

УДК 533.6.011

© 1997 г. Г.А. Тирский

КОНТИНУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ

Из уравнений Навье – Стокса в рамках асимптотического анализа получены все возможные континуальные (гидродинамические) модели для стационарных двумерных задач сверх- и гиперзвукового обтекания затупленных тел в двухслойной модели (вязкий ударный слой и структура ударной волны) во всем диапазоне чисел Рейнольдса Re от малых (свободно-молекулярный и переходной режимы обтекания) до больших (режимы обтекания с тонкой головной ударной волной, пограничным слоем и внешним невязким течением в ударном слое). При малых числах Re рассматривается ударный слой и не рассматривается структура ударной волны. Наряду с известными моделями (пограничный слой, вязкий ударный слой, тонкий вязкий ударный слой, параболизированные уравнения Навье – Стокса (однослойная модель) – соответственно большие, умеренные и малые числа Re) обнаружена при числах Re и отношении плотности k до и сразу после головной ударной волны, стремящихся к нулю при условии, что $(k/Re)^{1/2} \rightarrow 0$, новая гидродинамическая модель, вытекающая из уравнений Навье – Стокса и сводящаяся к решению упрощенных ("локальных") уравнений Стокса в ударном слое с исчезающими силами инерции и давления с граничными условиями на свободной искомой границе (ударной волне). Решение задачи обтекания в рамках этой модели дает для коэффициентов трения, теплопередачи и давления, в отличие от всех упомянутых выше моделей, свободно-молекулярный предел. Тем самым из уравнений Навье – Стокса строго получен, в частности, ньютоновский предел для волнового сопротивления. При этом число Кнудсена, определенное по исчезающей в этой модели толщине ударного слоя, стремится к нулю, т.е. выполняются условия континуального подхода. Структура ударной волны может быть определена как по континуальным, так и кинетическим моделям после получения решения в вязком ударном слое при слабом протекании физико-химических процессов в самой структуре ударной волны. В противном случае задача о структуре ударной волны и уравнения вязкого ударного слоя должны решаться совместно. Уравнения для всех континуальных моделей записаны в переменных пограничного слоя Дородницына – Лиза, что позволяет до решения задачи приближенно оценить влияние эффектов второго порядка теории пограничного слоя в зависимости от числа Re и параметра k и представить все аэродинамические и тепловые характеристики в виде единой зависимости от числа Re во всем диапазоне его изменения от нуля до бесконечности.

Ранее разработанный автором с сотрудниками эффективный численный метод глобальных итераций для решения уравнений вязкого ударного слоя может быть применен для решения задач сверх- и гиперзвукового обтекания наветренной стороны затупленных тел в рамках единой гидродинамической модели вязкого ударного слоя для всех чисел Re при условии, что при малых числах Re выполняется предел $(k/Re)^{1/2} \rightarrow 0$. Тем самым аэродинамический и тепловой расчет по разным газодинамическим моделям, соответствующим разным диапазонам изменения числа Re (разные режимы обтекания), может быть заменен единым расчетом фактически по одной модели по всей траектории спуска (входа) в атмосферу космических аппаратов и естественных космических тел (метеороидов).

Совершенствование аэродинамических и тепловых расчетов задач сверх- и гиперзвукового обтекания затупленных тел на траектории входа в атмосферу имеет важное значение не только для улучшения существующих космических аппаратов, но и для проектирования будущих более экономичных аппаратов, маневрирующих за счет аэродинамических сил (без работы двигателей) в верхних слоях атмосферы [1, 2]. Это важно также для предсказаний полета, аэродинамического нагрева, обгара, свечения, термохимического и термомеханического разрушения теплозащиты космических зондов [3], а также количественного предсказания сложного характера взаимодействия метеорных тел с атмосферами Земли и планет при входе со сверхорбитальными скоростями [4].

Подобные расчеты в настоящее время связаны с решениями соответствующих гидродинамических и кинетических уравнений, возможных и достоверных в определенном диапазоне изменения чисел Re . В целом существующие модели, включая кинетические, охватывают весь диапазон полетных чисел Re от низких на больших высотах до высоких на низких высотах и описывают всю возмущенную область течения около тела.

В континуальном режиме обтекания (малые числа Кнудсена Kn) до последнего времени использовались и используются в настоящее время разные гидродинамические модели в зависимости от диапазона изменения числа Re и степени уплотнения газа в ударном слое (на режимах гиперзвуковой стабилизации из системы критериев подобия выпадает число Маха M_∞ [5], его косвенное влияние связано с появлением различных физико-химических процессов в ударном слое).

Наиболее общей кинетически и термодинамически обоснованной континуальной моделью является система уравнений Навье – Стокса (НС). Решение задач сверх- и гиперзвукового обтекания на основе этой модели представляет трудоемкую процедуру, особенно для длинных тел и при больших числах Re . Одним из первых приближенных подходов решения задачи обтекания при умеренных и малых числах Re был метод сращиваемых асимптотических разложений [6]. Он основывался на распространении асимптотической схемы Прандтля (пограничный слой плюс невязкое течение), справедливой при больших числах Re , на область умеренных и малых чисел Re , при которых проявляются эффекты второго порядка теории пограничного слоя (ПС), имеющие порядок $Re^{-1/2}$. Эти эффекты связаны с дополнительным учетом в схеме Прандтля (теория ПС первого порядка или классическая схема Прандтля учитывает только члены порядка единицы при $Re \rightarrow \infty$) продольной и поперечной кривизн обтекаемого тела, толщины вытеснения, градиентов энтропии и энтальпии на внешней границе ПС и неконинуальных эффектов скольжения и температурного скачка на поверхности тела [6]. Учет этих эффектов в рамках асимптотических разложений решений уравнений НС по обратным степеням квадратного корня из числа Re приводит к трудности получения равномерно пригодных решений при обтекании длинных тел в областях с пониженным давлением вниз по потоку, где появляется сильное вихревое взаимодействие вязких и невязких областей течения [7]. Как во всяком асимптотическом подходе, трудно оценить априори точность получаемого решения при фиксированном значении параметра $Re^{-1/2}$, по которому разлагается решение.

Второй подход основывается на решении уравнений вязкого ударного слоя (ВУС), представляющих собой композитную систему уравнений, вытекающую из уравнений НС и сохраняющую все члены второго порядка теории ПС в вязкой и невязкой областях течения [8–10]. В этой модели учитываются члены $O(1)$ и $O(Re^{-1/2})$ и отбрасываются только члены $O(Re^{-1})$, ответственные за молекулярный перенос массы, импульса и энергии вдоль тела. Система уравнений ВУС описывает распространение возмущений вверх по потоку в дозвуковых областях течения и имеет там эллиптический тип. Для решения уравнений ВУС был предложен [11, 12] высокоэкономичный по затратам памяти и времени ЭВМ численный метод решения, основанный на проведении глобальных итераций, позволяющий сократить затраты машинного времени для двумерных задач примерно в десять раз по сравнению с методами установления. Модель ВУС включает в себя при больших числах Re классическую теорию ПС, но ограничена в применении при стремлении числа Re к нулю.

Если в уравнениях ВУС устремить отношение плотностей k до и сразу после головной ударной волны (УВ) к нулю, то нормальный к поверхности тела градиент давления будет определяться только центробежными силами и пропадают эффекты продольной и поперечной кривизн. В этом случае получается упрощенная модель тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС), имеющая параболический тип и эффективно решаемая маршевыми методами, развитыми для решения уравнений классического ПС [3, 13, 14]. Однако эта модель, несмотря на ее широкое использование [3, 5], имеет ограниченную область применения. В задаче

обтекания притупленных конусов модель ТВУС практически применима только в случае больших углов полураствора конуса ($\geq 40^\circ$). При меньших углах полураствора появляется ньютоновская точка отрыва с нулевым давлением на теле. Кроме того, задание формы УВ, эквидистантной телу (согласно асимптотическому требованию этой модели), приводит в случае обтекания затупленных по сфере конусов к "нефизичному" разрыву кривизны УВ и, как следствие, к разрыву касательной к телу составляющей градиента давления [10, 15]. При числах Re , соответствующих появлению размытой головной УВ, используются, как правило, полные или упрощенные уравнения НС (см. разд. 8) с условиями скольжения и скачка температуры на теле [16]. Это позволяет правильно определить тепловые потоки и силу трения вплоть до чисел Рейнольдса $Re_\infty = \rho_\infty V_\infty R_0 / \mu_\infty \approx 100$ [17]. Решения уравнений ВУС, упрощенных и полных уравнений НС при $Re \rightarrow 0$ дают бесконечно возрастающие коэффициенты вязкого трения и теплопередачи. Поэтому для определения указанных коэффициентов и, вообще, всего поля течения при $Re \rightarrow 0$ в настоящее время используются кинетические уравнения или применяется метод Монте-Карло [18, 19].

В данной работе модель сплошной среды распространяется на задачи гиперзвукового обтекания затупленных тел при числах $Re = \rho_\infty V_\infty R_0 / \mu(T_0) \rightarrow 0$ (T_0 – температура адиабатически заторможенного набегающего потока). Все упомянутые выше модели получены из уравнений НС при $Re \rightarrow \infty$. Обнаружено, что в задачах гиперзвукового обтекания вязким газом при $k \rightarrow 0$ и $Re \rightarrow 0$, но при условии, что $(k/Re)^{1/2} \rightarrow 0$, уравнения НС вырождаются в упрощенные уравнения Стокса, содержащие вторые производные только по нормальной к телу координате ("локальные" уравнения Стокса) с обычными граничными условиями прилипания на теле и обобщенными условиями Ренкина – Гюгонно на обращенной к телу стороне размытой УВ. Решение этой задачи выписывается в квадратурах (разд. 9) и дает для коэффициентов давления, сопротивления и теплопередачи свободно-молекулярный предел (СМП). При этом отношение длины свободного пробега к толщине ударного слоя (УС) (локальное число Кнудсена Kn) стремится к нулю.

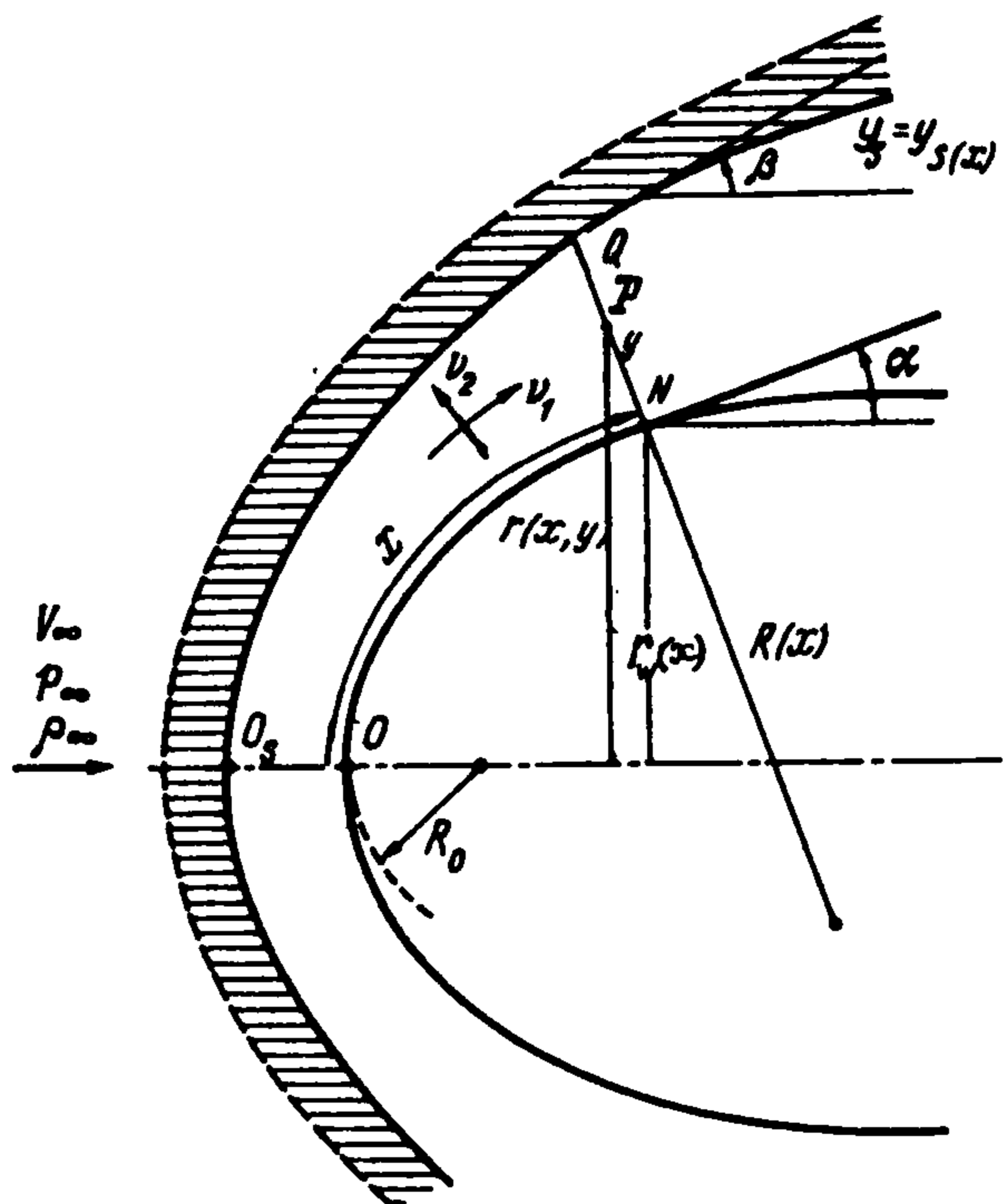
Это предельное решение имеет ясный физический смысл и приводит к локальным силовым и тепловым законам взаимодействия разреженного газа с обтекаемой поверхностью. В частности, в указанном пределе получается формула Ньютона для давления на теле. Граница УС приближается к телу по закону $(k/Re)^{1/2} \rightarrow 0$, и потому вся область возмущенного течения около тела будет определяться в основном утолщающейся при $Re \rightarrow 0$ структурой размытой УВ, которая может быть определена после нахождения течения в УС. Последнее находится независимо от структуры УВ. Эта модель исчезающе тонкого вязкого ударного слоя (ИТВУС), так же, как и уравнения ПС, содержится как частный случай в уравнениях ВУС и дает при указанных выше условиях СМП.

