. В дополнение в верхней части фиг. 2, отвечающей $M_\infty = 3$, сплошными кривыми изображены клин и симметричный профиль с той же площадью F .

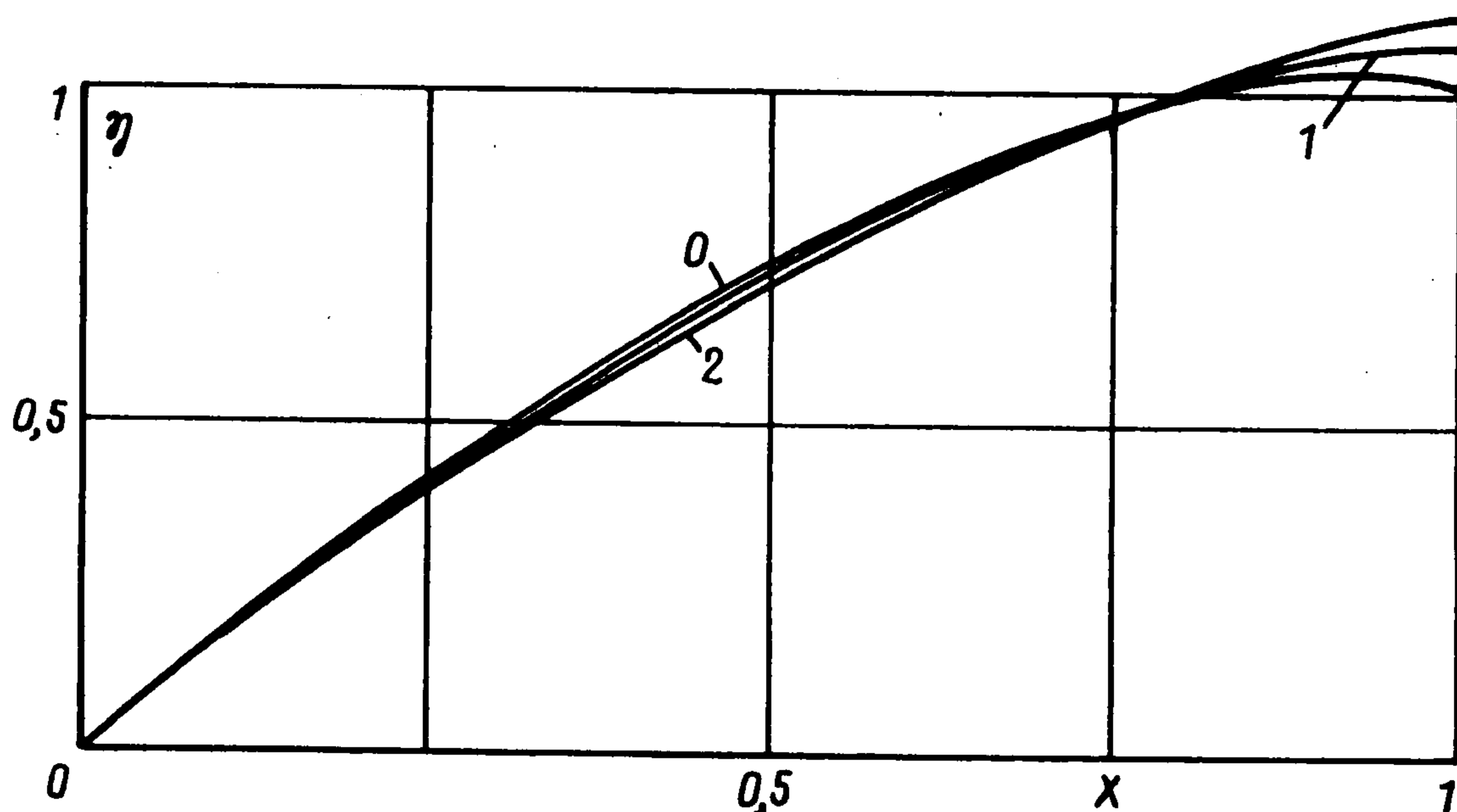


Фиг. 2

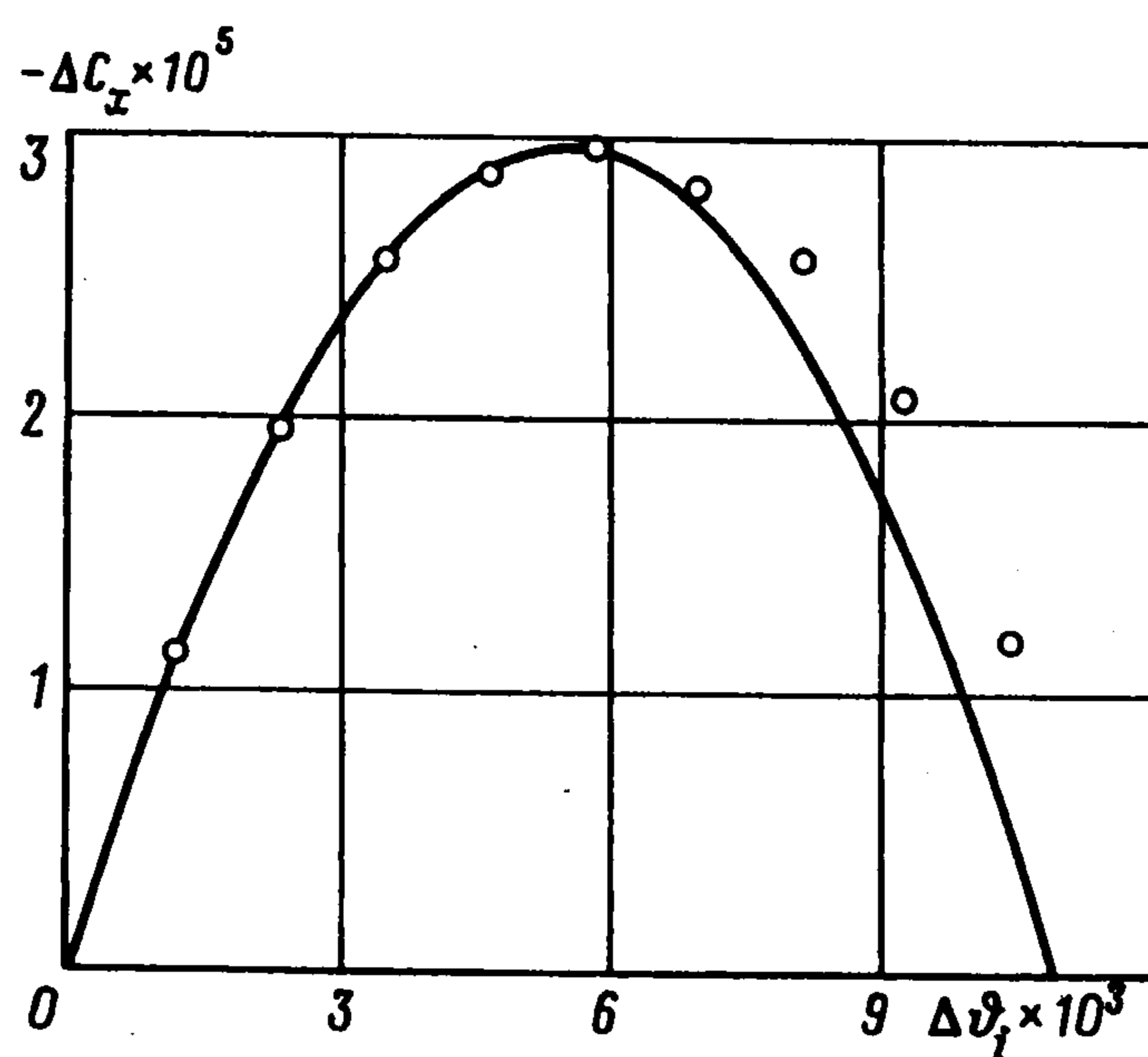
Фиг. 3 и табл. 2 позволяют оценить влияние на выбор образующих используемой при профилировании величины p^+ . На фиг. 3 изображены гладкие образующие, построенные в рамках первого этапа MSEM для $M_\infty = 6$ и трех значений p^+/p_∞ , которые указаны около кривых, а в табл. 2 даны значения C_x и их отличия δC_x от соответствующих оптимальных величин. В ней же приведены p_{opt}^+ , для которых строились оптимальные образующие, и те p^+ , для которых затем считались C_x . В силу этого значения C_x по диагоналям второго — четвертого столбцов и есть оптимальные C_x , отличие от которых определяет δC_x в оставшихся столбцах таблицы. Погрешность в задании p_{opt}^+ на p_∞ увеличивает C_x менее чем на 1%.