Модели ВУС, ТВУС и ИТВУС основываются на уравнениях ПС как базовой модели, содержащей все члены порядка единицы при $Re \rightarrow \infty$. Поэтому уравнения ВУС и все вытекающие из них более простые модели естественно записать в одних и тех же переменных ПС Дородницына – Лиза во всем диапазоне чисел Re от нуля до бесконечности, охватывающем все режимы обтекания на всей траектории входа тела в атмосферу Земли (или планеты), и решать с помощью одного и того же алгоритма с простым "переключением" (устремляя k к нулю) при подходе к малым числам Re .

1. Уравнения Навье – Стокса в системе координат, связанной с поверхностью обтекаемого тела. Предполагая контур плоского или осесимметричного затупленного тела достаточно гладким, будем рассматривать обтекание его поступательным стационарным потоком газа со скоростью V_∞ , направленным вдоль оси тела в ортогональной криволинейной системе координат, связанной с его поверхностью. В этой системе координат положение точки P в потоке определяется ее расстоянием $y = PN$ по нормали к контуру, отсчитываемым от поверхности тела, и длиной дуги $x = ON$ вдоль контура, отсчитываемой от его вершины O до основания нормали N (фиг. 1).

Введем обозначения: ρ_∞, V_∞ – плотность и скорость набегающего потока; $\rho_\infty \rho, \rho_\infty V_\infty^2 p$ – соответственно плотность и давление. Тогда в выбранной системе координат уравнения НС для однородного вязкого и теплопроводного газа будут [20]

$$\frac{\partial}{\partial x} (r^\nu \rho_\infty \rho v_1) + \frac{\partial}{\partial y} (H_1 r^\nu \rho_\infty \rho v_2) = 0. \quad (1.1)$$



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \rho_{\infty} \rho \left(\frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{v_1 v_2}{RH_1} \right) = \\ = - \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2}{H_1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{H_1 r^v} \left[\frac{\partial}{\partial x} (r^v \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (H_1 r^v \tau_{xy}) \right] + \frac{\tau_{xy}}{RH_1} - \frac{v \sin \alpha}{r} \tau_{\varphi\varphi} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\infty} \rho \left(\frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{v_1^2}{RH_1} \right) = \\ = - \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{H_1 r^v} \left[\frac{\partial}{\partial x} (r^v \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (H_1 r^v \tau_{yy}) \right] - \frac{\tau_{xx}}{RH_1} - \frac{v \cos \alpha}{r} \tau_{\varphi\varphi} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\rho_{\infty} \rho \left(\frac{v_1}{H_1} \frac{\partial H}{\partial x} + v_2 \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{1}{H_1 r^v} \left[\frac{\partial}{\partial x} (r^v J_x) + \frac{\partial}{\partial y} (H_1 r^v J_y) \right] = 0 \quad (1.4)$$

$$p = \rho R_A T / V_{\infty}^2 \quad (1.5)$$

В этой системе (1.1) – уравнение неразрывности, (1.2) и (1.3) – уравнения импульсов в проекции на оси x и y , (1.4) – уравнение энергии, записанное через полную энтальпию $H = h + (v_1^2 + v_2^2) / 2$, (1.5) – уравнение состояния, которое взято ради простоты в форме для совершенного газа. В силу рассматриваемой симметрии задачи

$$v_3 \equiv 0, \quad \partial / \partial \varphi \equiv 0 \quad (1.6)$$

Здесь x, y, φ – криволинейные ортогональные координаты, v_1, v_2, v_3 – физические компоненты вектора скорости газа в ортонормированном базисе этой системы координат, τ_{ij} ($i, j = x, y, \varphi$) – компоненты тензора вязких напряжений, $H_1 = 1 + \kappa(x)y \equiv 1 + R^{-1}(x)y$, $H_2 = 1$, $H_3 = r^v = [r_w(x) + y \cos \alpha(x)]^v$ – коэффициенты Ламе, $\kappa(x), R(x)$ – соответственно кривизна и радиус кривизны контура тела, h – термодинамическая энтальпия, R_A – удельная абсолютная газовая постоянная, $R_A m$ – абсолютная газовая постоянная, m – молекулярная масса газа, T – температура, $v = 0$ для плоских и $v = 1$ для осесимметричных течений, $r_w(x)$ – расстояние от точки обтекаемого контура до оси симметрии, $r(x, y)$ – расстояние от точки в потоке до оси симметрии, $\alpha(x)$ – угол между касательной к контуру обтекаемого тела и осью симметрии тела (фиг. 1). Функции

$\alpha(x)$, $r_w(x)$, $R(x)$ и $r(x, y)$ для выпуклого тела связаны очевидными геометрическими соотношениями

$$r_w(x) = \int_0^x \sin \alpha(t) dt = \int_{\alpha(x)}^{\pi/2} R(t) \sin t dt \quad (1.7)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{R(x)} = \kappa(x), \quad \frac{\partial r}{\partial x} = H_1 \sin \alpha(x), \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \cos \alpha(x)$$

Для замыкания системы уравнений (1.1)–(1.5) необходимы определяющие соотношения, связывающие компоненты тензора вязких напряжений $\hat{\tau}$ и компоненты тензора скоростей деформации \hat{e} , а также выражение для вектора плотности потока полной энергии \mathbf{J} . Имеем [20]

$$\hat{\tau} = (\mu\zeta - 2\mu/3)\nabla \cdot \mathbf{v} \hat{G} + 2\mu\hat{e} \quad (1.8)$$

Здесь μ , $\mu\zeta$ – динамический и объемный коэффициенты вязкости, \hat{G} – метрический тензор. Вектор плотности потока энергии имеет следующее выражение:

$$\mathbf{J} = -\frac{\mu c_p}{\sigma} \nabla T + \hat{\tau} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\mu}{\sigma} \left[\nabla H + \frac{\sigma}{\mu} (\hat{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \frac{v^2}{2} \right], \quad \sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (1.9)$$

$$\hat{\tau} \cdot \mathbf{v} = (\tau_{xx} v_1 + \tau_{xy} v_2) \mathbf{e}_1 + (\tau_{xy} v_1 + \tau_{yy} v_2) \mathbf{e}_2, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2$$

где σ – число Прандтля, λ – коэффициент теплопроводности, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 – орты по осям x , y . При задании зависимостей коэффициентов μ , $\mu\zeta$, λ и c_p от температуры система уравнений НС (1.1)–(1.5) представляет собой замкнутую систему пяти уравнений для определения пяти функций: v_1 , v_2 , ρ , p , H (или T). Здесь не учитываются физико-химические процессы в потоке, сопутствующие задачам гиперзвукового обтекания [1, 9]; их учет не будет менять основных выводов, касающихся установления гидродинамических моделей, но, конечно же, будет менять количественные результаты.

2. Граничные условия. Граничные условия на теле выпишем для простоты при условии, что тело термохимически не разрушается. Тогда используя законы сохранения массы и энергии, условие прилипания на стенке, получаем

$$v_1(x, 0) = 0, \quad v_2(x, 0) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial y}(x, 0) = \varepsilon \sigma_B T_w^4(x, 0) \quad \text{или} \quad T(x, 0) = T_w(x) \quad (2.2)$$

Здесь ε – степень черноты поверхности тела, σ_B – постоянная Стефана – Больцмана, $T_w(x)$ – искомая (первое условие (2.2)) или заданная (второе условие (2.2)) температура поверхности тела. Условие баланса энергии (2.2) записано в предположении, что тепловой поток внутрь тела пренебрежимо мал по сравнению с излучением с поверхности.

При сверхзвуковом обтекании в набегающем потоке на бесконечности должны быть заданы вектор скорости и функции ρ , p и H (или T), согласованные с уравнением состояния (1.5):

$$v_1[x, y_s(x)] = v_{1\infty}, \quad v_2[x, y_s(x)] = v_{2\infty}, \quad \rho[x, y_s(x)] = 1 \quad (2.3)$$

$$p[x, y_s(x)] = 1 / (\gamma M_\infty^2), \quad H[x, y_s(x)] = H_\infty, \quad \gamma = c_p / c_v$$

Здесь $y_s = y_s(x)$ – условная известная граница, расположенная достаточно далеко перед телом, на которой задаются параметры набегающего потока, γ – показатель адиабаты.

При сверхзвуковом обтекании при достаточно больших числах Re , когда толщиной и структурой головной УВ можно пренебречь [21], граничные условия на бесконечности в набегающем потоке удобно заменить соответствующими условиями на искомой УВ. При $Re \rightarrow \infty$ это будут обычные условия Ренкина – Гюгонио на сильном разрыве, которые будут давать при заданных параметрах в набегающем потоке однопараметрическое семейство решений для ρ, p, v_1, v_2 и H (или T) непосредственно за УВ, зависящее от угла наклона УВ $\beta(x)$. Этот угол и отход УВ $y = y_s(x)$ связаны очевидным геометрическим соотношением (фиг. 1)

$$dy_s/dx = H_{1s} \operatorname{tg} \beta_s, \quad H_{1s} = 1 + y_s(x)/R(x), \quad \beta_s(x) = \beta - \alpha \quad (2.4)$$

где $\beta_s(x)$ – угол наклона УВ к оси x .

Уравнение (2.4) связывает две неизвестные величины: $\beta_s(x)$ и $y = y_s(x)$, поэтому при постановке задачи сверхзвукового обтекания в рамках полных уравнений НС (1.1)–(1.5), имеющих седьмой порядок по координате y , с четырьмя граничными условиями на искомой УВ и тремя условиями на теле (2.2) не будет хватать одного условия.

Часто в литературе ставят дополнительное условие на стенке $(\partial p/\partial y)(x, 0) = 0$, не вытекающее из механической постановки задачи, или замыкают такую постановку задачи на разностном уровне, что делается разными авторами по-разному [10], тем самым порождается неединственность решения. Чтобы избежать этой искусственной неединственности, остается альтернатива: или решать задачу, не выделяя УВ (она должна получаться в процессе решения задачи), что весьма трудно при больших числах Re [22], или понизить порядок системы уравнений НС на единицу с постановкой граничных условий на искомой УВ. Последняя процедура автоматически реализуется асимптотически в двуслойной модели (собственно УС и структура УВ) для задачи обтекания как при больших, так и умеренных числах Re [13, 14]. Важно отметить, что при этом выпадают из уравнений НС как раз внепорядковые члены, пропорциональные Re^{-1} . Для учета режимов обтекания при умеренных числах Re , условия на УВ записываются в виде обобщенных условий Ренкина – Гюгонио, учитывающих вязкость и теплопроводность газа сразу за ней.

Динамические условия совместности, связывающие характеристики движения газа до и после УВ при учете вязкости и теплопроводности были выведены Дюгемом и подробно рассмотрены Н.Е. Кочиним [23]. Они применялись [24–27] и к задачам сверхзвукового обтекания. Условия совместности вытекают из законов сохранения массы, импульса и энергии, примененных к жидкому объему, содержащему разрыв, с пренебрежением касательных составляющих потоков массы, импульса и энергии внутри структуры скачка, так же как и его толщиной. Для стационарной задачи, когда в набегающем потоке все параметры заданы, эти условия таковы:

$$\rho_\infty v_{n\infty} = \rho_\infty \rho_s v_{ns}, \quad v_{n\infty} = -V_\infty \sin \beta \quad (2.5)$$

$$\rho_\infty v_{n\infty} v_\infty + p_\infty n = \rho_\infty \rho_s v_{ns} v_s - p_{ns} \quad (2.6)$$

$$\rho_\infty v_{n\infty} H_\infty = \rho_\infty \rho_s v_{ns} H_s + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})_s \quad (2.7)$$

Величины с индексом ∞ относятся к условиям в набегающем потоке, с индексом s – к условиям на искомом контуре $y_s = y_s(x)$, \mathbf{n} – орт нормали к кривой $y_s = y_s(x)$, направленный в сторону набегающего потока, \mathbf{p}_n – вектор напряжения на площадке с нормалью \mathbf{n} .

Вместе с (1.5) соотношения (2.5)–(2.7) в двумерных задачах дают пять уравнений для определения пяти величин: $v_{1s}, v_{2s}, \rho_s, p_s, H_s$ (или T_s), зависящих от угла наклона скачка $\beta_s = \beta - \alpha$. Из условия (2.5) и векторного условия (2.6), взятого в проекции на касательную к кривой $y_s = y_s(x)$, можно найти компоненты вектора скорости на

обращенной к телу стороне структуры УВ:

$$v_{1s} = u_i - \frac{\cos \beta_s}{\rho_\infty V_\infty \sin \beta} \tau_{nts} \quad (2.8)$$

$$v_{2s} = v_i - \frac{\sin \beta_s}{\rho_\infty V_\infty \sin \beta} \tau_{nts} = v_{1s} \operatorname{tg} \beta_s - k V_\infty \frac{\sin \beta}{\cos \beta_s} \quad (2.9)$$

где

$$u_i = V_\infty \cos^2 \beta_s [(1 + k \operatorname{tg}^2 \beta_s) \cos \alpha - (1 - k) \operatorname{tg} \beta_s \sin \alpha]$$

$$v_i = -V_\infty \cos^2 \beta_s [(k + \operatorname{tg}^2 \beta_s) \sin \alpha - (1 - k) \operatorname{tg} \beta_s \sin \alpha] = u_i \operatorname{tg} \beta_s - k V_\infty \frac{\sin \beta}{\cos \beta_s} \quad (2.10)$$

$$\tau_{nts} = \cos^2 \beta_s [\tau_{xy} (1 - \operatorname{tg}^2 \beta_s) + (\tau_{yy} - \tau_{xx}) \operatorname{tg} \beta_s]_s$$

Здесь u_i, v_i – компоненты вектора скорости по осям x, y за УВ в идеальном газе (при отсутствии вязкости), $\tau_{nts} = p_{nts}$ – проекция вектора вязких напряжений $\hat{\tau} \cdot \mathbf{n}$ на касательную к контуру $y_s = y_s(x)$, $k = \rho_\infty / \rho_\infty \rho_s = \rho_s^{-1}$ – отношение плотности в набегающем потоке к плотности за скачком (на искомом контуре $y_s = y_s(x)$).

Из оставшихся уравнений (2.6), (2.7) и уравнения состояния (1.5) получаем остальные величины на искомом контуре:

$$p_s = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + (1 - k) \sin^2 \beta + \frac{\tau_{nns}}{\rho_\infty V_\infty^2}$$

$$H_s = H_\infty + \frac{1}{\rho_\infty V_\infty \sin \beta} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})_s \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{\rho_s} \equiv k = \frac{R_A T_s}{V_\infty^2 p_s} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{T_s}{T_0}$$

где

$$\tau_{nns} = \cos^2 \beta_s (\tau_{yy} + \tau_{xx} \operatorname{tg}^2 \beta_s - 2\tau_{xy} \operatorname{tg} \beta_s)_s \quad (2.12)$$

$$(\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})_s = \cos \beta_s (J_{Hy} - J_{Hx} \operatorname{tg} \beta_s)_s, \quad T_0 = \frac{V_\infty^2}{2c_p}$$

T_0 – температура адиабатически заторможенного набегающего потока (за вычетом температуры набегающего потока).

Соотношения (2.8), (2.9), (2.11) переходят в соотношения Ренкина – Гюгоньо на УВ нулевой толщины, если пренебречь вязкостью и теплопроводностью газа, т.е. при $Re \rightarrow \infty$. В этом случае при заданном угле $\beta_s = \beta_s(x)$ пяти соотношений (2.8), (2.9), (2.11) достаточно для определения пяти параметров за УВ. При наличии вязкости и теплопроводности этого сделать нельзя до решения задачи.

Условия (2.8), (2.9), (2.11) представляют собой граничные условия, иногда называемые условиями скольжения из-за несовпадения касательной составляющей скорости и полной энтальпии за УВ с соответствующими параметрами в невязком газе за счет эффектов вязкости и теплопроводности. Терпят разрыв касательная к УВ составляющая скорости ($u_{ts} \neq u_{t\infty}$) и полная энтальпия ($H_s \neq H_\infty$), которые в идеальном газе остаются непрерывными при переходе через скачок.

После решения задачи обычно требуется найти коэффициент давления

$$C_p = \frac{\rho_\infty V_\infty^2 p_w - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = 2 \left(p_w - \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \right) \quad (2.13)$$

коэффициент трения

$$C_f = \frac{\tau_{xyw}}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{\rho_\infty V_\infty^2} \left(\mu \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)_w \quad (2.14)$$

коэффициент конвективной теплопередачи

$$C_H = \frac{q_w}{\rho_\infty V_\infty (H_\infty - h_w)} = \left(\frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial y} \right)_w \frac{1}{\rho_\infty V_\infty (H_\infty - h_w)} \quad (2.15)$$

и суммарный коэффициент сопротивления плоского контура ($\nu = 0$) (на единицу длины размаха крыла, перпендикулярного скорости набегающего потока) или тела вращения ($\nu = 1$) с длиной дуги x

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{2F_z}{\rho_\infty V_\infty^2 \pi^\nu r_w^{\nu+1}(x)} = \frac{4}{\rho_\infty V_\infty^2 r_w^{\nu+1}} \int_0^x \left[\tau_{xy} \cos \alpha + (\rho_\infty V_\infty^2 p_w - p_\infty - \tau_{yy}) \sin \alpha \right] r_w^\nu dx = \\ &= \frac{4}{\rho_\infty V_\infty^2 r_w^{\nu+1}} \int_0^x \left[\left(\mu \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)_w \cos \alpha + (\rho_\infty V_\infty^2 p_w - p_\infty) \sin \alpha \right] r_w^\nu dx = \\ &= \frac{2}{r_w^{\nu+1}} \int_0^x (C_f \cos \alpha + C_p \sin \alpha) r_w^\nu dx \end{aligned} \quad (2.16)$$

где F_z – суммарная осевая сила, действующая на наветренную часть тела с длиной контура x .

3. Уравнения Навье – Стокса и граничные условия в переменных Дородницына – Лиза. При аналитическом и численном решении задач аэродинамики и теплообмена важно рационально выбрать как независимые, так и зависимые переменные. В теории ПС использование переменных Дородницына [28] в форме Лиза [29] приводит к более слабой зависимости искомых функций от коэффициентов уравнений, чем в исходных (физических) переменных, слабой зависимости (для ламинарных течений) толщины ПС от продольной координаты, возможности получения при определенных условиях автомодельных и квазиавтомодельных решений. Более того, было показано, что в переменных Дородницына в рамках модели тонкого невязкого ударного слоя толщина УС, профили скоростей и продольный градиент давления в окрестности критической точки не зависят от профилей плотности вдоль оси, переменность которых может быть обусловлена сжимаемостью или другими физико-химическими процессами в УС [30]. В указанных переменных устанавливается слабая зависимость отхода головной УВ от определяющих параметров задачи, а также законы подобия [31].

Так как все эффекты второго порядка в теории ПС являются поправками к результатам классического ПС и содержатся в композитной системе уравнений ВУС (разд. 6), отличающейся от полной системы уравнений НС малыми членами $O(Re^{-1} \sim Kn)$, то естественно записать исходную систему уравнений НС (1.1)–(1.5) и вытекающие из нее упрощенные модели в переменных Дородницына – Лиза. Поэтому в данной работе проводится идея, что если переменные Дородницына – Лиза эффективны для представления решений задач теории ПС, то они будут так же эффективны и для решения задач сверхзвукового обтекания в рамках более сложных газодинамических моделей, в частности модели ВУС, включая и полные уравнения НС.

Итак, преобразуем уравнения НС (1.1)–(1.5) и граничные условия на теле и УВ к новым независимым переменным

$$\xi = \xi(x), \quad \eta = \frac{1}{\Delta(x)} \int_0^y \rho \bar{r}^v dy, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_w} = 1 + y \frac{\cos \alpha}{r_w} \quad (3.1)$$

Здесь $\xi(x)$ и $\Delta(x)$ – произвольные пока функции, выбираемые далее из соображений простоты записи уравнений, нормировки физической толщины ПС или УС, а также для облегчения получения оценок и численных решений. Обратное к (3.1) преобразование будет

$$x = x(\xi), \quad \bar{r}^{v+1} = 1 + (v+1) \Delta \frac{\cos \alpha}{r_w} \int_0^\eta \frac{1}{\rho} d\eta \quad (3.2)$$

Определим функцию тока $(2\pi)^v \psi(x, y)$, используя уравнение (1.1), из системы уравнений

$$\partial \psi / \partial x = -H_1 r^v \rho_\infty \rho v_2, \quad \partial \psi / \partial y = r^v \rho_\infty \rho v_1 \quad (3.3)$$

и будем искать $\psi(x, y)$ в новых переменных в виде

$$\psi(x, y) = b(x) f(\xi, \eta), \quad b(x) = \rho_\infty u_* r_w^v \Delta \quad (3.4)$$

Функцию $f(\xi, \eta)$ назовем приведенной функцией тока, u_* – характерная скорость, выбираемая в каждой модели по-своему. Если ввести еще характерную скорость v_* и определить безразмерные проекции скорости

$$u = v_1 / u_*, \quad v = v_2 / v_* \quad (3.5)$$

то уравнения (3.3) преобразуются к виду

$$u = \partial f / \partial \eta, \quad \rho(k_1 u + k_2 v) = -(\beta_0 f + x \xi'(x) \partial f / \partial \xi) \quad (3.6)$$

Коэффициенты k_1, k_2, β_0 даются приводимыми ниже выражениями (3.13).

Введем безразмерные компоненты тензора вязких напряжений $\tau_{ij}(\xi, \eta)$ ($i, j = \xi, \eta, \zeta$) и безразмерные проекции вектора потока энергии $X(\xi, \eta)$ и $Y(\xi, \eta)$ по формулам

$$\begin{aligned} \tau_{xx}(x, y) &= \frac{\mu u_*}{x H_1} \tau_{\xi\xi}(\xi, \eta), \quad \tau_{yy}(x, y) = \frac{\mu u_*}{x H_1} \tau_{\eta\eta}(\xi, \eta) \\ \tau_{\varphi\varphi}(x, y) &= \frac{\mu u_*}{x H_1} \tau_{\zeta\zeta}(\xi, \eta) \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{\mu u_* \rho \bar{r}^v}{\Delta} \tau_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \frac{b u_*}{x H_1 r^v \text{Re}^* \Delta^2} \tau_{\xi\eta}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$J_x(x, y) = -\frac{\mu}{x H_1} X(\xi, \eta)$$

$$J_y(x, y) = -\frac{\mu \rho \bar{r}^v}{\Delta \sigma} Y(\xi, \eta) = -\frac{b}{x H_1 r^v \text{Re}^* \Delta^2 \sigma} Y(\xi, \eta)$$

$$\text{Re}^* = \frac{\rho_\infty u_*}{\mu \rho x H_1 \bar{r}^{2v}} \quad (3.8)$$

Тогда остальные уравнения (1.2)–(1.4) в переменных (3.1) при учете уравнений (3.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \beta_1 u^2 + k_3 uv + x\xi'(x)u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\ & = -\frac{V_\infty^2}{\rho u_*^2} \left(x\xi'(x) \frac{\partial p}{\partial \xi} + \rho k_1 \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\text{Re}^* \Delta^2} \tau_{\xi\eta} \right) + \frac{k_6}{\text{Re}^* \Delta^2} \tau_{\xi\eta} + \varepsilon_1 \tau'_{\xi\xi} - \varepsilon_2 \tau_{\zeta\zeta} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \beta_2 uv - \frac{1}{k_4} u^2 + x\xi'(x)u \frac{\partial v}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} = \\ & = -\frac{1}{k_5} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\varepsilon_3 \tau_{\eta\eta}) + \varepsilon_3 \tau'_{\xi\eta} - \varepsilon_4 \tau_{\xi\xi} - \varepsilon_5 \tau_{\zeta\zeta} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$x\xi'(x)u \frac{\partial H}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\text{Re}^* \Delta^2 \sigma} Y \right) + \varepsilon_1 X' \quad (3.11)$$

Здесь

$$\tau_{\xi\xi} = 2(\beta_1 u + k_3 v + Du) + (\zeta - \frac{2}{3}) \nabla' \cdot \mathbf{v}$$

$$\tau_{\eta\eta} = 2\rho k_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + (\zeta - \frac{2}{3}) \nabla' \cdot \mathbf{v}$$

$$\tau_{\xi\xi} = 2v(n_1 u + k_7 v) + (\zeta - \frac{2}{3}) \nabla' \cdot \mathbf{v}$$

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} - k_6 u + k_8 (\beta_2 v + Dv)$$

$$\tau'_{\xi\xi} = m_1 \tau_{\xi\xi} + \frac{1}{\mu} D(\mu \tau_{\xi\xi}) \quad (3.12)$$

$$\tau'_{\xi\eta} = m_2 \tau_{\xi\eta} + \text{Re}^* \Delta^2 D \left(\frac{1}{\text{Re}^* \Delta^2} \tau_{\xi\eta} \right)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{v} = \beta_1 u + k_3 v + v(n_1 u + k_7 v) + Du + \rho k_2 \partial v / \partial \eta$$

$$X = DH - D(v_1^2 + v_2^2) / 2 + \sigma u_*^2 (u \tau_{\xi\xi} + \rho k_2 v \tau_{\xi\eta})$$

$$X' = m_3 X + \frac{1}{\mu} D(\mu X)$$

$$Y = \frac{\partial H}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (v_1^2 + v_2^2) + \sigma u_*^2 \left(u \tau_{\xi\eta} + \frac{v_*^2}{u_*^2} \frac{v}{\rho k_2} \tau_{\eta\eta} \right)$$

$$D = x\xi'(x) \frac{\partial}{\partial \xi} + \rho k_1 \frac{\partial}{\partial \eta}$$