Фиг. 4 поясняет процедуру построения квазиоптимальных тел. На ней кружочками даны результаты расчета $\Delta C_x \equiv C_x^d - C_x^c$, где C_x^c и C_x^d — значения C_x соответственно исходного (гладкого) тела и тела с изломом в точке d , в зависимости от $\Delta\vartheta_i$, определенного аналогичным образом. Сплошная кривая — парабола (3.3) с коэффициентами b_1 и b_2 , вычисленными по значениям ΔC_x и $\Delta\vartheta_i$ в третьей и пятой точках. Близость сплошной кривой ко всем кружочкам гарантирует высокую точность определения $\Delta\vartheta_i^m$ и ΔC_x^m по формулам (3.4).

Табл. 3 и 4 дают представление о точности MSEM и других моделей не при построении оптимальных образующих, а при определении C_x . Табл. 3 отвечает $p^+ = p_\infty$, когда ошибки в определении p на i^0 прямо отражаются на вычислении C_x . В ней для разных M_∞ приведены C_x , рассчитанные разными методами. При этом C_{xSE} , C_{xLSE} и C_{xNSE} — рассчитанные по MSEM значения C_x гладких тел, построенных в приближениях MSEM, линейной теории и формулы Ньютона. В третьей строке для гладких тел, построенных в рамках MSEM, приведены значения C_x , рассчитанные интегрированием уравнений Эйлера с помощью монотонной



Фиг. 3



Фиг. 4

маршевой схемы второго порядка с выделением головного скачка и экстраполяцией на нулевой шаг по Ричардсону. Сравнение второй и третьей строк демонстрирует исключительно высокую точность MSEM. Напротив, сравнение четвертой и пятой, а также шестой и седьмой строк с C_{xL} и C_{xN} , определенными по формулам линейной теории и по формуле Ньютона, демонстрирует абсолютно неприемлемую точность последних. Тем удивительнее их работоспособность в построении оптимальных тел.

Сравнение величин C_x псевдооптимального симметричного тела без торца, определенных по MSEM (C_{xSE}) и по линейной теории (C_{xL}), со значениями, рассчитанными интегрированием уравнений Эйлера (третья строка табл. 4), показывает некоторое увеличение погрешностей MSEM при по-прежнему совершенно неприемлемых ошибках линейной теории. Однако при меньших F , для которых тела без торца становятся оптимальными, точность MSEM оказывается столь же высокой, как в табл. 3. Таким образом, при использовании по своему прямому назначению – решению задач оптимального профилирования MSEM всегда обеспечивает более чем достаточную точность.

Модифицированный метод "скачок – волна разрежения" – MSEM, предложенный в работе, позволяет быстро и с высокой точностью решать задачи оптимального профилирования остроконечных плоских тел, обтекаемых сверх- и гиперзвуковым потоком с присоединенными ударными волнами. Он допускает включение в вариационную задачу произвольных изопериметрических условий и в приближении интегральной теории пограничного слоя делает возможным учет трения и тепловых потоков. При точности определения C_x оптимальных тел, близкой к точности численного интегри-

Таблица 3

M_∞	3	6	12
$C_{xSE} \times 10^3$	13,287	8,932	7,114
$C_x \times 10^3$	13,827	8,928	7,098
$C_{xLSE} \times 10^3$	13,981	9,183	7,481
$C_{xL} \times 10^3$	9,819	4,694	2,322
$C_{xNSE} \times 10^3$	14,012	8,967	7,093
$C_{xN} \times 10^3$	5,345	5,345	5,345

Таблица 4

M_∞	3	6	12
$C_{xSE} \times 10^3$	44,781	29,666	25,367
$C_x \times 10^3$	44,935	29,476	23,716
$C_{xL} \times 10^3$	39,280	18,779	9,291