В систему уравнений (3.6), (3.9)–(3.11) входит ряд безразмерных коэффициентов, которые выражаются как через заданные, так и неизвестные до решения задачи величины u_* , v_* , R , r_w , α , ρ , Δ , y :

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{d \ln b}{d \ln x}, \quad \beta_1 = \frac{d \ln u_*}{d \ln x}, \quad \beta_2 = \frac{d \ln v_*}{d \ln x} \\ m_1 &= \beta_1 + \frac{v}{r} x H_1 \sin \alpha + \frac{y}{R H_1} \frac{d \ln R}{d \ln x} - 1 \\ m_2 &= 2\beta_1 + \frac{d \ln \Delta}{d \ln x} + \frac{v}{r_w} x \sin \alpha + \frac{y}{R H_1} \frac{d \ln R}{d \ln x} - 1 \\ m_3 &= m_1 - \beta_1, \quad n_1 = \frac{x H_1 \sin \alpha}{r_w} \\ k_1 &= \frac{x}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{x \xi'(x) \bar{r}^v}{\Delta} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad k_2 = \frac{x H_1 \bar{r}^v v_*}{u_* \Delta}, \quad k_3 = \frac{x v_*}{R u_*} \\ k_4 &= \frac{R v_*}{x u_*}, \quad k_5 = \frac{u_* v_* \Delta}{x H_1 \bar{r}^v V_\infty^2}, \quad k_6 = \frac{\Delta}{\rho H_1 \bar{r}^v R} \\ k_7 &= \frac{x H_1 v_* \cos \alpha}{r u_*}, \quad k_8 = \frac{v_* \Delta}{\rho u_* x H_1 \bar{r}^v} \\ \varepsilon_1 &= \frac{\mu}{\rho_\infty \rho u_* x H_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\mu \sin \alpha}{\rho_\infty \rho u_* r}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\mu \bar{r}^v}{\rho_\infty v_* \Delta} \\ \varepsilon_4 &= \frac{\mu}{\rho_\infty \rho v_* R H_1}, \quad \varepsilon_5 = v \frac{\mu \cos \alpha}{\rho_\infty \rho v_* r}\end{aligned}\tag{3.13}$$

Исключим из уравнения (3.9) производную $dp/d\eta$ с помощью уравнения (3.10) и одновременно слагаемое $k_3 uv$ с помощью второго уравнения (3.6). Тогда получим более простое и удобное для дальнейшего анализа и решения уравнение импульсов в проекции на ось x

$$\begin{aligned}\beta_1 u^2 + x \xi'(x) u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x \xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + k_6 u \right) = \\ = -\frac{V_\infty^2}{\rho u_*^2} x \xi'(x) \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\text{Re}^* \Delta^2} \tau_{\xi\eta} \right) + \frac{k_6}{\text{Re}^* \Delta^2} \tau_{\xi\eta} + \Phi_1 + \Phi_2\end{aligned}\tag{3.14}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \varepsilon_1 \tau'_{\xi\xi} - \varepsilon_2 \tau_{\zeta\zeta} - \rho k_1 k_8 \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (\varepsilon_3 \tau_{\eta\eta}) + \varepsilon_3 \tau'_{\xi\eta} - \varepsilon_4 \tau_{\xi\xi} - \varepsilon_5 \tau_{\zeta\zeta} \right] \\ \Phi_2 &= \rho k_1 k_8 \left[\beta_2 uv + x \xi'(x) \frac{\partial v}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x \xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right]\end{aligned}\tag{3.15}$$

Таким образом, окончательная система уравнений НС в переменных ξ , η будет состоять из шести уравнений (1.5), (3.6), (3.10), (3.11), (3.14) для определения шести функций: u , f , v , p , ρ , T (или H).

Граничные условия на стенке (2.1) в новых переменных будут

$$u(\xi, 0) = 0, \quad v(\xi, 0) = f(\xi, 0) = 0$$

$$\frac{\mu\rho}{\sigma\Delta} \frac{\partial H}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \varepsilon\sigma_B T_w^4(\xi, 0) \quad \text{или} \quad T(\xi, 0) = T_w(\xi) \quad (3.16)$$

Граничные условия в набегающем потоке (2.2) для решения полной системы уравнений НС (1.5), (3.6), (3.10), (3.11), (3.14) будут

$$u(\xi, \infty) = \frac{v_{1\infty}}{u_*} = \frac{V_\infty \cos \alpha}{u_*}, \quad v(\xi, \infty) = \frac{v_{2\infty}}{v_*} = -\frac{V_\infty \sin \alpha}{v_*}$$

$$\rho(\xi, \infty) = 1, \quad p(\xi, \infty) = \frac{1}{\gamma M_\infty^2}, \quad H(\xi, \infty) = H_\infty \equiv h_\infty + \frac{V_\infty^2}{2} \quad (3.17)$$

Граничные условия на УВ (на разделяющейся поверхности $y_s = y_s(x)$) (2.8), (2.9), (2.11) для решения упрощенных уравнений НС при учете (2.10)–(2.12), (3.7) запишем в виде

$$u(\xi, \eta_s) = \frac{u_i}{u_*} - m_{4s} \frac{\cos^3 \beta_s}{\sin \beta} \left[\frac{\tau_{\xi\eta}}{\text{Re}^* \Delta^2} (1 - \text{tg}^2 \beta_s) - \varepsilon_6 (\tau_{\eta\eta} - \tau_{\xi\xi}) \text{tg} \beta_s \right]_s$$

$$v(\xi, \eta_s) = \frac{u_*}{v_*} u(\xi, \eta_s) - k \frac{V_\infty \sin \beta}{v_* \cos \beta_s}$$

$$p(\xi, \eta_s) = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + (1 - k) \sin^2 \beta +$$

$$+ m_{5s} \cos^2 \beta_s \left[-\frac{2\tau_{\xi\eta}}{\text{Re}^* \Delta^2} \text{tg} \beta_s + \varepsilon_6 (\tau_{\eta\eta} + \tau_{\xi\xi} \text{tg}^2 \beta_s) \right]_s \quad (3.18)$$

$$H(\xi, \eta_s) = H_\infty - m_{4s} \frac{\cos \beta_s}{\sin \beta} \left(\frac{1}{\text{Re}^* \Delta^2 \sigma} Y - \varepsilon_6 X \right)_s$$

$$k = \frac{1}{\rho_s} = \frac{R_A T_s}{V_\infty^2 \rho_s} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{T_s}{T_0}$$

где

$$m_4 = \frac{u_* \Delta}{V_\infty x H_1 \bar{r}^\nu} \quad (3.19)$$

$$m_5 = \frac{u_*^2 \Delta}{V_\infty^2 x H \bar{r}^\nu} = m_4 \frac{u_*}{V_\infty}, \quad \varepsilon_6 = \frac{\mu \bar{r}^\nu}{\rho_\infty u_* \Delta}, \quad \eta_s = \frac{1}{\Delta} \int_0^{y_s(x)} \rho \bar{r}^\nu dy$$

Индекс s в (3.18), (3.19) означает, что соответствующие выражения должны вычисляться при $y_s = y_s(x)$.

Для фактического решения задач удобно заменить второе условие (3.18) на эквивалентное условие, наложенное на функцию $f(\xi, \eta)$. Из второго уравнения (3.6), записанного на УВ, получаем

$$f_s(\xi) \equiv f(\xi, \eta_s) = \frac{V_\infty r_w \bar{r}_s^{\nu+1}}{(\nu+1) u_* \Delta} \quad (3.20)$$

Можно также показать, что соотношение (3.20) является следствием записанного в переменных ξ, η закона сохранения массы газа, протекающего через замкнутый контур $ONQO_s$ (фиг. 1).

Связь между функцией $\Delta(x)$ и физическим отходом УВ вытекает из второго уравнения (3.2), записанного при $y_s = y_s(x)$:

$$y_s \frac{\cos \alpha}{r_w} = \left[1 + (\nu + 1) \Delta \frac{\cos \alpha}{r_w} \int_0^{\eta_s} \frac{1}{\rho} d\eta \right]^{\frac{1}{\nu+1}} - 1 \quad (3.21)$$

Исключая $\bar{r}_s^{\nu+1}$ из (3.20) и (3.21), получим вместо (3.20) условие для приведенной функции тока на УВ

$$f_s(\xi) \equiv f(\xi, \eta_s) = \frac{V_\infty r_w}{(\nu + 1) u_* \Delta} \left[1 + (\nu + 1) \Delta \frac{\cos \alpha}{r_w} \int_0^{\eta_s} \frac{1}{\rho} d\eta \right] \quad (3.22)$$

не содержащее физической отход УВ $y_s = y_s(x)$. Это условие дает явную связь между функцией Δ и функцией f на УВ. Формула (3.21) принимает совсем простой вид в плоском случае ($\nu = 0$):

$$y_s(x) = \Delta \int_0^{\eta_s} \frac{1}{\rho} d\eta \quad (3.23)$$

Коэффициенты трения (2.14), теплопередачи (2.15) и сопротивления (2.16) в переменных (3.1) будут

$$C_f = \frac{2u_*}{V_\infty K_w \Delta} \frac{\partial u(\xi, 0)}{\partial \eta} = \frac{2u_*}{V_\infty K_* \bar{\Delta}} \left(l \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_w \quad (3.24)$$

$$C_H = \frac{1}{K_w \Delta \sigma} \frac{1}{H_\infty - h_w} \frac{\partial H(\xi, 0)}{\partial \eta} = \frac{1}{K_* \bar{\Delta} (H_\infty - h_w)} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_w$$

$$C_D = C_{Dp} + C_{Df}$$

где

$$C_{Dp} = \frac{4}{r_w^{\nu+1}(x)} \int_0^x \left(p_w - \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \right) r_w^\nu \sin \alpha dx = \frac{2}{r_w^{\nu+1}(x)} \int_0^x C_p r_w^\nu \sin \alpha dx$$

$$C_{Df} = \frac{4}{r_w^{\nu+1}(x)} \int_0^x \frac{u_* \cos \alpha}{V_\infty K_w \Delta} \frac{\partial u(\xi, 0)}{\partial \eta} r_w^\nu dx = \frac{2}{r_w^{\nu+1}(x)} \int_0^x C_f r_w^\nu \cos \alpha dx \quad (3.25)$$

$$K_w = \frac{\rho_\infty V_\infty}{(\mu \rho)_w}, \quad K_* = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_* \rho_*}, \quad l = \frac{\mu \rho}{\mu_* \rho_*}, \quad \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{R_0}$$

Здесь μ_* и ρ_* – коэффициент вязкости и безразмерная плотность, взятые в каком-либо сечении $\eta = \eta_*$ УС, R_0 – характерный линейный размер задачи, например радиус кривизны тела в вершине. Суммарный коэффициент сопротивления C_D представлен в виде суммы невязкого и вязкого коэффициентов сопротивлений.

4. Оценка порядка коэффициентов безразмерной системы уравнений Навье–Стокса. При сверх- и гиперзвуковом обтекании затупленных тел характерным определяющим параметром является отношение плотностей $k = \rho_\infty / (\rho_\infty \rho_s)$ до и сразу после головного скачка уплотнения и число Re . Для совершенного двухатомного газа с постоянными

теплоемкостями при больших числах Маха и Re параметр k можно вычислять явно, и его наибольшее значение в УС равно $k = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. В этом случае параметр k становится определяющим. Для газа при учете физико-химических процессов вязкости и теплопроводности в УС эта величина меняется от 0,05 до 0,2, при метеорных скоростях порядка нескольких десятков километров в секунду k становится еще меньше [30]. При движении тел в атмосфере Земли с числами Маха $M_\infty \geq 6$ этот параметр определяет толщину УС $y_s \sim kR_0$ [30] (см. также (3.23)) и будет далее варьироваться как определяющий параметр от единицы до нуля. Число Re также является определяющим параметром и характеризует толщину ПС и толщину структуры УВ, и будет варьироваться от бесконечности до нуля.

Сделаем оценку порядков коэффициентов уравнений НС (3.6), (3.10), (3.11), (3.14) в зависимости от параметра k и числа Re.

Из выражений (3.13) при произвольном выборе характерных скоростей u_* и v_* и масштабной функции $\Delta(x)$ для достаточно гладких тел всегда имеем

$$\beta_0 \sim \beta_1 \sim \beta_2 \sim 1, \quad m_1 \sim m_2 \sim m_3 \sim n_1 \sim 1 \quad (4.1)$$

Порядок функции $\Delta(x)$ в (3.1) определим из условия, что переменная η как в масштабе толщины ПС, так и в масштабе толщины УС должна быть порядка единицы. Тогда далее для всех гидродинамических моделей будут справедливы оценки

$$y \sim k\Delta, \quad y_s \sim k\Delta \quad (4.2)$$

Оценки (4.2) пока не несут окончательной информации о порядке толщин областей течения около тела, поскольку порядок функции $\Delta(x)$ пока не определен. Фактически порядок $\Delta(x)$ будет определяться исходя из масштаба поперечного размера рассматриваемой той или иной области течения. Остальные коэффициенты в уравнениях НС (3.6), (3.10), (3.11), (3.14) будут иметь разный порядок для невязкой части УС и ПС, так как в них входят параметры (функции) $u_*(x)$, $v_*(x)$ и $\Delta(x)$, определяющие характерные скорости в этих областях и их поперечные размеры.

Получим порядки этих коэффициентов сначала для УС, исходя из масштабов

$$u_* \sim V_\infty, \quad v_* \sim u_i \sim kV_\infty \quad (4.3)$$

вытекающих из граничных условий (3.18) и (2.10).

Выберем $\Delta(x)$ из условия нормировки отхода УВ в переменных (3.1):

$$\Delta(x) = \int_0^{y_s(x)} \rho \bar{r}^v dy \sim R_0 \quad (4.4)$$

Порядок $\Delta(x)$ в (4.4) получен с учетом первого уравнения (3.6), масштаба (4.3) для u_* и соотношения (3.20), принимая во внимание, что в нем $\eta_s = 1$. Тогда в переменных (3.1) с учетом (4.4) физическая область интегрирования ударного слоя преобразуется в полуполосу: $0 \leq \xi(x) \leq \xi_*$, $0 < \eta < 1$, т. е. $\eta \sim 1$. Отсюда для коэффициентов k_i ($i = 1, \dots, 8$) (3.13), имея в виду, что $H_1 \sim \bar{r} \sim 1 + k \sim 1$, получаем

$$k_1 \sim k_2 \sim k_3 \sim k_4 \sim k_5 \sim k_6 \sim k_7 \sim k, \quad k_8 \sim k^2 \quad (4.5)$$

Из (3.13) и (4.3) находим порядок коэффициентов ε_i ($i = 1, \dots, 5$) в УС:

$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim k / \text{Re}, \quad \varepsilon_3 \sim 1 / (k \text{Re}), \quad \varepsilon_4 \sim \varepsilon_5 \sim 1 / \text{Re} \quad (4.6)$$

где

$$\text{Re} = \frac{\rho_\infty u_* R_0}{\mu} \sim \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu(T_0)} \quad (4.7)$$

Оценки для безразмерных компонент тензора вязких напряжений τ_{ij} ($i, j = \xi, \tau, \zeta$) и потоков X, Y (3.12) будут

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\xi} \sim \tau_{\eta\eta} \sim \tau_{\zeta\zeta} \sim \tau_{\xi\eta} \sim \tau'_{\xi\xi} \sim \tau'_{\xi\eta} \sim 1 \\ X \sim X' \sim Y \sim \Delta H, \quad \Delta H = H_\infty - h_w \sim V_\infty^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Порядок коэффициентов (3.19) в условиях на УВ (3.18) будет

$$m_{4s} \sim m_{5s} \sim 1, \quad \varepsilon_{6s} \sim \text{Re}_s^{-1} \quad (4.9)$$

где

$$\text{Re}_s = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_s} \quad (4.10)$$

Граничные условия на стенке (3.16) и в набегающем потоке (3.17) не меняют вышеприведенных оценок.

Далее рассмотрим все возможные предельные случаи при $0 < k < 1$ во всем диапазоне чисел Re от бесконечности до нуля.

5. Уравнения пограничного слоя ($\text{Re} \rightarrow \infty, k \sim 1$, в уравнениях НС остаются члены порядка единицы). Пусть $\text{Re}_s = \rho_\infty V_\infty R_0 / \mu_s \rightarrow \infty$, где μ_s — значение вязкости непосредственно за УВ. Параметр $k \sim 1$. Тогда из предположения, что вязкие члены в уравнении (3.14) при $\text{Re}_s \rightarrow \infty$ имеют одинаковый порядок с инерционными только в слое малой толщины около стенки (пограничном слое) $y_\delta \ll R_0$ (основная гипотеза Прандтля при выводе уравнений ПС), следует оценка ($u \sim 1, f \sim 1, u_* \sim V_\infty$)

$$\text{Re}^* \Delta^2 = \frac{\rho_\infty u_* \Delta^2}{\mu r x H_1 \bar{r}^{2\nu}} \sim K \bar{\Delta}^2 \sim 1 \quad (5.1)$$

где

$$K = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu r} \sim k \text{Re}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu} \quad (5.2)$$

Отсюда

$$\bar{\Delta} \sim K^{-1/2} \sim \text{Re}^{-1/2} \quad (5.3)$$

Тогда из (4.2) получаем известный результат для толщины ПС

$$y / R_0 \sim y_\delta / R_0 \sim \sqrt{k / \text{Re}} \sim \text{Re}^{-1/2} \quad (5.4)$$

Из второго уравнения (3.6), являющегося следствием уравнения неразрывности (1.1), следует, что $k_2 \sim 1$, откуда получаем также известный результат для порядка величины нормальной составляющей скорости

$$v_* / u_* \sim v_* / V_\infty \sim v / V_\infty \sim \bar{\Delta} \sim \text{Re}^{-1/2} \quad (5.5)$$

Учитывая (5.3), (5.4), заключаем, что остальные коэффициенты (3.13) будут иметь следующий порядок ($k \sim 1$):

$$k_1 \sim 1, \quad k_3 \sim k_4 \sim k_6 \sim k_7 \sim \text{Re}^{-1/2}, \quad k_5 \sim k_8 \sim \text{Re}^{-1} \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim \text{Re}^{-1}, \quad \varepsilon_3 \sim 1, \quad \varepsilon_4 \sim \varepsilon_5 \sim \text{Re}^{-1/2} \quad (5.7)$$

В силу того, что оператор D , примененный к искомым функциям в (3.12), имеет порядок единицы, следуют справедливые при $Re \rightarrow \infty$ с учетом (4.1) оценки (4.8). Отсюда, принимая во внимание (5.6), (5.7), находим (см. (3.15))

$$\Phi_1 \sim \Phi_2 \sim Re^{-1}$$

Устремляя число Re к бесконечности и оставляя в уравнениях (3.14), (3.10), (3.11) только члены порядка единицы (теория ПС первого порядка или классическая теория ПС), получим уравнения ПС:

$$\begin{aligned} \beta_1 u^2 + x\xi'(x)u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\ = -\frac{V_\infty^2}{\rho u_*^2} x\xi'(x) \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{Re^* \Delta^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + O(Re^{-1/2}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = O(Re^{-1/2}) \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} x\xi'(x)u \frac{\partial H}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial H}{\partial \eta} = \\ = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{Re^* \Delta^2 \sigma} \left[\frac{\partial H}{\partial \eta} + (\sigma - 1)u_*^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] \right\} + O(Re^{-1/2}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Сюда следует присоединить систему (3.6), которая после отбрасывания членов порядка Re^{-1} во втором уравнении, в котором ведущие члены имеют порядок $Re^{-1/2}$, будет

$$u = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad v_2 = -v_1 \xi'(x) \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\Delta u_*}{\rho x} \left[\beta_0 f + x\xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \quad (5.11)$$

В системе (5.8)–(5.11) остаются произвольными две функции $\xi(x)$ и $\Delta(x)$. Умножая уравнения (5.8) и (5.10) на $c\xi/(x\xi'(x))$ и выбирая функции $\xi(x)$ и $\Delta(x)$ из условий (c – искомая постоянная)

$$\frac{c\xi}{x\xi'(x)} \beta_0 = 1, \quad \frac{c\xi}{x\xi'(x)} \frac{1}{Re^* \Delta^2} = l, \quad l = \frac{\mu\rho}{\mu_*\rho_*} = \frac{\mu\rho_\infty\rho}{\mu_*\rho_\infty\rho_*}$$

найдем преобразование Дородницына–Лиза

$$\xi(x) = \int_0^x \mu_* \rho_\infty \rho_* u_* r_w^{2\nu} dx, \quad \eta = \frac{\rho_\infty u_* r_w^\nu}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy = \sqrt{\frac{K_*}{2\bar{X}}} \int_0^y \rho d\bar{y} \quad (5.12)$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{2\xi}}{\rho_\infty u_* r_w^\nu} = R_0 \sqrt{\frac{2\bar{X}}{K_*}}, \quad b = \sqrt{2\xi}, \quad c = 2 \quad (5.13)$$

где

$$\bar{X} = \frac{\xi}{\xi'(x)R_0}, \quad K_{**} = \frac{\rho_\infty u_* R_0}{\mu_* \rho_*} = \frac{u_*}{V_\infty} K_*, \quad \bar{y} = \frac{y}{R_0} \quad (5.14)$$

Звездочка относится к условиям в каком-либо характерном сечении $\eta = \eta_*$. ПС, функцию $X = \bar{X}R_0$ можно назвать эффективной длиной пластины, так как переменная η в

(5.12) переходит в автомодельную переменную Блазиуса, если в ней заменить X на x – расстояние от передней кромки пластины.

В переменных ξ, η (5.12) уравнения (5.8)–(5.11) примут известный вид

$$u = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad v_2 = -\frac{v_1}{X} 2\xi \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{u_*}{\rho \sqrt{2\bar{X}K_{**}}} \left(f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (5.15)$$

$$2\xi u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{V_\infty^2}{\rho u_*^2} 2\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} - \beta_1 u^2 + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(l \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (5.16)$$

$$2\xi u \frac{\partial H}{\partial \xi} - \left(f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{l}{\sigma} \left[\frac{\partial H}{\partial \eta} + (\sigma - 1) u_*^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] \right\} \quad (5.17)$$

Решение этих уравнений согласно методу сращиваемых асимптотических разложений при удержании членов порядка единицы должно сопрягаться с решением уравнений Эйлера (уравнений НС, рассматриваемых вне ПС при $Re \rightarrow \infty$ и удержании членов $O(1)$) при $y \rightarrow 0$. Уравнение импульсов вдоль оси x для невязкого газа, записанное на теле (при $y \rightarrow 0$), дает

$$-\frac{V_\infty}{\rho_e u_e^2} 2\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} = \beta, \quad \beta = 2 \frac{d \ln u_e}{d \ln \xi} \quad (5.18)$$

где $u_e \equiv v_{1e}$ – скорость невязкого течения на теле. Если далее принять за характерную скорость $u_* = u_e$ и воспользоваться (5.18) для исключения $\partial p / (\partial \xi)$ из уравнения (5.16), то оно примет окончательный вид, обычно используемый для решения задач ПС

$$2\xi u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \beta \left(\frac{\rho_e}{\rho} - u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(l \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (5.19)$$

Граничными условиями для системы (5.15), (5.17), (5.19) на теле остаются условия (3.16). На внешней границе при $\eta \rightarrow \infty$ эти условия будут

$$u(\xi, \infty) = 1, \quad H(\xi, \infty) = H_e = H_\infty \quad (5.20)$$

Для этой параболической задачи разработаны многочисленные приближенные и эффективные численные методы решения. После ее решения коэффициенты трения и теплопередачи (3.24) с учетом (5.13) будут вычисляться по формулам

$$C_f = \frac{\tau_{xyw}}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \left(\frac{u_e}{V_\infty} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{K_{**} \bar{X}}} \left(l \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_w, \quad K_{**} = \frac{\rho_\infty u_* R_0}{\mu_* \rho_*} = \frac{\rho_\infty u_e R_0}{\mu_* \rho_*} \quad (5.21)$$

$$C_H = \frac{q_w}{\rho_\infty V_\infty (H_\infty - h_w)} = \frac{u_e}{V_\infty} \frac{1}{\sqrt{2K_{**} \bar{X}}} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_w \frac{1}{H_e - h_w} \quad (5.22)$$

6. Уравнения вязкого ударного слоя ($Re \rightarrow \infty, k \sim 1$, в уравнениях НС удерживаются члены $O(1)$ и $O(Re^{-1/2})$). Устремляя в уравнениях НС (3.6), (3.10), (3.11) и (3.14) число Re к бесконечности и оставляя в них члены порядка $Re^{-1/2}$, учитывая при этом, что во всем УС, включая ПС, остаются справедливыми оценки (4.1), (4.2), а в ПС – оценки (5.3)–(5.7) и (4.8), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = u, \quad \rho(k_1 u + k_2 v) = - \left(\beta_0 f + x \xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} & \beta_1 u^2 + x\xi'(x)u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + k_6 u \right) = \\ & = -\frac{V_\infty^2}{\rho u_*^2} x\xi'(x) \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\text{Re}^* \Delta^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - k_6 u \right) \right] + \frac{k_6}{\text{Re}^* \Delta^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \\ & + \rho k_1 k_8 \left[\beta_2 uv + x\xi'(x)u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + O(\text{Re}^{-1}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\frac{u_*^2 \Delta}{V_\infty^2 H_1 \bar{r}^v R} u^2 = \frac{\partial p}{\partial \eta} + O(\text{Re}^{-1}) \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} & x\xi'(x)u \frac{\partial H}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial H}{\partial \eta} = \\ & = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{\text{Re}^* \Delta^2 \sigma} \left[\frac{\partial H}{\partial \eta} + u_*^2 \left((\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \sigma k_6 u^2 \right) \right] \right\} + O(\text{Re}^{-1}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Заметим, что последний член справа в квадратных скобках в уравнении (6.2) имеет, согласно оценкам (5.6), порядок Re^{-1} и должен быть опущен. Однако он оставлен впрок для получения уравнений ВУС, равномерно пригодных во всем УС (см. далее).