рования уравнений Эйлера, MSEM сводит задачу построения оптимальной образующей к задаче Лагранжа для систем, управляемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Несмотря на столь существенное упрощение, MSEM в отличие от локальных моделей, как и чрезвычайно трудоемкое решение в рамках уравнений Эйлера, дает главный излом оптимальной образующей. Его возникновение связано с отличием от нуля коэффициента отражения Λ возмущений давления, приходящих от тела на головной скачок. Малость Λ позволила еще более упростить решение, разбив задачу построения квазиоптимальных образующих на два этапа. На первом строится образующая без излома, а на втором излом вводится с помощью несложной процедуры, основанной на обнаруженной в [15] особенности оптимальных головных частей заданных габаритов.

Быстрое и весьма точное решение достаточно общих, хотя и двумерных вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики в рамках MSEM позволили оценить возможности более простых приближенных подходов, основанных на формуле Ньютона и на линейной теории, применительно к тем же задачам оптимального профилирования. Выполненные сравнения обнаружили удивительную работоспособность прежде всего формулы Ньютона и в несколько меньшей степени линейной теории, причем именно при профилировании оптимальных образующих, но не при расчете их C_x .

Авторы благодарят С.В. Бафталовского и В.А. Вострецову за помощь в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01825).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
2. Lee K.D., Eyi S. Aerodynamic design via optimization // J. Aircraft. 1992. V. 29. N 6. P. 1012–1019.
3. Reuther J., Jameson A. Aerodynamic shape optimization of wing and wing-body configuration using control theory // AIAA Paper. 1995. N 0123. 31 p.
4. Jameson A. Optimum aerodynamic design using CFD and control theory // AIAA Paper. 1995. N 1729. 24 p.
5. Ta'asan S. Trends in aerodynamics design and optimization: A mathematical viewpoint // AIAA Paper. 1995. N 1731. 10 p.
6. Reuther J., Jameson A., Farmer J., Martinelli L., Saunders D. Aerodynamic shape optimization of complex aircraft configurations via an adjoint formulation // AIAA Paper. 1996. N 0094. 14 p.
7. Бутов В.Г., Васенин И.М., Шелуха А.И. Применение методов нелинейного программирования для решения вариационных задач газовой динамики // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 59–64.

8. *Burgreen G.W., Baysal O., Eleshaky M.E.* Improving the efficiency of aerodynamic shape optimization // *AIAA Journal*. 1994. V. 32. N 1. P. 69–76.
9. Теория оптимальных аэродинамических форм. / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 507 с.
10. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е.* О роли ограничения на длину при построении тел минимального сопротивления // *ПММ*. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 822–837.
11. *Черный Г.Г.* Сверхзвуковое обтекание профиля, близкого к клину // *Тр. ЦИАМ им. П.И. Баранова*. 1950. № 197. 11 с.
12. *Шмыглевский Ю.Д.* О сверхзвуковых профилях, имеющих минимальное сопротивление // *ПММ*. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 269–273.
13. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
14. *Шипилин А.В.* Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1966. № 4. С. 9–18.
15. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е.* К построению оптимального контура головной части тела в сверхзвуковом потоке // *ПММ*. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 419–434.
16. *Крайко А.Н., Шеломовский В.В.* Головные части тел вращения с протоком, близкие к телам минимального волнового сопротивления // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1984. № 1. С. 138–145.
17. *Chapman D.R.* Airfoil profiles for minimum pressure drag at supersonic velocities – general analysis with application to linearized supersonic flow // *NACA Rep*. 1952. 1063. 14 p.
18. *Eggers A.J., Jr., Syvertson C.A., Kraus S.* A study of inviscid flow about airfoils at high supersonic speeds // *NACA Rep*. 1953. 1123. 27 p.
19. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
20. *Гиро Ж.* Основные вопросы теории гиперзвуковых течений. М.: Мир, 1965. 299 с.
21. *Друге Г.* Плоские крылья минимального волнового сопротивления // *Теория оптимальных аэродинамических форм*. М.: Мир, 1969. С. 87–94.

Москва

Поступила в редакцию
23.IX.1996