Для этой системы граничные условия на стенке остаются прежними (3.16). Из уравнения (6.3) следует важный вывод – давление поперек ПС во втором приближении может меняться только за счет центробежных сил. Для его определения, согласно уравнению первого порядка по координате η (6.3), необходимо одно граничное условие на внешней границе ПС (давление на стенке неизвестно). В качестве внешних граничных условий для уравнений (6.1)–(6.4) не может быть взято решение уравнений Эйлера на стенке, так как во втором приближении оно (внешнее решение) будет возмущено вязкостью и теплопроводностью, в частности толщиной вытеснения ПС и влиянием завихренности невязкого течения через сопряжение с решением ПС во втором приближении [6]. Поэтому (в качестве альтернативы асимптотическому методу сращиваемых внешних и внутренних разложений) для получения замкнутой задачи во втором приближении теории ПС обратимся к получению композитной системы уравнений, равномерно описывающей одновременно как область невязкого, так и область вязкого течений во всем УС с граничными условиями на разделительной линии $y_s = y_s(x)$ с точностью до членов порядка Re^{-1} . Для этого нужно оценить и оставить в системе уравнений НС (3.6), (3.10), (3.11), (3.14) и граничных условиях (3.18) при $\text{Re} \rightarrow \infty$ члены $O(1)$ и $O(\text{Re}^{-1/2})$ во внешней невязкой области ударного слоя. В этом случае в противоположность оценки членов в ПС будем исходить из оценок (4.5), (4.6), (4.8), справедливых в невязкой части ударного слоя. Тогда получим

$$\Phi_1 \sim \text{Re}^{-1}, \quad \Phi_2 \sim 1 \quad (6.5)$$

Таким образом, оправдано оставление последнего члена справа в уравнении (6.2). Тогда при $\text{Re} \rightarrow \infty$ из (3.9)–(3.11) получаем систему уравнений Эйлера в переменных ξ, η . К этой системе должны быть добавлены уравнения (6.1). Следовательно, учет членов порядка $\text{Re}^{-1/2}$ не добавляет к уравнениям Эйлера в невязкой области УС дополнительных членов в противоположность системе в вязкой области (6.1)–(6.4), которая по сравнению с уравнениями ПС первого приближения содержит дополнительные члены порядка $\text{Re}^{-1/2}$. Таким образом, влияние вязкости и теплопроводности на невязкое течение в УС во втором приближении осуществляется через условие сопряжения решения уравнений Эйлера при $y \rightarrow 0$ с решением уравнений ПС во втором приближении.

Теперь для получения композитной системы уравнений, описывающей течение во всем УС, с учетом членов второго порядка упрощенное уравнение (6.3) в системе (6.1)–(6.4) следует заменить на полное уравнение движения невязкой жидкости, т. е.

$$\beta_2 u v - \frac{1}{k_4} u^2 + x \xi'(x) u \frac{\partial v}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x \xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} = - \frac{1}{k_5} \frac{\partial p}{\partial \eta} + O(\text{Re}^{-1}) \quad (6.6)$$

содержащее справа члены порядка единицы в невязкой области, которые становятся членами порядка Re^{-1} и $\text{Re}^{-1/2}$ (второй член справа) в вязкой области.

Итак, композитной системой уравнений, учитывающей все эффекты второго порядка, будет система уравнений ВУС (6.1), (6.2), (6.6) и (6.4). Заметим, что в системе ВУС прямое влияние вязкости в уравнении импульсов по нормали (6.6) имеет эффект третьего порядка Re^{-1} , хотя эффекты второго порядка, связанные с кривизной, входят в коэффициенты уравнения непосредственно. В уравнении же импульсов в проекции на ось x (6.2) влияние вязкости проявляется уже в первом и втором порядке.

Тем не менее уравнения ВУС равномерно пригодны до членов $O(\text{Re}^{-1/2})$ включительно во всем УС. Это весьма важное и принципиальное упрощение уравнений НС, приводящее к уравнениям ВУС, если иметь в виду, что сами уравнения НС асимптотически верны только при учете членов порядка оставленных в системе уравнений (6.1), (6.2), (6.4) и (6.6).

Обратимся к асимптотическому упрощению граничных условий на УВ для уравнений ВУС. Имея в виду, что вязкость во втором порядке проявляется во всем УС, следует воспользоваться для Δ оценкой (5.3). Тогда для коэффициентов (3.19) в условиях (3.18) получаем оценки

$$\frac{m_4}{\text{Re}^* \Delta^2} = \frac{\mu \bar{r}^v}{\rho_\infty V_\infty \Delta} = \frac{\bar{r}^v}{K \bar{\Delta}} \sim K^{-1/2}, \quad m_4 \varepsilon_6 = \frac{\mu}{\rho_\infty V_\infty x H_1} \sim \text{Re}^{-1} \quad (6.7)$$

$$\frac{m_5}{\text{Re}^* \Delta^2} = \frac{u_*}{V_\infty} \frac{\mu \bar{r}^v}{\rho_\infty V_\infty \Delta} \sim K^{-1/2}, \quad m_5 \varepsilon_6 = \frac{\mu u_*}{\rho_\infty V_\infty x H_1} \sim \text{Re}^{-1}$$

Сохраняя в соотношениях (3.18) члены $O(1)$ и $O(\text{Re}^{-1/2})$ с учетом (6.7) получаем так называемые обобщенные условия Ренкина–Гюгонио

$$u(\xi, \eta_s) = \frac{u_i}{u_*} - \left[\frac{\bar{r}^v \cos^3 \beta_s (1 - \text{tg}^2 \beta_s)}{K \bar{\Delta} \sin \beta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_s$$

$$p(\xi, \eta_s) = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + (1 - k) \sin^2 \beta - \left(\frac{u_*}{V_\infty} \frac{\bar{r}^v 2 \cos^2 \beta_s \text{tg} \beta_s}{K \bar{\Delta}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_s \quad (6.8)$$

$$H(\xi, \eta_s) = H_\infty - \frac{\bar{r}^v \cos \beta_s}{K \bar{\Delta} \sin \beta} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial \eta} + u_*^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]$$

$$K = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu \rho}$$

Эти условия не учитывают того факта, что при подходе к УВ волне становится большой производная $(\partial v)/(\partial \eta)$. Оставляя эту производную в соотношениях (3.18), получим более сложные, чем (6.8), условия на искомой УВ

$$u(\xi, \eta_s) = \frac{u_i}{u_*} - \frac{\bar{r}^v \cos^3 \beta_s (1 - \text{tg}^2 \beta_s)}{K \bar{\Delta} \sin \beta} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{2 u_*}{u_*} \frac{\bar{r}^v \cos^3 \beta_s \text{tg} \beta_s}{K \bar{\Delta} \sin \beta} \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$p(\xi, \eta_s) = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + (1-k) \sin^2 \beta - \frac{u_*}{V_\infty} \frac{2\bar{r}^v \cos^2 \beta_s \operatorname{tg} \beta_s}{K\bar{\Delta}} \frac{\partial u}{\partial \eta} +$$

$$+ \frac{\rho v_* \bar{r}^v \cos^2 \beta_s}{V_\infty K\bar{\Delta}} \left[\zeta + \frac{4}{3} + \left(\zeta - \frac{2}{3} \right) \operatorname{tg}^2 \beta_s \right] \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (6.9)$$

$$H(\xi, \eta_s) = H_\infty - \frac{\bar{r}^v \cos \beta_s}{K\bar{\Delta} \sin \beta} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial \eta} + u_*^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\zeta + \frac{4}{3} - \frac{1}{\sigma} \right) v_*^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\bar{r}^v u_* v_* \cos \beta_s \operatorname{tg} \beta_s}{K\bar{\Delta} \sin \beta} \left[\left(\zeta - \frac{2}{3} \right) u - \frac{v_* \xi}{X u_* H_1} \frac{\partial y}{\partial \xi} v \right] \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

Если не считать параметр k малым, то дополнительные (третьи) слагаемые в условиях (6.9) имеют тот же порядок $K^{-1/2}$, что и "вязкие" члены в (6.8). Второе условие (3.18) заменяется эквивалентным условием (3.20) или (3.22). Отход УВ будет затем находиться из (3.20) или (3.21).

Запишем уравнения ВУС в переменных ПС (5.12), тогда в них будет явно виден вклад эффектов второго приближения при сравнении с уравнениями ПС (5.15), (5.17), (5.19), записанных в этих же переменных. Опуская выкладки, подобные приведенным в разд. 5, найдем

$$u = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad v_2 = \frac{\xi}{X H_1} \frac{\partial y}{\partial \xi} u_* u - \frac{u_* \left(f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)}{\rho H_1 \bar{r}^v \sqrt{2\bar{X} K_*}} \quad (6.10)$$

$$\beta_{1\xi} u^2 + 2\xi u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + k_6 u \right) =$$

$$= -\frac{V_\infty^2}{\rho u_*^2} 2\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathcal{L} \tau_{\xi\eta}) + a \frac{\partial u}{\partial \eta} + c\Phi \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = du^2 - e\Phi \quad (6.12)$$

$$2\xi u \frac{\partial H}{\partial \xi} - \left(f - 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathcal{L} Y) \quad (6.13)$$

где

$$\Phi = \beta_{2\xi} uv + 2\xi u \frac{\partial v}{\partial \xi} - \left(f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$Y = \frac{\partial H}{\partial \eta} + u_*^2 \left[(\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \sigma k_6 u^2 \right]$$

$$\beta_{1\xi} = \frac{2\xi \beta_1}{x \xi'(x)} = 2 \frac{d \ln u_*}{d \ln \xi}, \quad k_6 = \frac{\Delta}{\rho H_1 \bar{r}^v R} = \frac{1}{\rho H_1 \bar{r}^v \bar{R}} \sqrt{\frac{2\bar{X}}{K_*}}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= lH_1\bar{r}^{2\nu}, \quad l = \frac{\mu\rho}{\mu_*\rho_*}, \quad a = \frac{2\xi k_6}{\text{Re}^* \Delta^2 x \xi'(x)} = \frac{l\bar{r}^\nu}{\rho\bar{R}} \sqrt{\frac{2\bar{X}}{K_*}} \\
c &= \rho k_1 k_8 \frac{x\xi'(x)}{2\xi} = -\frac{x}{(2X)^2} \frac{2\xi}{H_1} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{u_*}{u_*}, \quad \beta_{2\xi} = \frac{2\xi}{\xi'(x)} \frac{d \ln u_*}{d \ln x} = 2 \frac{d \ln u_*}{d \ln \xi} \\
d &= \frac{u_*^2 \Delta}{H_1 \bar{r}^\nu V_\infty^2 R} = \frac{u_*^2}{H_1 \bar{r}^\nu V_\infty^2 \bar{R}} \sqrt{\frac{2\bar{X}}{K_*}}, \quad \bar{R} = R/R_0 \\
e &= \frac{u_* \nu_* \Delta x \xi'(x)}{x H_1 \bar{r}^\nu V_\infty^2 2\xi} = \frac{u_* \nu_*}{H_1 \bar{r}^\nu V_\infty^2 \sqrt{2\bar{X} K_*}}, \quad \Delta = R_0 \sqrt{\frac{2\bar{X}}{K_*}}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Условия на УВ будут (6.8) или (6.9) и (3.20), где Δ дается вышеприведенной формулой. После нахождения η_s , с использованием (3.20), далее находится из (3.21) отход $y_s = y_s(x)$, если в (3.21) положить $\eta_s = 1$.

После решения уравнений ВУС коэффициенты трения (2.14) и теплопередачи (2.15) будут даваться выражениями

$$\begin{aligned}
C_f &= \left(\frac{u_*}{V_\infty} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{\bar{X} K_{**}}} \left(l \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_w \\
C_H &= \frac{u_*}{V_\infty} \frac{1}{\sqrt{2\bar{X} K_{**}}} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_w \frac{1}{H_\infty - h_w}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

что совпадает с формулами (5.21). Полный коэффициент сопротивления будет вычисляться по формуле (3.24).

Уравнения ВУС с обобщенными условиями на искомой УВ описывают течение во всем УС как при больших числах Re , так и при умеренных.

Преимущество записи уравнений ВУС в переменных Дородницына–Лиза (6.10)–(6.13) состоит в том, что из них явно видно влияние эффектов второго порядка. В уравнении импульсов (6.11) эти эффекты связаны с членами, содержащими коэффициенты k_6 , a и c . Так как $k_6 \approx a \sim (\rho_* \text{Re}_*)^{-1/2}$ ($\text{Re}_* = \rho_\infty u_* R_0 / \mu_*$), то эти коэффициенты при больших сверхзвуковых скоростях малы до чисел $\text{Re}_* \sim 1$. Коэффициент $c \sim \rho_*^{-2}$, и для больших сверхзвуковых скоростей последнее слагаемое в (6.11) может быть опущено. Коэффициент \mathcal{L} в (6.11) и (6.13) отличается от коэффициента Рубезина $l = \mu\rho(\mu_*\rho_*)$ в уравнениях ПС множителем $H_1\bar{r}^{2\nu}$, что приводит к более слабой зависимости коэффициента \mathcal{L} от η .

Если опустить в уравнении (6.11) члены с коэффициентами k_6 , a и c , то система (6.10)–(6.13) будет мало отличаться от уравнений ПС. Отличие задачи обтекания, решаемой в рамках ВУС, от задачи ПС будет состоять в решении близкой системы уравнений, но с определением распределения давления в УС из дополнительных уравнений (6.10) и (6.12), позволяющих определять поле давления во всем УС, в отличие от теории ПС, где давление задается из решения задачи обтекания невязким газом.

7. Уравнения гиперзвукового (тонкого) вязкого ударного слоя (ТВУС). Эта система уравнений получается их уравнений ВУС (разд. 6) при $k \rightarrow 0$ и $\text{Re} \rightarrow \infty$ при условии,

что $k \text{Re} = K \sim 1$ [27]. Совершая указанный предел в уравнениях (6.10)–(6.13), получим

$$u = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad v_2 = \frac{\xi}{X} \frac{\partial y}{\partial \xi} v_1 - \frac{u_*}{\rho \sqrt{2\bar{X}K_*}} \left(f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$$

$$\beta_{1\xi} u^2 + 2\xi u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{V_\infty^2 2\xi}{\rho u_*^2} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(l \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$
(7.1)

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{u_*^2 u^2}{V_\infty^2 \bar{R}} \sqrt{\frac{2\bar{X}}{K_{**}}} = \frac{u_* u^2 \sqrt{2\xi}}{\rho_\infty V_\infty^2 R r_w^v}, \quad K_{**} = \frac{\rho_\infty u_* R_0}{\mu_* \rho_*}$$

$$2\xi u \frac{\partial H}{\partial \xi} - \left(f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(l \frac{\partial H}{\partial \eta} \right)$$

Для этой системы граничные условия на теле будут (3.16). Граничные условия на УВ (6.8) примут более простой вид:

$$u(\xi, \eta_s) = 1 - \left(\frac{1}{K\bar{\Delta} \sin \beta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_s, \quad p(\xi, \eta_s) = \sin^2 \beta$$
(7.2)

$$H(\xi, \eta_s) = H_\infty - \frac{1}{K\bar{\Delta} \sin \beta} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial \eta} + u_*^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]$$

$$\bar{\Delta} = \sqrt{\frac{2\bar{X}}{K_*}}, \quad u_i = u_* = V_\infty \cos \beta$$

Здесь в условиях для u и H угол β не заменяем на α , нарушая последовательность асимптотического подхода. Далее всегда можем положить $\beta = \alpha$.

Неизвестный "отход" УВ η_s будет находиться из условия (3.20), которое в рассматриваемом приближении будет

$$f(\xi, \eta_s) = \frac{r_w}{(v+1)R_0 \cos \beta} \sqrt{\frac{K_*}{2\bar{X}}} = \frac{\rho_\infty V_\infty r_w^{v+1}}{(v+1)\sqrt{2\xi}}$$
(7.3)

В модели (7.1)–(7.3) эффекты второго приближения теории ПС, связанные с продольной и поперечной кривизнами, выпадают. Однако эффекты вихревого взаимодействия остаются [27], так как решение строится сразу во всей области от тела до УВ.

Скорость v_2 , координата $y = y(\xi, \eta)$ и отход УВ $y_s = y_s(x)$ могут быть определены после решения задачи (7.1)–(7.3). Задача (7.1)–(7.3) решается маршевым методом, начиная с линии торможения $\xi = 0$. В рамках этой модели было решено много конкретных задач как для совершенного газа, так и при учете реальных физико-химических процессов, протекающих в УС [5]. Преимущества и недостатки этой модели обсуждались в [5, 15].

8. Параболизированные уравнения Навье–Стокса. При умеренных и малых числах Re при численном решении задач сверхзвукового обтекания удобно не пользоваться двухслойной схемой (УС плюс структура УВ), но получать решения сразу во всей возмущенной области течения, не выделяя УВ. При таком сквозном расчете навье-стоксовская структура УВ получается в процессе решения задачи [22]. Получение такого сквозного решения численно возможно при сравнительно низких числах Re , когда толщина УВ, пропорциональная Re^{-1} , становится сравнимой со всей возму-

щенной областью течения и нет необходимости в дополнительном дроблении сетки в структуре УВ. В этом случае четырех условий в набегающем потоке (3.17) и трех на стенке (3.16) достаточно для решения задачи сверхзвукового обтекания тела в рамках уравнений НС. Уравнения ВУС (см. разд. 6) имеют пониженный на единицу порядок по координате η и не могут удовлетворить четырем условиям в набегающем потоке (3.17). Повысить порядок можно только за счет удержания в системе уравнений НС членов со вторыми производными от v по η в уравнении (3.10), имеющих $O(Re^{-1})$. При этом опускаются вторые производные от u по η , так как производная $du/d\eta$ при переходе через УВ не испытывает резкого изменения, хотя слагаемые со вторыми производными $\partial^2 u/\partial \eta^2$ имеют формально тот же порядок, что и члены с производными $\partial^2 v/\partial \eta^2$. Тогда вместо (3.10) получаем упрощенное уравнение импульсов в проекции на ось y

$$\begin{aligned} \beta_{2uv} - \frac{1}{k_4} u^2 + x\xi'(x)u \frac{\partial v}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} = \\ = -\frac{1}{k_5} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\varepsilon_3 \left(\zeta + \frac{4}{3} \right) \rho k_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (8.1)$$

Переходя в этом уравнении к переменным (5.12), получаем

$$\begin{aligned} \beta_{2\xi uv} - \frac{1}{k_{4\xi}} u^2 + 2\xi u \frac{\partial v}{\partial \xi} - \left(f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} = \\ = -\frac{1}{k_{5\xi}} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\zeta + \frac{4}{3} \right) \mathcal{L} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (8.2)$$

где

$$k_{4\xi} = \frac{Rv_*}{2Xu_*} = -\frac{R \operatorname{tg} \alpha}{2X}, \quad k_{5\xi} = \frac{u_* v_* \Delta}{2XH_1 \bar{r}^v V_\infty^2} = -\frac{\Delta \sin \alpha \cos \alpha}{2XH_1 \bar{r}^v}$$

Здесь было положено: $u_* = v_{1\infty} = V_\infty \cos \alpha$, $v_* = v_{2\infty} = -V_\infty \sin \alpha$. Остальными уравнениями параболизированной системы уравнений НС будут уравнения (6.10), (6.11), (6.13). Эта система, так же как и уравнение ВУС, сохраняет эллиптические свойства в дозвуковых областях течения [22].

9. Исчезающе тонкий вязкий ударный слой ($Re \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ при условии, что $(k/Re)^{1/2} \rightarrow 0$). В отличие от всех предыдущих моделей, в которых $Re \rightarrow \infty$, в этой модели будем предполагать, что $Re \rightarrow 0$, а толщина УС исчезающе мала ($k \rightarrow 0$).

С самого начала возникновения интереса к проблеме гиперзвукового обтекания тел разреженным газом (50-ые годы) распространенной и господствующей точкой зрения среди специалистов по газовой и молекулярной динамике стало представление о том, что континуальный (гидродинамический) подход несправедлив в аэродинамике переходного и свободно-молекулярного режимов обтекания, т.е. при числах Кнудсена Kn порядка единицы и больше. Это было связано по крайней мере с двумя обстоятельствами.

Во-первых, асимптотический вывод по методу Чепмена–Энскога уравнений гидродинамики из кинетического уравнения Больцмана указывает на то, что уравнения НС справедливы до членов $O(Kn)$ включительно. Однако следует заметить, что учет членов $O(Kn)$ в уравнениях НС носит не асимптотический, а композитный характер. Оправданием такого "непоследовательного" вывода является их совпадение с выводом линейной термодинамики необратимых процессов, применимость для эффективных сквозных расчетов всего поля течения с УВ и часто неожиданно более широкая область применимости по числам Kn , чем это следует из их асимптотического вывода.

Описание течений разреженных газов на основе континуальных моделей является предпочтительным, так как последние требуют существенно меньше вычислительных ресурсов, чем модели, основанные на молекулярном подходе. Кроме того, континуальный подход при учете физико-химических процессов в УС не требует знаний констант скоростей элементарных актов взаимодействия частиц, здесь достаточно осредненных макроскопических констант скоростей.

Во-вторых, навье-стоксовская структура УВ при больших числах Маха отличается от структуры, получаемой из решения кинетических уравнений и из эксперимента.

Поэтому неоднократно делалась попытка учета дальнейших членов в разложении Чепмена–Энскога функции распределения по числам K_n , приводящая к континуальным моделям в виде уравнений Барнетта, супербарнетта, содержащих более высокие производные гидродинамических переменных. Поэтому решение краевых задач с этими уравнениями сопряжено с трудностью постановки дополнительных (не вытекающих из механической постановки задачи) граничных условий, а также появлением неустойчивости численных решений при дроблении шага сетки. Кроме того, численное решение задачи обтекания пластины с острой передней кромкой показало [32], что уравнения Барнетта дают менее точное описание поля течения, чем уравнения НС. Это позволяет надеяться, что уравнения Барнетта могут улучшить решение только там, где уравнения НС имеют хорошую точность [18]. Таким образом, в настоящее время отсутствуют континуальные модели, способные описывать течения с большими числами K_n в задачах гиперзвукового обтекания тел.

Однако сказанное выше относится к описанию областей течения с числами K_n порядка единицы и более. При этом не закрывается возможность применения континуальных подходов для описания исчезающе малых по размерам областей течения с малыми числами K_n , где континуальный подход остается справедливым. Такие течения должны характеризоваться малыми числами Re . Поэтому далее в настоящей работе сделана попытка рассмотреть задачу гиперзвукового обтекания тел при $Re \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$ (ИТВУС) в рамках уравнений НС. Для получения физически правильных результатов приходится налагать условие

$$\sqrt{k / Re} \rightarrow 0 \quad (9.1)$$

Так как малым числам Re соответствуют, в частности, течения с большим коэффициентом вязкости μ , то это означает, что члены с вязкостью в уравнениях НС (3.6), (3.9)–(3.11) являются главными. Поэтому сделаем оценку всех членов в уравнениях НС по отношению к первому члену с вязкостью в уравнении (3.9), приняв $Re^* \Delta^2 \sim 1$. Отсюда $\bar{\Delta} \sim (K)^{-1/2} \bar{x} H_1 \bar{r}^{2\nu} (\bar{x} = x / R_0)$. Привлекая оценку (4.2), которая справедлива всегда, найдем $y \sim R_0 (k / Re)^{1/2}$. Используя необходимое условие (9.1), получаем тогда $H_1, \bar{r} \sim 1$. Поэтому в дальнейшем будем опираться на оценку

$$\bar{\Delta} \sim K^{-1/2} \quad (9.2)$$

Интересно отметить, что (9.2) внешне совпадает с оценкой (5.3), полученной для ПС. Однако эти оценки кардинально отличаются друг от друга. Если в (5.3) $K = k Re \rightarrow \infty$, то в (9.2) $K \rightarrow 0$. Из условия на разделяющей линии (3.20) или из второго уравнения (3.6) получаем

$$f \sim u \sim \bar{\Delta}^{-1} \sim K^{1/2}, \quad \nu \sim 1 \quad (9.3)$$

т.е. касательная составляющая скорости в ИТВУС стремится к нулю при $Re \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$ как $K^{1/2}$. Это означает, что в УС исчезающей толщины импульс вдоль оси x не меняется. Принимая далее во внимание, что на разделяющей линии $y_s = y_s(x)$ имеем $v_i \sim k$ (см. (2.9), (2.10)) и принимая за характерную скорость $v_* = v_i \sim k (u_i \sim V_\infty)$, полу-

чаем для коэффициентов k_i ($i = 1, \dots, 8$) и ε_i ($i = 1, \dots, 5$) оценки

$$k_1 \sim k_3 \sim k_4 \sim k_7 \sim k, \quad k_2 \sim kK^{1/2} \quad (9.4)$$

$$k_5 \sim k_6 \sim kK^{-1/2} \sim (k/\text{Re})^{1/2}, \quad k_8 \sim k(k/\text{Re})^{1/2}$$

$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim k/\text{Re}, \quad \varepsilon_3 \sim K^{-1/2}, \quad \varepsilon_4 \sim \varepsilon_5 \sim \text{Re}^{-1} \quad (9.5)$$

Компоненты τ_{ij} ($i, j = \xi, \eta, \zeta$) и потоки X, X', Y из (3.12) будут иметь следующие порядки:

$$\tau_{\xi\xi} \sim \tau_{\eta\eta} \sim \tau_{\zeta\zeta} \sim \tau_{\xi\eta} \sim \tau'_{\xi\xi} \sim \tau'_{\zeta\eta} \sim \sqrt{K} \quad (9.6)$$

С использованием условия (9.1) и оценок (9.2)–(9.6) система уравнений НС (3.6), (3.9)–(3.11) принимает предельно простой вид

$$u = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \rho v_2 = -\frac{\Delta u_*}{2X} \left(f + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(l \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad l = \frac{\mu \rho}{\mu_* \rho_*} \quad (9.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (9.10)$$

Граничные условия на стенке остаются в прежнем виде (3.16). Граничные условия на разделяющей линии $y_s = y_s(x)$ (3.18), (3.20) также сильно упрощаются ($u_* = u_i = V_\infty \cos \alpha$) и принимают вид

$$\frac{1}{K_* \bar{\Delta} \sin \beta} \left(l \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_s = 1, \quad p_s = \sin^2 \beta \quad (9.11)$$

$$\frac{1}{K_* \bar{\Delta} \sin \beta} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_s = H_\infty, \quad f_s = \frac{r_w}{(v+1)\Delta \cos \beta}$$

Второе уравнение (9.7) является автономным, и из него определяется скорость $v_2 \sim (k/\text{Re})^{1/2}$ после решения задачи (9.7)–(9.10), (3.16), (9.11).

Для удобства получения решения нормируем толщину УС, полагая

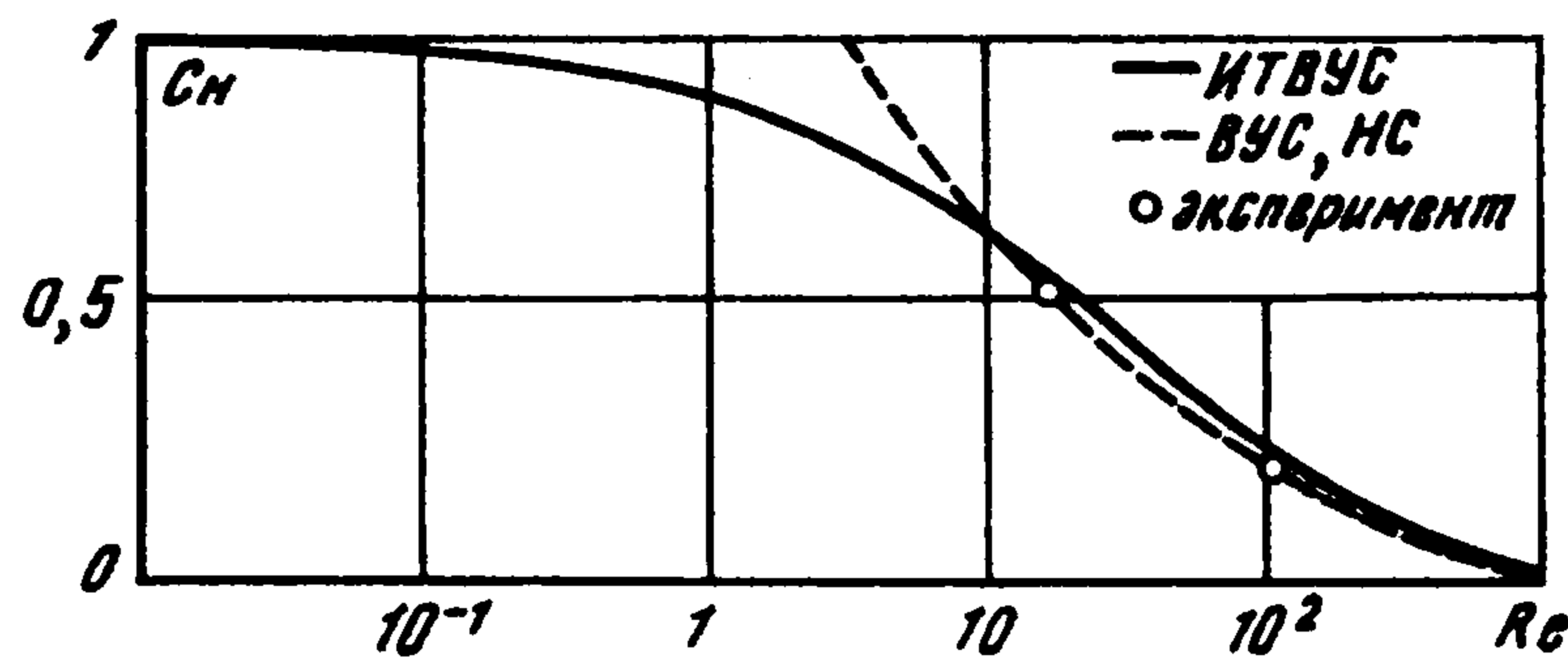
$$\Delta = \int_0^{y_s(x)} \rho dy$$

Тогда $0 \leq \eta \leq 1$. Решение задачи выписывается в квадратурах

$$\Delta^2 = \frac{r_w R_0}{(v+1)K_* I \sin \beta \cos \beta}, \quad I = \int_0^1 \Phi_1(\eta) d\eta, \quad \Phi_1(\eta) = \int_0^\eta \frac{d\eta'}{l}$$

$$u = K_* \bar{\Delta} \Phi_1(\eta) \sin \beta, \quad p = \sin^2 \beta \quad (9.12)$$

$$\frac{H - h_w}{H_\infty} = \frac{h - h_w}{H_\infty} = K_* \bar{\Delta} \Phi_2(\eta) \sin \beta, \quad \Phi_2(\eta) = \int_0^\eta \frac{\sigma d\eta'}{l}$$



Фиг. 2

Коэффициенты давления, трения и теплопередачи будут

$$C_p = 2 \sin^2 \beta, \quad C_f = 2 \sin \beta \cos \beta, \quad C_H = \frac{\sin \beta}{1 - h_w / H_\infty} \quad (9.13)$$

При допущении, что $l \approx 1$, получаем

$$y_s = \Delta(x) \int_0^1 \frac{d\eta}{\rho} = \frac{(\gamma - 1)R_0}{2\gamma p} \left[\Delta \frac{h_w}{H_\infty} + \frac{\sigma \bar{r}_w}{(\nu + 1) \cos \beta} \right], \quad \bar{r}_w = r_w / R_0$$

Коэффициенты (9.13) в точности совпадают с соответствующими коэффициентами при свободно-молекулярном обтекании тела с коэффициентами accommodation, равными единице. Выражение для C_p представляет собой закон Ньютона, который не вытекает из уравнений Эйлера при $k \rightarrow 0$. Вместо него получается при $k \rightarrow 0$, как известно, формула Буземана, учитывающая влияние центробежных сил в УС. При учете вязкости, как следует из вышеизложенного, эти силы пропорциональны $K/k = Re$ и стремятся к нулю при $Re \rightarrow 0$. Таким образом, закон сопротивления Ньютона следует из уравнений НС при $k \rightarrow 0$, $Re \rightarrow 0$ при условии, что $(k/Re)^{1/2} \rightarrow 0$, или, другими словами, из теории ИТВУС.

Из решения (9.12) следует, что при выполнении условия (9.1), при котором оно было получено, имеем ИТВУС (при $h_w / H_\infty \neq 0$), толщина которого стремится к нулю как

$$y_s \sim k\Delta \sim \frac{k}{\sqrt{K}} = \sqrt{\frac{k}{Re}} \rightarrow 0 \quad (9.14)$$

Если определить число Kn как отношение длины свободного пробега к толщине УС y_s , то получим $Kn = l / y_s \sim K^{1/2} \rightarrow 0$. Следовательно, в полученном решении движение газа после прохождения УВ происходит в весьма тонком УС ($y_s \rightarrow 0$), в котором импульс набегающего потока в проекции на ось x и энтальпия, не изменяются по толщине УС и целиком переносятся с ударной волны на тело (см. (9.8), (9.10), (9.11)).

На фиг. 2 приведены графики C_H в окрестности критической точки в зависимости от числа $Re = (\rho_\infty V_\infty R_0) / \mu(T_0)$, полученные численным решением уравнений ИТВУС, ВУС и НС. В уравнениях ИТВУС выполняется условие (9.1) и $C_H \rightarrow 1$ при $Re \rightarrow 0$. В уравнениях ВУС, начиная с некоторого малого числа Re (в данном случае при $Re \approx 10$), условие (9.1) не выполняется и $C_H \sim Re^{-1/2} \rightarrow \infty$, что подтверждает изложенную выше теорию.

Следует отметить, что выход на свободно-молекулярный режим отмечался ранее [27, 33] исходя из частного точного решения уравнений ТВУС, имеющего место в окрестности критической точки осесимметричного тела при линейной зависимости вязкости от температуры. Полученные здесь результаты носят общий характер, они не зависят от конкретных переносных свойств газа и справедливы как для осесимметричных, так и для плоских двумерных задач. Показано, что при $k \rightarrow 0$, $Re \rightarrow 0$ при условии, что $(k/Re)^{1/2} \rightarrow 0$, задача гиперзвукового обтекания сводится к решению

упрощенных ("локальных") уравнений Стокса (9.7)–(9.10) в исчезающе тонком вязком слое около тела с искомой границей (условие (9.12)).

Таким образом, задача сверх- и гиперзвукового обтекания затупленного тела по всей траектории входа в атмосферу Земли (планеты) от свободно-молекулярного режима обтекания до континуального, соответствующего большим числам Re у поверхности планеты, может решаться в рамках одной модели ВУС (разд. 6) по одному численному алгоритму, например [11] или [12]. При этом при малых числах Re следует искусственно соблюдать необременительное условие (9.1). Действительно, так как на больших высотах скорости входа космических аппаратов и космических тел велики (порядка 10 км/с), то $k \sim 0.05$. Поэтому к условию (9.1) следует обращаться при весьма малых числах Re , что для тел с $R_0 \sim 1$ м соответствует высотам $H \sim 100$ – 150 км над поверхностью Земли. При малых числах Re структура УВ (второй слой в двухслойной модели) должна находиться отдельно из решения кинетических или из соответствующих макроскопических уравнений.

Автор благодарит В.С. Галкина за благожелательное и конструктивное обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-01261, 97-01-00940) и Международной ассоциации по содействию и сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (95-IN-RU-1329).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tirsky G.A.* Up-to-date gasdynamic models of hypersonic aerodynamics and heat transfer with real gas properties // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1993. V. 25. P. 151–181.
2. *Cheng H.K.* Perspectives on hypersonic viscous flow research // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1993. V. 25. P. 455–484.
3. *Super- and hypersonic aerodynamics and heat transfer / Eds by G.K. Mikhailov, V.Z. Parton.* Boca Raton: CRC Press, 1993.
4. *Бронштэн В.А.* Физика метеорных явлений. М.: Наука, 1981.
5. *Гершбейн Э.А., Пейгин С.В., Тирский Г.А.* Сверхзвуковое обтекание тел при малых и умеренных числах Рейнольдса // *Итоги науки и техники. Сер. механика жидкости и газа.* М.: ВИНТИ, 1985. Т. 19. С. 3–85.
6. *Ван-Дайк М.* Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком // *Исследование гиперзвуковых течений.* М.: Мир, 1964. С. 35–58.
7. *Davis R.T., Flügge-Lotz I.* Second-order boundary-layer effects in hypersonic flow past axisymmetric blunt bodies // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 20. Pt 4. P. 593–623.
8. *Davis R.T.* Numerical solution of the hypersonic viscous shocklayer equations // *AIAA Journal.* 1970. V. 8. № 5. P. 843–851.
9. *Тирский Г.А.* К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химическим реагирующим многокомпонентным потоком газа при наличии вдува // *Науч. тр. Ин-та механики МГУ.* 1975. № 39. С. 5–38.
10. *Головачев Ю.П.* Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука, Физматлит, 1996. 374 с.
11. *Васильевский С.А., Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1987. Т. 27. № 5. С. 741–750.
12. *Ковалев В.Л., Крупнов А.А., Тирский Г.А.* Решение уравнений вязкого ударного слоя методом простых глобальных итераций по градиенту давления и форме ударной волны // *Докл. РАН.* 1994. Т. 338. № 3. С. 333–336.
13. *Cheng H.K.* The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number // *IAS Paper.* 1963. № 63–92. 100 p.
14. *Cheng H.K.* Viscous hypersonic blunt-body problems and the newtonian theory // *Proc. Intern. Symp. on Fundamental Phenomena in Hypersonic Flow // Ed. by G.Y. Hall.* Ithaca: Cornell Univ. Press, 1966. P. 90–131.

15. *Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Сравнение моделей тонкого и полного вязкого ударного слоя в задаче сверхзвукового обтекания притупленных конусов вязким газом // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 963–969.
16. *Кирютин Б.А., Тирский Г.А.* Граничные условия скольжения на каталитической поверхности в многокомпонентном потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 159–168.
17. *Щербак В.Г.* Сравнение различных газодинамических приближений при численном моделировании гиперзвукового обтекания тел разреженным газом // Теплофизика высоких температур. 1990. Т. 28. № 6. С. 1164–1170.
18. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
19. *Bird G.A.* Monte-Carlo simulation in an engineering context // Rarefied Gas Dynamics / Ed. by S.S. Fisher: Progr. in Astronaut. and Aeronaut. N.Y.: AIAA, 1981. V. 74. Pt 1. P. 239–255.
20. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.1. 4-е изд. испр. и доп. М.: Наука, 1983. 528 с.
21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
22. *Глазков Ю.В., Тирский Г.А., Щербак В.Г.* Численный метод решения параболизированных уравнений Навье – Стокса в задачах сверхзвукового обтекания тел // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 6. С. 1322–1325.
23. *Кочин Н.Е.* Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2. 585 с.
24. *Седов Л.И., Михайлова М.П., Черный Г.Г.* О влиянии вязкости и теплопроводности на течение газа за сильно искривленной ударной волной // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 1953. № 3. С. 95–100.
25. *Слезкин Н.А.* К теории течения газа в слое между поверхностью ударной волны и притупленной поверхностью тела вращения // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 2. С. 3–12.
26. *Толстых А.И.* О структуре криволинейной ударной волны // ПММ. 1964. Т. 28. № 3. С. 553–556.
27. *Cheng H.K.* Hypersonic shock-layer theory of the stagnation region at low Reynolds number // Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. California: Univ. Southern. 1961. P. 161–175.
28. *Дородницын А.А.* Пограничный слой в сжимаемом газе // ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 6. С. 449–486.
29. *Lees L.* Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies of hypersonic flight speeds // Jet Propuls. 1956. V. 26. № 4. P. 259–269.
30. *Лунев В.В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
31. *Стулов В.П.* О законе подобия при сверхзвуковом обтекании затупленных тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 142–146.
32. *Tannehill J.C., Eisler G.R.* Numerical computation of the hypersonic leading edge problem using the Burnett equations // Phys. Fluids. 1976. V. 19. № 1. P. 9–15.
33. *Магомедов К.М.* Гиперзвуковое обтекание тупых тел вязким газом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 2. С. 45–56.

Москва

Поступила в редакцию
14.VII.1997